Grafos aleatorios: tolerancia a la inserción e isomorfismo local

(Random graphs: insertion tolerant and local isomorphism)

Antón Carlos Vázquez Martínez

Universidade de Santiago de Compostela

Santiago, 14 de Diciembre de 2013

Idea general

Objetivo principal Presentar el concepto de grafo aleatorio según D. Aldous y R. Lyons, ilustrarlo con dos ejemplos con características diferentes y mostrar que las propiedades de tolerancia a la inserción e isomorfismo local son incompatibles en este contexto.

Definición

Un grafo aleatorio es una variable aleatoria con valores en el espacio $\mathcal{G}$ de las clases de isomorfía de los grafos enraizados localmente finitos.

Contexto Substituiremos $\mathcal{G}$ por el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley de un grupo finitamente generado.

Idea general

Objetivo principal Presentar el concepto de grafo aleatorio según D. Aldous y R. Lyons, ilustrarlo con dos ejemplos con características diferentes y mostrar que las propiedades de tolerancia a la inserción e isomorfismo local son incompatibles en este contexto.

Definición

Un grafo aleatorio es una variable aleatoria con valores en el espacio $\mathcal{G}$ de las clases de isomorfía de los grafos enraizados localmente finitos.

Contexto Substituiremos $\mathcal{G}$ por el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley de un grupo finitamente generado.

Idea general

Objetivo principal Presentar el concepto de grafo aleatorio según D. Aldous y R. Lyons, ilustrarlo con dos ejemplos con características diferentes y mostrar que las propiedades de tolerancia a la inserción e isomorfismo local son incompatibles en este contexto.

Definición

Un grafo aleatorio es una variable aleatoria con valores en el espacio $\mathcal{G}$ de las clases de isomorfía de los grafos enraizados localmente finitos.

Contexto Substituiremos $\mathcal{G}$ por el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley de un grupo finitamente generado.

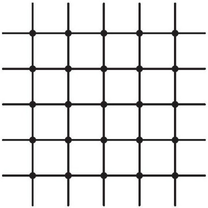
Contenidos

Contenidos

Contenidos

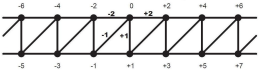
Grafos de Cayley

- Grafo de Cayley G de un grupo F finitamente generado con sistema de generadores S simétrico que no contiene al elemento neutro.
- La distancia de G como grafo coincide con la distancia de las palabras del grupo F.

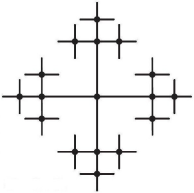


$G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

$G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$.



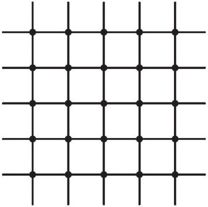
$G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1, \pm 2\}$.



$G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

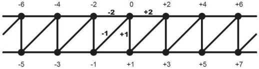
Grafos de Cayley

- Grafo de Cayley G de un grupo F finitamente generado con sistema de generadores S simétrico que no contiene al elemento neutro.
- La distancia de G como grafo coincide con la distancia de las palabras del grupo F.

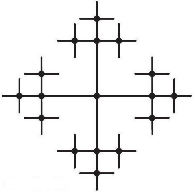


$G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

$G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1\}$.



$G = \mathbb{Z}$, $S = \{\pm 1, \pm 2\}$.



$G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Espacio de Gromov-Hausdorff

- El espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ del grafo de Cayley G esta formado por los subgrafos de G que continen al $\mathbf{1}$.
- Se define una últramétrica d de manera que dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen.
- El espacio $\mathcal{G}$ es compacto y completamente disconexo.

Teorema

Si F es infinito, el conjunto derivado de $\mathcal{G}$ es un conjunto de Cantor, salvo si $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$.

Espacio de Gromov-Hausdorff

- El espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ del grafo de Cayley G esta formado por los subgrafos de G que continen al $\mathbf{1}$.
- Se define una últramétrica d de manera que dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen.
- El espacio $\mathcal{G}$ es compacto y completamente disconexo.

Teorema

Si F es infinito, el conjunto derivado de $\mathcal{G}$ es un conjunto de Cantor, salvo si $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$.

Espacio de Gromov-Hausdorff

- El espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ del grafo de Cayley G esta formado por los subgrafos de G que continen al $\mathbf{1}$.
- Se define una últramétrica d de manera que dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen.
- El espacio $\mathcal{G}$ es compacto y completamente disconexo.

Teorema

Si F es infinito, el conjunto derivado de $\mathcal{G}$ es un conjunto de Cantor, salvo si $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$.

Espacio de Gromov-Hausdorff

- El espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ del grafo de Cayley G esta formado por los subgrafos de G que continen al $\mathbf{1}$.
- Se define una últramétrica d de manera que dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen.
- El espacio $\mathcal{G}$ es compacto y completamente disconexo.

Teorema

Si F es infinito, el conjunto derivado de $\mathcal{G}$ es un conjunto de Cantor, salvo si $F = \mathbb{Z}$ y $S = \pm 1$.

Espacio de Gromov-Hausdorff como un cociente

- Definimos $\widetilde{\mathcal{G}}$ como el espacio de los subgrafos con punto base del grafo de Cayley G.
- $\mathcal{G}$ puede identificarse con $\widetilde{\mathcal{G}}/F$.
- La relación de $\widetilde{\mathcal{G}}$ que consiste en cambiar el punto base define en $\mathcal{G}$ una relación $\mathcal{R}$.

Espacio de Gromov-Hausdorff como un cociente

- Definimos $\widetilde{\mathcal{G}}$ como el espacio de los subgrafos con punto base del grafo de Cayley G.
- $\mathcal{G}$ puede identificarse con $\widetilde{\mathcal{G}}/F$.
- La relación de $\widetilde{\mathcal{G}}$ que consiste en cambiar el punto base define en $\mathcal{G}$ una relación $\mathcal{R}$.

Espacio de Gromov-Hausdorff como un cociente

- Definimos $\widetilde{\mathcal{G}}$ como el espacio de los subgrafos con punto base del grafo de Cayley G.
- $\mathcal{G}$ puede identificarse con $\widetilde{\mathcal{G}}/F$.
- La relación de $\widetilde{\mathcal{G}}$ que consiste en cambiar el punto base define en $\mathcal{G}$ una relación $\mathcal{R}$.

Propiedad de isomorfismo local

Definición

Dados $H, H' \in \mathcal{G}$, se dirá que $B_H(x,r)$ *se embebe fielmente en* H', $B_H(x,r) \hookrightarrow H'$, si existe $g \in G$ tal que $B_H(x,r)g = B_{H'}(xg,r) \subset H'$.

Definición

Un grafo $H \in \mathcal{G}$ es *repetitivo* si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1},r) \hookrightarrow B_H(y,R)$ para todo $y \in H$.

Teorema (E. Blanc, Á. Lozano)

Sea $\Omega(H)$ la envoltura de un elemento H de $\mathcal{G}$, es decir, la clausura de la clase $\mathcal{R}[H]$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) H es repetitivo.

(ii) $\Omega(H)$ es minimal para la inclusión de envolturas.

Propiedad de isomorfismo local

Definición

Dados $H, H' \in \mathcal{G}$, se dirá que $B_H(x,r)$ *se embebe fielmente en* H', $B_H(x,r) \hookrightarrow H'$, si existe $g \in G$ tal que $B_H(x,r)g = B_{H'}(xg,r) \subset H'$.

Definición

Un grafo $H \in \mathcal{G}$ es *repetitivo* si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1},r) \hookrightarrow B_H(y,R)$ para todo $y \in H$.

Teorema (E. Blanc, Á. Lozano)

Sea $\Omega(H)$ la envoltura de un elemento H de $\mathcal{G}$, es decir, la clausura de la clase $\mathcal{R}[H]$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) H es repetitivo.

(ii) $\Omega(H)$ es minimal para la inclusión de envolturas.

Propiedad de isomorfismo local

Definición

Dados $H, H' \in \mathcal{G}$, se dirá que $B_H(x,r)$ *se embebe fielmente en* H', $B_H(x,r) \hookrightarrow H'$, si existe $g \in G$ tal que $B_H(x,r)g = B_{H'}(xg,r) \subset H'$.

Definición

Un grafo $H \in \mathcal{G}$ es *repetitivo* si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(\mathbf{1},r) \hookrightarrow B_H(y,R)$ para todo $y \in H$.

Teorema (E. Blanc, Á. Lozano)

Sea $\Omega(H)$ la envoltura de un elemento H de $\mathcal{G}$, es decir, la clausura de la clase $\mathcal{R}[H]$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) H es repetitivo.

(ii) $\Omega(H)$ es minimal para la inclusión de envolturas.

Grafos aleatorios

Definition

Sea $\mathcal{G}$ el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley G. Se llama *grafo aleatorio* a una variable aleatoria con espacio de estados $\mathcal{G}$, es decir, una aplicación medible

$$\Theta \colon (\Omega, P) \to \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, P) con distribución $\mu = \Theta_* P$

$\rightsquigarrow$ Ejemplos $\begin{cases} \text{Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon} \\ \text{Percolación de Bernoulli} \end{cases}$

Grafos aleatorios

Definition

Sea $\mathcal{G}$ el espacio de Gromov-Hausdorff de un grafo de Cayley G. Se llama *grafo aleatorio* a una variable aleatoria con espacio de estados $\mathcal{G}$, es decir, una aplicación medible

$$\Theta \colon (\Omega, P) \to \mathcal{G}$$

definida sobre un espacio de probabilidad (Ω, P) con distribución $\mu = \Theta_* P$

$$\rightsquigarrow \text{Ejemplos} \begin{cases} \text{Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon} \\ \text{Percolación de Bernoulli} \end{cases}$$

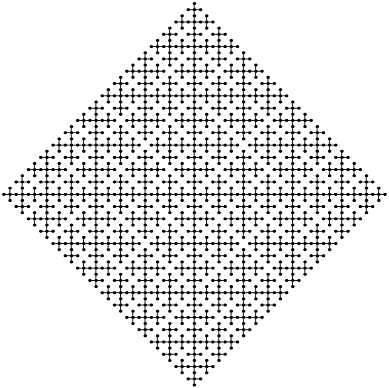
Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon

- Construcción del árbol aperiódico y repetitivo de Kenyon T_∞.

- A la envoltura $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ de T_∞ se le llama minimal de Ghys-Kenyon.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon

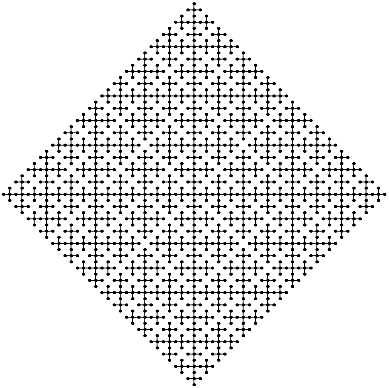
- Construcción del árbol aperiódico y repetitivo de Kenyon T_∞.



- A la envoltura $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ de T_∞ se le llama minimal de Ghys-Kenyon.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon

- Construcción del árbol aperiódico y repetitivo de Kenyon T_∞.



- A la envoltura $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ de T_∞ se le llama minimal de Ghys-Kenyon.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- La envoltura Ω está formada por árboles construidos de manera aleatoria localmente indistinguibles de T_∞.
- El minimal de Ghys-Kenyon admite la descomposición $\Omega = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[T_\alpha]$.
- Los árboles T_α se construyen recursivamente, partiendo del punto $\mathbf{1}$, agregando una arista en una de las cuatro direcciones y replicando la figura previa todo alrededor del nuevo vértice.
- La forma de escoger cada nueva arista durante la construcción de T_α es de acuerdo a la sucesión α formada por 0, 1, 2 y 3.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- La envoltura Ω está formada por árboles construidos de manera aleatoria localmente indistinguibles de T_∞.
- El minimal de Ghys-Kenyon admite la descomposición $\Omega = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[T_\alpha]$.
- Los árboles T_α se construyen recursivamente, partiendo del punto $\mathbf{1}$, agregando una arista en una de las cuatro direcciones y replicando la figura previa todo alrededor del nuevo vértice.
- La forma de escoger cada nueva arista durante la construcción de T_α es de acuerdo a la sucesión α formada por 0, 1, 2 y 3.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- La envoltura Ω está formada por árboles construidos de manera aleatoria localmente indistinguibles de T_∞.
- El minimal de Ghys-Kenyon admite la descomposición $\Omega = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[T_\alpha]$.
- Los árboles T_α se construyen recursivamente, partiendo del punto **1**, agregando una arista en una de las cuatro direcciones y replicando la figura previa todo alrededor del nuevo vértice.
- La forma de escoger cada nueva arista durante la construcción de T_α es de acuerdo a la sucesión α formada por 0, 1, 2 y 3.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- La envoltura Ω está formada por árboles construidos de manera aleatoria localmente indistinguibles de T_∞.
- El minimal de Ghys-Kenyon admite la descomposición $\Omega = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[T_\alpha]$.
- Los árboles T_α se construyen recursivamente, partiendo del punto **1**, agregando una arista en una de las cuatro direcciones y replicando la figura previa todo alrededor del nuevo vértice.
- La forma de escoger cada nueva arista durante la construcción de T_α es de acuerdo a la sucesión α formada por 0, 1, 2 y 3.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- Para construir un grafo aleatorio sobre $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ definiremos $\Theta\colon (\Omega, \mu) \to \mathcal{G}$ como la inclusión.

Teorema

El minimal de Ghys-Kenyon Ω posee una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante.

- Sea B_n el subconjunto de $\mathcal{R}[T_\infty]$ que se corresponde con la bola $B_{T_\infty}(0, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Las medidas:

$$\mu_n(\Omega_{P,1}) = \frac{\#(B_n \cap \Omega_{P,1})}{\#B_n} = \frac{\#\{v \in B_n \mid P + v \subset T_\infty\}}{\#B_n}$$

convergen débilmente a μ, una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante sobre Ω.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- Para construir un grafo aleatorio sobre $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ definiremos $\Theta \colon (\Omega, \mu) \to \mathcal{G}$ como la inclusión.

Teorema

El minimal de Ghys-Kenyon Ω posee una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante.

- Sea B_n el subconjunto de $\mathcal{R}[T_\infty]$ que se corresponde con la bola $B_{T_\infty}(0, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Las medidas:

$$\mu_n(\Omega_{P,1}) = \frac{\#(B_n \cap \Omega_{P,1})}{\#B_n} = \frac{\#\{v \in B_n \mid P + v \subset T_\infty\}}{\#B_n}$$

convergen débilmente a μ, una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante sobre Ω.

Árboles aleatorios de Ghys-Kenyon (cont.)

- Para construir un grafo aleatorio sobre $\Omega = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ definiremos $\Theta\colon (\Omega, \mu) \to \mathcal{G}$ como la inclusión.

Teorema

El minimal de Ghys-Kenyon Ω posee una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante.

- Sea B_n el subconjunto de $\mathcal{R}[T_\infty]$ que se corresponde con la bola $B_{T_\infty}(0, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Las medidas:

$$\mu_n(\Omega_{P,\mathbf{1}}) = \frac{\#(B_n \cap \Omega_{P,\mathbf{1}})}{\# B_n} = \frac{\#\{v \in B_n \mid P + v \subset T_\infty\}}{\# B_n}$$

convergen débilmente a μ, una medida de probabilidad $\mathcal{R}$-invariante sobre Ω.

Percolación de Bernoulli

Definición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

Se llama *percolación de Bernoulli* de parámetro p sobre un grafo $G = (V, E)$ al espacio de los coloreados $\Omega = \{0,1\}^E$, dotado de la topología generada por los cilindros $C^{\alpha_0,\dots,\alpha_n}_{e_0,\dots,e_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i\}$, donde $e_i \in E$ y $\alpha_i \in \{0,1\}$ con $i \in \{0,\dots,n\}$, de la σ-álgebra generada por los abiertos de esta topología y de la medida P_p obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre $\{0,1\}$ con pesos p y $1-p$ sobre 1 y 0.

- A cada $\omega \in \Omega$, se le asocia un subgrafo $G(\omega) \in G$ cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de ω.
- Para cada $v \in V$, se denotará $C_v(\omega)$ al clúster de $G(\omega)$ que contiene al vértice v.

Percolación de Bernoulli

Definición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

Se llama *percolación de Bernoulli* de parámetro p sobre un grafo $G = (V, E)$ al espacio de los coloreados $\Omega = \{0, 1\}^E$, dotado de la topología generada por los cilindros $C^{\alpha_0,\dots,\alpha_n}_{e_0,\dots,e_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i\}$, donde $e_i \in E$ y $\alpha_i \in \{0, 1\}$ con $i \in \{0, \dots, n\}$, de la σ-álgebra generada por los abiertos de esta topología y de la medida P_p obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre $\{0, 1\}$ con pesos p y $1 - p$ sobre 1 y 0.

- A cada $\omega \in \Omega$, se le asocia un subgrafo $G(\omega) \in G$ cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de ω.
- Para cada $v \in V$, se denotará $C_v(\omega)$ al clúster de $G(\omega)$ que contiene al vértice v.

Percolación de Bernoulli

Definición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

Se llama *percolación de Bernoulli* de parámetro p sobre un grafo $G = (V, E)$ al espacio de los coloreados $\Omega = \{0, 1\}^E$, dotado de la topología generada por los cilindros $C^{\alpha_0,\dots,\alpha_n}_{e_0,\dots,e_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i\}$, donde $e_i \in E$ y $\alpha_i \in \{0, 1\}$ con $i \in \{0, \dots, n\}$, de la σ-álgebra generada por los abiertos de esta topología y de la medida P_p obtenida como producto de las medidas de Bernoulli sobre $\{0, 1\}$ con pesos p y $1 - p$ sobre 1 y 0.

- A cada $\omega \in \Omega$, se le asocia un subgrafo $G(\omega) \in G$ cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de ω.
- Para cada $v \in V$, se denotará $C_v(\omega)$ al clúster de $G(\omega)$ que contiene al vértice v.

Percolación de Bernoulli (cont.)

Definición

Llamaremos aplicación clúster a la aplicación

$$\Theta \colon \Omega \to \mathcal{G}$$

que le asocia a cada coloreado $\omega \in \Omega$ el clúster $\Theta(\omega) = C_{\mathbf{1}}(\omega)$ del elemento neutro $\mathbf{1} \in G$.

Observación

La aplicación clúster es continua.

Proposición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

La medida de probabilidad P_p es invariante y ergódica respecto a la acción del grupo F.

Percolación de Bernoulli (cont.)

Definición

Llamaremos aplicación clúster a la aplicación

$$\Theta \colon \Omega \to \mathcal{G}$$

que le asocia a cada coloreado $\omega \in \Omega$ el clúster $\Theta(\omega) = C_{\mathbf{1}}(\omega)$ del elemento neutro $\mathbf{1} \in G$.

Observación

La aplicación clúster es continua.

Proposición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

La medida de probabilidad P_p es invariante y ergódica respecto a la acción del grupo F.

Percolación de Bernoulli (cont.)

Definición

Llamaremos aplicación clúster a la aplicación

$$\Theta \colon \Omega \to \mathcal{G}$$

que le asocia a cada coloreado $\omega \in \Omega$ el clúster $\Theta(\omega) = C_{\mathbf{1}}(\omega)$ del elemento neutro $\mathbf{1} \in G$.

Observación

La aplicación clúster es continua.

Proposición (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett)

La medida de probabilidad P_p es invariante y ergódica respecto a la acción del grupo F.

Relaciones clúster

Definición

Se define la *relación de equivalencia clúster* $\mathcal{R}^{cl}$ sobre Ω de la siguiente manera: dos coloreados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ son $\mathcal{R}^{cl}$-equivalentes si y sólo si existe $g \in F$ tal que $\omega_1 g = \omega_2$ y $g^{-1} \in C_1(\omega_1)$.

Proposición

La aplicación clúster es compatible con $\mathcal{R}^{cl}$ como relación de equivalencia sobre Ω y con $\mathcal{R}$ como relación de equivalencia sobre $\mathcal{G}$.

Relaciones clúster

Definición

Se define la *relación de equivalencia clúster* $\mathcal{R}^{cl}$ sobre Ω de la siguiente manera: dos coloreados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ son $\mathcal{R}^{cl}$-equivalentes si y sólo si existe $g \in F$ tal que $\omega_1 g = \omega_2$ y $g^{-1} \in C_{\mathbf{1}}(\omega_1)$.

Proposición

La aplicación clúster es compatible con $\mathcal{R}^{cl}$ como relación de equivalencia sobre Ω y con $\mathcal{R}$ como relación de equivalencia sobre $\mathcal{G}$.

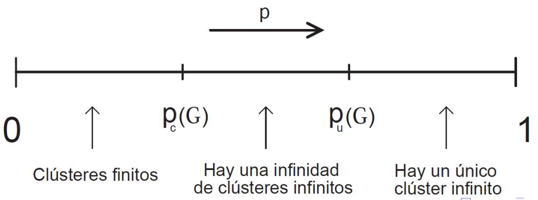
Transiciones de fase

- Existe un valor llamado *percolación crítica* del grafo G (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett) que verifica

$$\begin{aligned} p_c(G) &= \sup\{\, p \in [0,1] \mid \text{ Casi todos los clústeres son finitos} \,\} \\ &= \inf\{\, p \in [0,1] \mid \exists\, C_v(\omega) \text{ infinito de manera casi segura} \,\}. \end{aligned}$$

- Existe otro valor crítico $p_u(G) \geq p_c(G)$ (O. Häggström, Y. Peres) verificando

$$\begin{aligned} p_u(G) = &\inf\{\, p \in [0,1] \mid \text{ Existe un único cúster infinito} \\ &\text{de manera casi segura} \,\} \end{aligned}$$



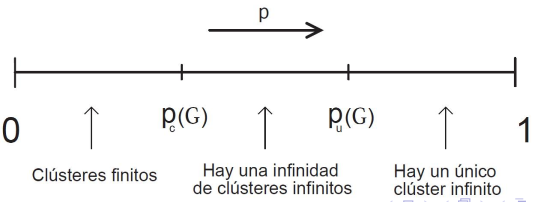
Transiciones de fase

- Existe un valor llamado *percolación crítica* del grafo G (R. Lyons, Y. Peres, G. Grimmett) que verifica

$$\begin{aligned} p_c(G) &= \sup \{ p \in [0,1] \mid \text{ Casi todos los clústeres son finitos} \} \\ &= \inf \{ p \in [0,1] \mid \exists\, C_v(\omega) \text{ infinito de manera casi segura} \}. \end{aligned}$$

- Existe otro valor crítico $p_u(G) \geq p_c(G)$ (O. Häggström, Y. Peres) verificando

$$\begin{aligned} p_u(G) = &\inf \{ p \in [0,1] \mid \text{ Existe un único cúster infinito} \\ &\text{de manera casi segura} \} \end{aligned}$$



Invarianza y ergodicidad de la medida

- La medida P_p no es ergódica respecto de la relación $\mathcal{R}^{cl}$, ya que los clústeres finitos forman un conjunto saturado por la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$ cuya medida puede ser positiva distinta de 1.

Definición

Sea $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_1(\omega) \text{ es infinito}\}$. Para cada $p \in (p_c(G), 1]$, se define la medida de probabilidad $\widetilde{P}_p$ sobre Ω como

$$\widetilde{P}_p(B) = \frac{P_p(B \cap \Omega_\infty)}{P_p(\Omega_\infty)}$$

Teorema (R. Lyons, O. Schramm)

La medida $\widetilde{P}_p$ sobre Ω es invariante y ergódica respecto de la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$.

Invarianza y ergodicidad de la medida

- La medida P_p no es ergódica respecto de la relación $\mathcal{R}^{cl}$, ya que los clústeres finitos forman un conjunto saturado por la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$ cuya medida puede ser positiva distinta de 1.

Definición

Sea $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_1(\omega) \text{ es infinito}\}$. Para cada $p \in (p_c(G), 1]$, se define la medida de probabilidad $\widetilde{P}_p$ sobre Ω como

$$\widetilde{P}_p(B) = \frac{P_p(B \cap \Omega_\infty)}{P_p(\Omega_\infty)}$$

Teorema (R. Lyons, O. Schramm)

La medida $\widetilde{P}_p$ sobre Ω es invariante y ergódica respecto de la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$.

Invarianza y ergodicidad de la medida

- La medida P_p no es ergódica respecto de la relación $\mathcal{R}^{cl}$, ya que los clústeres finitos forman un conjunto saturado por la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$ cuya medida puede ser positiva distinta de 1.

Definición

Sea $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid C_1(\omega) \text{ es infinito}\}$. Para cada $p \in (p_c(G), 1]$, se define la medida de probabilidad $\widetilde{P}_p$ sobre Ω como

$$\widetilde{P}_p(B) = \frac{P_p(B \cap \Omega_\infty)}{P_p(\Omega_\infty)}$$

Teorema (R. Lyons, O. Schramm)

La medida $\widetilde{P}_p$ sobre Ω es invariante y ergódica respecto de la relación de equivalencia $\mathcal{R}^{cl}$.

Tolerancia a la inserción

Definición

Se define la *aplicación de inserción* de una arista $e \in E$ como la aplicación $i_e \colon \Omega \to \Omega$ definida como

$$i_e(\omega)(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e' = e\,, \\ \omega(e') & \text{si } e' \neq e\,. \end{cases}$$

Definición

Se dice que la medida de percolación P_p es *tolerante a la inseción* si para cada arista $e \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ tal que $P_p(B) > 0$ se tiene

$$P_p(i_e(B)) > 0\,.$$

Tolerancia a la inserción

Definición

Se define la *aplicación de inserción* de una arista $e \in E$ como la aplicación $i_e \colon \Omega \to \Omega$ definida como

$$i_e(\omega)(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e' = e\,, \\ \omega(e') & \text{si } e' \neq e\,. \end{cases}$$

Definición

Se dice que la medida de percolación P_p es *tolerante a la inseción* si para cada arista $e \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ tal que $P_p(B) > 0$ se tiene

$$P_p(i_e(B)) > 0\,.$$

Tolerancia a la inserción (cont.)

Proposición

P_p es tolerante a la inserción para $p \in (0,1)$.

Proposición

$\widetilde{P}_p$ es tolerante a la inserción en la fase supercrítica.

Tolerancia a la inserción (cont.)

Proposición

P_p es tolerante a la inserción para $p \in (0,1)$.

Proposición

$\widetilde{P}_p$ es tolerante a la inserción en la fase supercrítica.

Tolerancia a la inserción e isomorfismo local

Teorema

Sea Ω el espacio de coloreados de la percolación de Bernoulli sobre G y sea $\widetilde{P}_p$ con $p \in (p_c(G), 1)$. Entonces la medida de la envoltura $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ de cualquier subgrafo repetitivo H de G es nula respecto de la distribución $\mu = \Theta_* \widetilde{P}_p$.

Teorema

Sea $\Theta : (\Omega, P) \to \mathcal{G}$ un grafo aleatorio con valores en el espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ asociado al grafo de Cayley G de un grupo de tipo finito F. Sea $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ la envoltura en $\mathcal{G}$ de un subgrafo repetitivo H de G. Si la medida $\mu = \Theta_* P$ es ergódica respecto de la relación $\mathcal{R}$, tolerante a la inserción de aristas y no atómica entonces $\mu(X) = 0$.

Tolerancia a la inserción e isomorfismo local

Teorema

Sea Ω el espacio de coloreados de la percolación de Bernoulli sobre G y sea $\widetilde{P}_p$ con $p \in (p_c(G), 1)$. Entonces la medida de la envoltura $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ de cualquier subgrafo repetitivo H de G es nula respecto de la distribución $\mu = \Theta_* \widetilde{P}_p$.

Teorema

Sea $\Theta : (\Omega, P) \to \mathcal{G}$ un grafo aleatorio con valores en el espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{G}$ asociado al grafo de Cayley G de un grupo de tipo finito F. Sea $X = \overline{\mathcal{R}[H]}$ la envoltura en $\mathcal{G}$ de un subgrafo repetitivo H de G. Si la medida $\mu = \Theta_* P$ es ergódica respecto de la relación $\mathcal{R}$, tolerante a la inserción de aristas y no atómica entonces $\mu(X) = 0$.