4 lliçons sobre l'àlgebra de Steenrod

Jaume Aguadé

L'autor és Jaume Aguadé Bover
Jaume.Aguade@uab.cat

Aquests apunts es poden descarregar aquí:
http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html

Quatre leçons sur l'algèbre de Steenrod

2011

1. Operadors associats a l'homomorfisme de Frobenius

En característica p, l'aplicació $x \mapsto x^p$ és un homomorfisme. Se'n diu l'homomorfisme de Frobenius. Aquest homomorfisme dóna lloc a tota una àlgebra d'operadors.

Per fixar idees, suposem que p és un primer senar (amb certes petites modificacions si $p=2$) i considerem

$$P = \mathbb{F}_p[t_1, t_2, t_3, \dots]$$

una àlgebra de polinomis en infinits generadors. Considerem P graduada, prenent $|t_i| = 2$ (seria més natural prendre $|t_i| = 1$, però per motius topològics, prenem $|t_i| = 2$)

Definim

$$\mathcal{P} : P \longrightarrow P$$

via $\mathcal{P}(t_i) = t_i + t_i^p$ i estenent a un homomorfisme d'àlgebres.

Observem que $\mathcal{P}(t_i) = t_i(1 + t_i^{p-1})$. Per tant, si $x \in P_{2r}$, tenim

$$\mathcal{P}(x) = x + x_1 + \dots + x_{r-1} + x^p$$

$$|x_i| = 2r + 2i(p-1)$$

Definició:

$$\mathcal{P}^i(x) = x_i \in P$$

Tenim, doncs, una sèrie d'operadors $\mathcal{P}^i : P \to P$ $\mathbb{F}_p$-lineals,

$$\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \dots$$

que compleixen aquestes propietats evidents:

1) $\mathcal{P}^0 = id$

2) Si $|x| = 2r$, aleshores $\mathcal{P}^r(x) = x^p$

3) $P^i(x) = 0$ si $2i > |x|$

4) $P^i(xy) = \sum_{a+b=i} P^a(x)\, P^b(y)$

5) $|P^i x| = |x| + 2i(p-1)$

Les propietats 2 i 3 s'anomenen condicions d'inestabilitat.

La propietat 4 s'anomena fórmula de Cartan.

Aquests operadors generen una àlgebra associativa (no commutativa) $\mathcal{A}$:

generadors: $1 = P^0, P^1, P^2, \dots$

relacions: $\theta \in \langle P^0, P^1, P^2, \dots \rangle$

$$\theta = 0 \iff \theta(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}.$$

Anomenarem a $\mathcal{A}$ àlgebra de Steenrod (o millor, àlgebra de les potències de Steenrod, perquè no coincideix exactament amb l'àlgebra de Steenrod de la topologia)

Un $\mathcal{A}$-mòdul inestable és un $\mathcal{A}$-mòdul (graduat) en què es compleix la condició 3.

Una $\mathcal{A}$-àlgebra inestable és una $\mathcal{A}$-àlgebra (graduada) K en la que es compleixen les propietats 2, 3, 4.

Evidentment, $\mathcal{P}$ és un $\mathcal{A}$-mòdul inestable i una $\mathcal{A}$-àlgebra inestable.

§ Algunes propietats elementals

a) Si $|x|=2$, aleshores $\mathcal{P}(x) = x + x^p$. Evident.

b) Si $|x|=2$, aleshores $\mathcal{P}(x^n) = \mathcal{P}(x+x^p)^n = \sum \binom{n}{i} x^{n-i+ip} =$

$=$ Per tant,

$$\mathcal{P}^i(x^n) = \binom{n}{i} x^{n+i(p-1)}.$$

c) $\mathcal{P}^1$ actua com una derivació

$$\mathcal{P}^1(xy) = x\,\mathcal{P}^1 y + \mathcal{P}^1 x\, y$$

En particular, $\mathcal{P}^1 x^p = 0$

d) L'acció natural de $\mathcal{A}$ sobre P és l'única estructura de $\mathcal{A}$-àlgebra inestable de P.

e) Després per tot n, $\mathbb{F}_p[t_1,\dots,t_n]$ és una subàlgebra de P tancada per les operacions. Per tant, és una $\mathcal{A}$-àlgebra inestable.

f) Si G és un grup lineal, $G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$, aleshores G actua sobre $P_n = \mathbb{F}_p[t_1,\dots,t_n]$: podem considerar la subàlgebra dels elements invariants

$$P_n^G = \{x \in P_n \mid g\cdot x = x \quad \forall g \in G\}$$

Exemple:

$G = \Sigma_n$, grup simètric actuant per permutacions. Aleshores,

$$P_n^{\Sigma_n} = \mathbb{F}_p[\sigma_1,\dots,\sigma_n] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t_1,\dots,t_n]$$

on $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ són els polinomis simètrics elementals:

$$\sigma_1 = t_1 + \dots + t_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = t_1 \cdots t_n$$

Exemple 2

Sigui $G = GL_n \mathbb{F}_p$ actuant sobre $P_n = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$. Aleshores, P_n^G és, per definició, l'àlgebra de Dickson: es demostra que és també una àlgebra de polinomis:

$$P_n^G = \mathbb{F}_p[c_1, \ldots, c_n] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$$

amb $|c_i| = 2p^n - 2p^{n-i}$

En general, P_n^G és una $\mathcal{A}$-subàlgebra de P_n. En efecte, cal veure que si $g \cdot x = x \ \forall g \Rightarrow g \cdot \mathcal{P}^i x = \mathcal{P}^i x \ \forall g, i$. La manera de veure-ho és aquesta:

1) N'hi ha prou amb veure que g i $\mathcal{P}$ commuten.
2) Però g i $\mathcal{P}$ són homomorfismes d'àlgebra. Per tant, n'hi ha prou amb veure que commuten sobre els generadors t_i.
3) Però $g \cdot \mathcal{P}^i t = \mathcal{P}^i (g \cdot t)$ és evident. //

Per tant, l'àlgebra d'invariants ens dóna un exemple de $\mathcal{A}$-àlgebra inestable.

5)
$$\mathcal{P}^n x^p = \begin{cases} 0 & n \not\equiv 0 \ (p) \\ (\mathcal{P}^{n/p} x)^p & n \equiv 0 \ (p) \end{cases}$$

Això és una conseqüència immediata de que

$$\sum \mathcal{P}^n (x^p) = \mathcal{P}(x^p) = (\mathcal{P} x)^p = \left(\sum \mathcal{P}^i x\right)^p = \sum (\mathcal{P}^i x)^p. \ /$$

6) Si $I = (i_1, \ldots, i_n)$, posem $\mathcal{P}^I = \mathcal{P}^{i_1} \cdots \mathcal{P}^{i_n}$. Aleshores, si $|x| = 2$,

$$\mathcal{P}^I x = \begin{cases} x^{p^n} & \text{si } I = (p^{n-1}, p^{n-2}, \ldots, p, 1) \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

2. Les relacions d'Adem

Sigui ξ una indeterminada: considerem la sèrie formal

$$P_\xi = \sum_\xi \xi^i P^i$$

P_ξ és un homomorfisme d'anells sobre $P = \mathbb{F}_p[t_1, t_2, \dots]$ a valors a $P[\xi]$.

$[\tau = (1-\xi)^{p-1}]$

Teorema (relacions d'Adem)

Prenem $\tau = 1+\xi+\dots+\xi^{p-1}$. Aleshores

$\boxed{\xi\tau + 1 = \tau + \xi^p}$

$$\boxed{P_{\xi\tau} P_1 = P_\tau P_{\xi^p}}$$

Demostració: Com que els dos costats de la igualtat són homomorfismes d'anells, n'hi ha prou amb veure-ho sobre t de grau 2.

Tenim:

$$P_1(t) = t + t^p$$

$$P_{\xi\tau}P_1(t) = P_{\xi\tau}(t) + (P_{\xi\tau}t)^p = t + \xi\tau t^p + t^p + \xi^p\tau^p t^{p^2}$$

$$P_\tau P_{\xi^p}(t) = P_\tau(t + \xi^p t^p) = t + \tau t^p + \xi^p t^p + \xi^p \tau^p t^{p^2}$$

que és el mateix, perquè $\xi\tau + 1 = \tau + \xi^p$. //

Volem ara traduir aquesta relació en relacions entre els P^i, $i \geq 0$.

Ho fem així:

Prenem $\zeta = \xi\tau$ per simplificar la notació.

$$P_\zeta P_1 = P_\tau P_{\xi^p}$$

Considerem a ambdós costats els termes de grau $a+b$:

$$[P_\zeta P_1]_{a+b} = \sum \zeta^{a+b-j} P^{a+b-j} P^j$$

$$[P_\tau P_{\xi^p}]_{a+b} = \sum \tau^{a+b-s} \xi^{ps} P^{a+b-s} P^s$$

Exemple:

Posem $\zeta = \xi\tau$. Tenim

$$(1+\zeta\sigma^1+\zeta^2\sigma^2+\dots)(1+\sigma^1+\sigma^2+\dots) = (1+\tau\sigma^1+\dots)(1+\xi^p\sigma^1+\dots)$$

multipliquem:

$$1 + (1+\zeta)\sigma^1 + \left[(1+\zeta^2)\sigma^2 + \zeta\sigma^1\sigma^1\right] + \dots =$$

$$1 + (\xi^p + \tau)\sigma^1 + \left[(\xi^{2p}+\tau^2)\sigma^2 + \tau\xi^p\sigma^1\sigma^1\right] + \dots$$

$1+\zeta = \xi^p + \tau$ evident. $\qquad \zeta = \xi(1-\xi)^{p-1}$

Ara: termes de grau 2: expressem-los en funció de ξ:

$$\sigma^2 + \xi^2(1-\xi)^{2(p-1)}\sigma^2 + \xi(1-\xi)^{p-1}\sigma^1\sigma^1 =$$

$$\xi^{2p}\sigma^2 + (1-\xi)^{2(p-1)}\sigma^2 + \xi^p(1-\xi)^{p-1}\sigma^1\sigma^1$$

i mirem el coeficient de ξ^p:

$$\sigma^1\sigma^1 = 2\sigma^2$$

La resta ja no ens dóna cap més informació.

P^aP^b és el coeficient de ζ^a a la primera sèrie. Calculem ara el coeficient de ζ^a a la segona sèrie. Utilitzem una única dada d'anàlisi:

Si $f = \sum c_i \zeta^i$ és una sèrie de potències, aleshores

$$c_a = \operatorname*{Res}_{\zeta=0} \frac{f}{\zeta^{a+1}}\, d\zeta$$

Tenim $\zeta = \xi(1-\xi)^{p-1}$, $\tau = (1-\xi)^{p-1}$. Aleshores:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = (1-\xi)^{p-1} - \xi(p-1)(1-\xi)^{p-2} = (1-\xi)^{p-2} \qquad (\text{mòdul } p\,!)$$

Per tant,

$$c_a = \operatorname*{Res}_{\xi=0} f\, \frac{(1-\xi)^{p-2}}{\zeta^{a+1}}\, d\xi = \operatorname*{Res}_{\xi=0} f\, \frac{(1-\xi)^{p-2}}{\xi^{a+1}\tau^{a+1}}\, d\xi =$$

$$= \operatorname*{Res}_{\xi=0} \sum \tau^{a+b-s}\xi^{ps}(1-\xi)^{p-2}\tau^{-a-1}P^{a+b-s}P^s \frac{d\xi}{\xi^{a+1}} =$$

$$= \operatorname*{Res}_{\xi=0} \sum (1-\xi)^{(p-1)(b-s)-1}\xi^{ps}P^{a+b-s}P^s \frac{d\xi}{\xi^{a+1}} =$$

$=$ coef. de ξ^a a la sèrie $\sum (1-\xi)^{(p-1)(b-s)-1}\xi^{ps}P^{a+b-s}P^s$

$$* \quad = \sum_s (-1)^{a-ps}\binom{(p-1)(b-s)-1}{a-ps}P^{a+b-s}P^s$$

S'obtenim així la relació d'Adem en la seva forma tradicional:

$$P^aP^b = \sum_{i\geq 0}^{[a/p]} (-1)^{a-pi}\binom{(p-1)(b-i)-1}{a-pi}P^{a+b-i}P^i$$

Els coeficients s'entenen mòdul p i, a més, $ip \leq a$, $i<b$, $a<pb$

*

Exemple $\qquad P^a P^1 = \rho P^{a+1} \quad \rho \neq 0$

si $a < p-1$ aleshores ~~...~~. En particular,

$$\underbrace{P^1 \cdots P^1}_{p-1} = \lambda P^{p-1} \qquad \lambda \neq 0$$

$$\boxed{\text{si } 0 \leq a < p \text{, aleshores } P^a P^b = \binom{a+b}{a} P^{a+b}}$$

Però: $\qquad \underbrace{P^1 \cdots P^1}_{p} = 0$

Una conseqüència important de la relacions d'Adem és:

Teorema $\quad P^1, P^p, P^{p^2}, \dots$ generen $\mathcal{A}$ com a àlgebra.

Demo: Considerem les relacions d'Adem

$$P^a P^b = (-1)^a \binom{(p-1)b-1}{a} P^{a+b} + \cdots$$

Veiem que si $\binom{(p-1)b-1}{a} \not\equiv 0 \ (p)$, aleshores P^{a+b} és descomponible,

si $a < pb$.

Suposem que k no és una potència de p. Sigui

$$k = k_0 + p k_1 + \cdots + p^m k_m$$

l'expressió en base p de k, amb $k_m \neq 0$. Prenem $b = p^m$, $a = k-b$.

Aleshores,

$$(p-1)b - 1 = (p-1)(1 + p + \cdots + p^{m-1}) + (p-2)p^m$$

és l'expressió en base p. D'altra banda,

$$a = k - b = k_0 + p k_1 + \cdots + p^{m-1} k_{m-1} + p^m (k_m - 1)$$

és l'expressió en base p.

Pel lema, tenim

$$\binom{(p-1)b-1}{a} = \binom{p-1}{k_0}\binom{p-1}{k_1}\cdots\binom{p-1}{k_{m-1}}\binom{p-2}{k_m-1} \not\equiv 0$$

Sigui $\mathcal{A}'$ la subàlgebra de $\mathcal{A}$ generada per $\langle P^{p^i} \mid i \geq 0 \rangle$. Sigui

si $P^k \notin \mathcal{A}'$ i k és mínim, arribem a contradicció. //

àlgebres que no admeten estructura de A-àlgebra inestable

Donada una àlgebra H, en general és difícil determinar si admet o no una estructura de A-àlgebra inestable.

Proposició: $H = \mathbb{F}_p[x]/x^{p+1}$ $|x| = 2n$ admet una estr. de A-àlg. inestable $\iff n = p^i r$ amb $i \geq 0$, $r \mid p-1$.

Demo: Si H és A-àlgebra inestable, aleshores $P^n x = x^p \neq 0$. Per tant, s'ha d'haver un generador P^{p^i} que actuï no trivialment sobre x:

$$P^{p^i} x = x^s \qquad s \leq p$$

$$\Rightarrow \quad n + p^i(p-1) = ns \quad \Rightarrow \quad p^i(p-1) = n(s-1) \quad \Rightarrow \quad n = p^i \frac{p-1}{s-1} \quad \#$$

Recíprocament, considerem $\mathbb{F}_p[t]$ $|t| = 2$: considerem $x = t^{p^i r}$

$$H = \mathbb{F}_p[x] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t]$$

és una A-subàlgebra. En efecte, si $p-1 = rs$,

si $i = 0$,

$$P^a x^b = P^a t^{rb} = \binom{rb}{a} t^{rb + a(p-1)} = \binom{rb}{a} x^{b+s}$$

si $i > 0$

$$P^a x^b = P^a t^{p^i r b} = \begin{cases} 0 & a \not\equiv 0 \; p^i \\ (P^{a/p^i} t^{rb})^{p^i} = (\lambda t^{rk})^{p^i} = \lambda x^k \end{cases} \quad //$$

3. La base dels monomis admissibles

Considerem monomis a $\mathcal{A}$ del tipus

$$P^I = P^{s_1,\dots,s_k} := P^{s_1} P^{s_2} \cdots P^{s_k}$$

Un d'aquests monomis P^I diem que és admissible si

$$s_i \geq p\, s_{i+1} \quad \forall i$$

és a dir, no podem aplicar directament les relacions d'Adem.

Definim el moment de P^I com $\sum_i i\, s_i$

Teorema. Els monomis admissibles formen una base de $\mathcal{A}$ com a espai vectorial.

Dem: És clar que els P^I amb I arbitrari generen $\mathcal{A}$ com a espai vectorial. Demostrarem per inducció sobre el moment de P^I que tot P^I és combinació lineal de monomis admissibles.

Si P^I no és admissible, existirà i amb $s_i < p s_{i+1}$. Podem aplicar les relacions d'Adem i expressar $P^I = \sum P^{I_n}$. Fixem-nos ara en que les relacions d'Adem redueixen el moment.

El pas important de la demostració és veure que els monomis admissibles són linealment independents.

Considerem l'acció de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{F}_p[t_1, t_2, \dots]$ i prenem

$$u_n = t_1 \cdots t_n$$

Lema. Si I varia a les successions admissibles de grau $\leq n$, aleshores els elements $P^I u_n \in I$ són linealment independents.

Dem: Sigui $I_r = (p^{r-1}, p^{r-2}, \dots, p, 1)$. Tenim

$$(\text{lema}) \qquad P^I t_i = \begin{cases} t_i^{p^r} & I = I_r \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Demostrarem aquest lema per inducció sobre n. Suposem

$$\sum a_I P^I u_n = 0$$

variant I a les successions admissibles de grau $q \leq n$, q fixat. Volem veure que $a_I = 0 \ \forall I$. Ho demostrarem per inducció inversa sobre la longitud de I, $l(I)$.

És clar que si $l(I)$ és gran, aleshores $a_I = 0$. Suposem $a_I = 0$ si $l(I) > m$.

Tenim:

$$P^I u_n = P^I t_1 u_{n-1} = \sum_{K+L=I} P^K t_1 P^L u_{n-1} =$$

$$= \sum_i t_1^{p^i} P^{I-\Delta_i} u_{n-1} \in \mathbb{F}_p[t_1, \dots, t_n]$$

El coeficient de $t_1^{p^m}$ d'aquest polinomi és

$$\begin{cases} P^{I-\Delta_m} u_{n-1} & l(I) = m \\ 0 & l(I) < m \end{cases}$$

Per tant, com que $\sum a_I P^I u_n = 0$, tenim

$$\sum_{l(I)=m} a_I P^{I-\Delta_m} u_{n-1} = 0$$

Com que I és admissible, $I - \Delta_m$ també ho és. Per inducció (sobre n) tenim $a_I = 0$ si $l(I) = m$. Per inducció (sobre m), tenim $a_I = 0$ //

Tenim ja demostrat el teorema.

Aquest teorema em permet donar una fonamentació completa de l'estructura de $\mathcal{A}$:

Teorema $\mathcal{A}$ és l'àlgebra generada per les potències de Steenrod P^i $i>0$ subjectes a les relacions d'Adem.

És a dir, les relacions d'Adem generen totes les relacions de $\mathcal{A}$.

Lema: Sigui $\tilde{\mathcal{A}} = \langle P^i \ i>0 \mid \text{Adem} \rangle$. Tenim un epimorfisme $\pi : \bar{\mathcal{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. Volem veure que π és isomorfisme. Fem aquesta observació: la demostració que els monomis admissibles generen $\mathcal{A}$ només utilitza les ~~opp~~ relacions d'Adem. Per tant, els monomis admissibles també generen $\bar{\mathcal{A}}$. Però els monomis admissibles són una base de $\mathcal{A}$. Per tant, π és injectiva. //

Observem que l'estructura algebraica de $\mathcal{A}$ és molt complicada.

<u>Corol·lari</u> $e : \mathcal{A} \to P_n$ $\quad e(\theta) = \theta(u_n)$, és injectiva en graus $\leq n$.

4. $\mathcal{A}$ és una àlgebra de Hopf

amb $A^0 = \mathbb{F}_p$

Si A és una àlgebra (associativa, amb unitat, graduada, augmentada, sobre $\mathbb{F}_p$), una diagonal a A és

$$\psi : A \longrightarrow A \otimes A$$

que sigui homomorfisme d'àlgebres.

Una àlgebra de Hopf és una àlgebra A amb diagonal ψ, tal que

$$\psi(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a_i \otimes b_i \qquad |a_i|, |b_i| > 0$$

És a dir, una àlgebra de Hopf té una multiplicació i una comultiplicació:

$$A \xrightarrow{\psi} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

També exigim que ψ sigui co-associativa:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \otimes A \arrow[d, "1 \otimes \psi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\psi \otimes 1"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

El punt interessant és que si A és una àlgebra de Hopf, l'espai vectorial dual A^* és també una àlgebra de Hopf. La multiplicació de A es converteix en la diagonal de A^*; la diagonal de A és la multiplicació de A^*.

Exemple: $A = \mathbb{F}_p[t]$ $\quad |t| = n$. Definim

$$\psi(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$$

i s'estén a un morfisme d'àlgebres.

Exemple: $A = \Gamma(t)$, $|t| = n$, àlgebra amb potències dividides.

Per definició,

$$A := \langle \gamma_0(t), \gamma_1(t), \ldots, \gamma_i(t), \ldots \rangle$$

com a $\mathbb{F}_p$-espai vectorial, amb el producte donat per

$$\gamma_i \cdot \gamma_j = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}$$

i la multiplicació donada per $|\gamma_i| = in$. Dotem $\Gamma(t)$ d'estructura d'àlgebra de Hopf així:

$$\psi(\gamma_i) = \sum_{a+b=i} \gamma_a \otimes \gamma_b$$

Cal comprovar que és homomorfisme d'àlgebres! Cal usar
$$\binom{r+s}{a} = \sum_{i+j=a} \binom{r}{i}\binom{s}{j}$$

<u>Observació</u> $\Gamma(t)$ és el dual de $\mathbb{F}_p[t]$.

En efecte, prenem $\{t^i\}_{i\geq 0}$ com a base de $A = \mathbb{F}_p[t]$. Tenim

$$\psi(t^i) = (t\otimes 1 + 1 \otimes t)^i = \sum_{a+b=i} \binom{a+b}{a} t^a \otimes t^b$$

Sigui $\{u_i\}$ la base dual, que és base de A^*. La multiplicació a A^* serà:

$$u_i\, u_j = \binom{i+j}{i} u_{i+j}$$

i la diagonal de A^* serà

$$\psi(u_i) = \sum_{a+b=i} u_a \otimes u_b$$

És a dir, $A^* = \Gamma(t)$. //

Si A és una àlgebra de Hopf, A admet una <u>conjugació</u>

$$c: A \longrightarrow A$$

que compleix:

a) $c(1) = 1$

b) $c(xy) = c(y)\, c(x)$

c) $\psi(x) = \sum x_i' \otimes x_i'' \implies \sum x_i'\, c(x_i'') = 0$

d) $c^2 = Id$

Observem que c) ens dóna existència i unicitat, per inducció sobre el grau. Comprovar b i d és un exercici.

Exemple: $A = \mathbb{F}_p[t]$

$$\psi(t) = t\otimes 1 + 1\otimes t \Rightarrow t + c(t) = 0 \Rightarrow c(t) = -t.$$

Exemple: $A = \Gamma(t)$

$c(\gamma_i)$ es pot calcular inductivament:

$$c(1) = 1$$

$$\psi(\gamma_1) = \gamma_1\otimes 1 + 1\otimes\gamma_1 \Rightarrow c(\gamma_1) = -\gamma_1$$

$$\psi(\gamma_2) = \gamma_2\otimes 1 + \gamma_1\otimes\gamma_1 + 1\otimes\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 - \gamma_1^2 + c(\gamma_2) = 0$$

$$\Rightarrow c(\gamma_2) = -\gamma_2 + \gamma_1^2$$

etc.

Teorema: La diagonal

$$\psi(\theta^i) = \sum_{a+b=i} \theta^a \otimes \theta^b$$

dota $\mathcal{A}$ d'estructura d'àlgebra de Hopf co-commutativa

~~Demo: L'única cosa que cal veure és que ψ s'estén a un homomorfisme d'àlgebres, és a dir, que està ben definit.~~

Demo: Comencem observant la l'existència de la fórmula de Cartan generalitzada:

Donat $\theta\in\mathcal{A}$, existeixen $\{(\theta'_i, \theta''_i)\}_i$ tals que, per tota $\mathcal{A}$-àlgebra instable H: tot $x, y \in H$, es compleix

$$\theta(xy) = \sum_i \theta'_i(x)\, \theta''_i(y)$$

En efecte, el conjunt d'elements $\theta\in\mathcal{A}$ que tenen aquesta propietat és tancat per sumes i productes i conté els generadors θ^i.

Ara demostrarem que aquesta família $\{(\theta'_i, \theta''_i)\}$ és única. Suposem que tinguem un θ amb dues "famílies de Cartan"

$$\{(\theta'_i, \theta''_i)\}_i \qquad \{(\rho'_j, \rho''_j)\}_j$$

Prenem $H = \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n]$ $|t_i| = |s_i| = 2$. i $n >> 0$

considerem $\theta(t_1 \ldots t_n s_1 \ldots s_n)$. És complex:

$$\theta(t_1 \ldots t_n s_1 \ldots s_n) = \sum \theta'_i(t_1 \ldots t_n)\, \theta''_i(s_1 \ldots s_n)$$

$$\theta(t_1 \ldots t_n s_1 \ldots s_n) = \sum \rho'_j(t_1 \ldots t_n)\, \rho''_j(s_1 \ldots s_n)$$

Tenim $e_1: \mathcal{A} \to \mathbb{F}_p[t_1 \ldots t_n]$, $e_2: \mathcal{A} \to \mathbb{F}_p[s_1 \ldots s_n]$ injectives en grau $\leq n$

Per tant, $e_1 \otimes e_2: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathbb{F}_p[t_1 \ldots t_n, s_1 \ldots s_n]$ és injectiva en grau $\leq n$. Per tant, les dues famílies de coeficients coincideixen.

Definim ara $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ via $\theta \mapsto \sum \theta'_i \otimes \theta''_i$. És ben definit. Cal veure que és homomorfisme d'àlgebra. Això és conseqüència de la unicitat: si $\{(\theta'_i, \theta''_i)\}$ és una família de coeficients per a θ i $\{(\rho'_j, \rho''_j)\}$ és una família de coeficients per a ρ, aleshores és clar que $\{(\theta'_i \rho'_j, \theta''_i \rho''_j)\}$ és una família de coeficients per a $\theta\rho$. Per la unicitat, $\psi(\theta\rho) = \psi(\theta)\psi(\rho)$. //

<u>Observació:</u> $\mathcal{A}$ és una àlgebra de Hopf amb producte molt complicat i diagonal molt senzilla. $\mathcal{A}^*$ serà tindrà una diagonal complicada i un producte senzill:

<u>Teorema</u> $\mathcal{A}^* = \mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ $|\xi_i| = 2(p^i - 1)$

i la diagonal és

$$\psi^* \xi_r = \sum_{i+j=r} \xi_i^{p^j} \otimes \xi_j$$

<u>Dem:</u> no ho demostro. Dic només qui és ξ_k:

ξ_k = dual de $\mathcal{P}^{p^{k-1}} \mathcal{P}^{p^{k-2}} \cdots \mathcal{P}^1$ en la base dels monomis admissibles

Els primitius de Milnor.

Un element θ d'una àlgebra de Hopf es diu que és primitiu si

$$\psi\, \theta = \theta \otimes 1 + 1 \otimes \theta$$

Quins són els elements primitius de $\mathcal{A}$?

$\theta \in A$ és primitiu $\iff$ $\theta(xy) = \theta(x)\, y + x\, \theta(y)$ és a dir, si i només si θ actua sempre com una derivació. Per exemple, Sq^1 és primitiu.

Definim, inductivament:

$$Q^1 = Sq^1$$
$$Q^{i+1} = [Sq^{2^i}, Q^i]$$

Teorema Els elements $\{Q^i\}$ són una base dels primitius de $\mathcal{A}$.

No es donarà una demostració d'això: per això caldria una descripció completa de l'àlgebra dual, base de Milnor, etc.

5. El cas $p=2$

Si $p=2$, les coses tot igual, excepte que prenem

$$P = \mathbb{F}_2[t_1, t_2, \dots\ ]$$

amb $|t_i| = 1$.

Aleshores, l'àlgebra de Steenrod (ara sí que és l'autèntica àlgebra de Steenrod) té generadors

$$Sq^i, \; i \geq 0 \qquad |Sq^i x| = |x| + i$$

Les relacions d'inestabilitat són

$$Sq^i x = x^2 \quad \text{si} \quad |x| = i$$

$$Sq^i x = 0 \quad \text{si} \quad |x| < i$$

Les relacions d'Adem s'escriuen

$$Sq^a Sq^b = \sum_{i=0}^{[a/2]} \binom{b-1-i}{a-2i} Sq^{a+b-i} Sq^i$$

si $0 < a < 2b$

La base dels monomis admissibles funciona igual, l'estructura d'àlgebra de Hopf també, etc.

5. L'àlgebra de cohomologia d'un espai

L'àlgebra de Steenrod és una de les eines en el camp de la Topologia, degut:

<u>Teorema</u> $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ és una $\mathcal{A}$-àlgebra inestable.

Per entendre la demostració necessitarem un cert nivell de coneixements de topologia algebraica. Aquí ens aniria millor considerar $p=2$.

1) EG i BG

Suposarem que G és un grup finit. Es designa per EG un espai topològic contràctil sobre el qual G actua de manera lliure.

<u>Exemple</u>: $G=\mathbb{Z}/2$. EG podria ser S^∞ amb l'acció antipodal.

Aquest espai EG sempre existeix. De fet, hi ha una construcció functorial que associa a cada grup G un espai EG.

Definim <u>l'espai classificador de G</u> com

$$BG := EG/G$$

Aquesta construcció és functorial i ens dóna un functor de la categoria de grups finits a la categoria d'espais topològics.

<u>Exemple</u>: $B\mathbb{Z}/2 = E\mathbb{Z}/2 \big/ \mathbb{Z}/2 = S^\infty \big/ \mathbb{Z}/2 = \mathbb{R}P^\infty$.

2) Cohomologia equivariant

Sigui X un espai amb una acció d'un grup finit G. Aleshores, G actua sobre les cadenes singulars S_*X i podem considerar <u>cocadenes equivariants</u>

$$S^*_G(X;R) = \mathrm{Hom}_G(S_*X, R)$$

aquestes cocadenes equivariants formen un <u>complex</u> de cocadenes llei, si l'acció de G sobre X no és lliure, aquesta cadenes no tenen bona propietat. La bona definició de cohomologia equivariant és aquesta:

$$H^*_G(X) = H^*(X \times_G EG)$$

(notació: $X \times_G EG = X \times EG/G$, observem que l'acció de G sobre $X \times EG$ és lliure.) amb acció diagonal

Propietats

a) Si l'acció de G sobre X és trivial, aleshores

$$X \times_G EG = X \times EG/G = X \times BG$$

i aleshores, si prenem coeficients en un cos,

$$H^*_G(X) = H^*(X) \otimes H^*(BG)$$

b) Si l'acció de G sobre X és lliure, aleshores $X \times_G EG \to X/G$ és una equivalència homotòpica (la fibra és EG) i tenim

$$H^*_G(X) = H^*(X/G)$$

~~c) Sigui u una cadena equivariant sobre X~~

$$\cancel{S_*(X \times EG) \to S_* X \xrightarrow{u} k}$$

~~tenim una cadena equivariant sobre X × EG. Aquí l'acció és lliure.~~

c) Si l'acció sobre X és lliure, aleshores, coincideixen les tres coses:

$$H(S^*_G(X)) \cong H^*_G(X) \cong H^*(X/G)$$

(perquè $X \to X/G$ és un espai recobridor i bla bla...)

d) Sigui u una cadena equivariant sobre X

$$S_*(X \times EG) \to S_* X \xrightarrow{u} k$$

obtenim una cadena equivariant sobre $X \times EG$. Com que aquí l'acció és lliure, tenim una cadena sobre $X \times_G EG$.

3) La idea

D'on surten les operacions de Steenrod? La idea bàsica és simple. Pensem en com es defineix x^2 a H^*X:

$$H^*X \longrightarrow H^*(X\times X) \xrightarrow{d^*} H^*X$$

$$x \longmapsto x\otimes x \longmapsto x^2$$

Però: $x\otimes x$ és una cocadena equivariant respecte de l'acció de $\mathbb{Z}/2$ via permutació dels factors. Per tant, $x\otimes x$ la podem pensar a $H^*_{\mathbb{Z}/2}(X\times X)$. Si ara apliquem $d: X\to X\times X$ que és equivariant, tenim $d^*(x\otimes x)\in H^*_{\mathbb{Z}/2}(X)$. Com que l'acció sobre X és trivial,

$H^*_{\mathbb{Z}/2}(X) = H^*(X)\otimes H^*(B\mathbb{Z}/2) = H^*(X)\otimes \mathbb{F}_2[t]$ $\quad |t|=1$. Per tant,

$$d^*(x\otimes x) = \sum c_i t^i \qquad c_i\in H^*X$$

Aquests c_i són els $Sq^i(x)$!

4) Més detalls

En general, sigui $n\geq 1$ i sigui π un subgrup de Σ_n. Σ_n actua sobre X^n. Si $u\in S^*(X)$ és una cocadena sobre X (coeficients sempre a $\mathbb{F}_2$), podem considerar $u\otimes \overset{n}{\cdots}\otimes u$ que és una cocadena sobre X^n. Aquesta cocadena és clarament Σ_n-equivariant i també π-equivariant.

$$u\otimes\cdots\otimes u \in S^*_\pi(X^n) \longrightarrow S^*_\pi(X^n\times E\Sigma_n)$$

Considerem ara la diagonal $d: X\to X^n$ que és equivariant (acció trivial sobre X). Per tant, indueix

$$(d\times 1)^* \ \cancel{d^*}: S^*_\pi(X^n\times E\Sigma_n) \longrightarrow S^*_\pi(X\times E\Sigma_n)$$

Componint, tenim

$$\phi: S^*X \longrightarrow S^*_\pi(X\times E\Sigma_n)$$

Propietats de ϕ

1) ϕ, en general, no és homomorfisme

2) $\phi : S^k(X) \longrightarrow S^{nk}_{\pi}(X)$

3) Si eliminem el subíndex π, ϕ és, per definició, la potència n-èsima.

4) ϕ passa a cohomologia:

ja que l'acció de π sobre $X_x \in \Sigma_n$ ja és lliure!

$$S(n,\pi) : H^i(X) \longrightarrow H^{ni}_{\pi}(X)$$

$S(n,\pi)$ tampoc no és, en general, un homomorfisme.

5) $S(n,\pi)$ és natural respecte d'aplicacions $f : X \to Y$

6) $S(n,\pi)$ és natural respecte de π. És a dir, si $\pi \subset \pi' \subset \Sigma_n$, tenim

$$\begin{tikzcd} & H^*_{\pi'}(X) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ H^*X \arrow[ur, "S(n,\pi')"] \arrow[r, "S(n,\pi)"'] & H^*_{\pi}(X) \end{tikzcd}$$

7) $S(n,\pi)$ es comporta bé respecte del producte cartesià de grups.

Suposem que tenim $\pi \subset \Sigma_n$, $\rho \subset \Sigma_m$ i prenem la inclusió natural $\pi \times \rho \subset \Sigma_n \times \Sigma_m$. Aleshores, podem considerar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & H^*(X \times B\pi \times B\rho) = H^*_{\rho}(X \times B\pi) \\ H^*X \arrow[ur, "S(nm,\pi\times\rho)"] \arrow[r, "S(n,\pi)"'] & H^*_{\pi}(X) = H^*(X \times B\pi) \arrow[u, "S(m,\rho)"'] \end{tikzcd}$$

Aquest diagrama és commutatiu. La comprovació és immediata. S conté dues parts: d^* prové d'una aplicació topològica i per tant no dóna problemes i a més per $u \mapsto u \otimes \cdots \otimes u$ tampoc dóna problemes.

5) Els quadrats de Steenrod

Considerem $n=2$, $\Sigma_n = \mathbb{Z}/2 = \pi$. Tenim $S := S(2, \mathbb{Z}/_2)$,

$$S : H^*(X) \longrightarrow H^*_{\mathbb{Z}/2}(X)$$

Lema S és un homomorfisme.

Demo: utilitza el Transfer i no la fem (és elemental.)

Aleshores,

$$H^*_{\mathbb{Z}/2}(X) = H^*(X) \otimes H^* B\mathbb{Z}/_2 = H^*(X) \otimes \mathbb{F}_2[t]$$

Definició: $Sq^k(x)$ = coeficient de $t^{|x|-k}$ a $S(x)$

És a dir, estem dient que

$$S(x) = \sum_{k=-|x|}^{|x|} t^{|x|-k} \, Sq^k(x)$$

Cal ara anar comprovant les propietats dels Sq^k.

A. Inestabilitat

B. Fórmula de Cartan

C. $Sq^0 = id$

D. Relacions d'Adem

A. Inestabilitat

Per definició, $Sq^k(x) = 0$ si $k > |x|$.

Si $k = |x|$, $Sq^k x$ és el terme independent (sense t) de $S(x)$. És clar, per definició del producte a H^*X, que aquest terme independent és x^2.

Cal demostrar que $Sq^k = 0$ si $k < 0$, però això no es desprèn pas de la definició. Cal un argument topològic.

Donat $x \in H^i(X)$, existeix

$$f : X^{(i)} \longrightarrow S^i$$

on $X^{(i)}$ = esquelet i-èssim, tal que $f^*(\iota) = j^*(x)$, $j : X^{(i)} \hookrightarrow X$. (això seria un lema). Si $k<0$, $Sq^k(\iota) = 0$. Per naturalitat, $Sq^k j^* x = 0$ i $Sq^k x = 0$. //

B. Fórmula de Cartan

Per la manera com hem definit Sq^k, és evident que la fórmula de Cartan és equivalent a que S sigui multiplicativa:

$$S(xy) = S(x)\, S(y)$$

Això és complicat, però no difícil, a partir de la definició de S.

C. $Sq^0 = id$

Curiosament (o no!) aquest és el punt més difícil. Els passos a seguir són aquests:

a) Calculem $Sq^0 u$ on u és el generador de $H^1(S^1)$. Això es fa a mà, directament amb la definició.

b) La fórmula de Cartan i $Sq^0 = id$ sobre $H^1(S^1)$ impliquen que Sq^i commuta amb la suspensió

$$\sigma : H^i(X) \longrightarrow H^{i+1}(\Sigma X)$$

c) Si $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/_2, n))$ és la classe fonamental, aleshores

$$Sq^0 \iota_n = \delta_n \iota_n \qquad \delta_n = 0,1$$

d) El fet que Sq^0 commuti amb la suspensió implica $\delta_n = \delta_m$ $\forall n, m$. Per tant, $Sq^0 \iota_n = 0$ $\forall n$ o $Sq^0 \iota_n = \iota_n$ $\forall n$. Però $Sq^0 \iota_n = 0$ implica $Sq^0 = 0$. Però a l'apartat a) hem vist que $Sq^0 \neq 0$.

D. Les relacions d'Adem

$$\begin{tikzcd}
H^*X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "{S(4,\Sigma_4)}"'] \arrow[rrd, "{S(4,\Sigma_2\times\Sigma_2)}"] & H^*(X\times B\Sigma_2) \arrow[r, "S"] & H^*(X\times B\Sigma_2\times B\Sigma_2) \arrow[d, equal] \\
H^*(X\times B\Sigma_4) \arrow[rr, "\mathrm{Res}"'] & & H^*_{\Sigma_2\times\Sigma_2}(X)
\end{tikzcd}$$

És a dir, $S^2 : H^*X \longrightarrow H^*(X\times B\Sigma_2\times B\Sigma_2) = H^*X \otimes \mathbb{F}_2[t,s]$ és la restricció d'una $S(4,\Sigma_4) : H^*X \longrightarrow H^*(X\times B\Sigma_4)$.

Σ_4 té un automorfisme intern que commuta els dos Σ_2 de $\Sigma_2\times\Sigma_2 < \Sigma_4$. Com que la conjugació no afecta a cohomologia, tenim que S^2 és invariant per

$$T : X\times B\Sigma_2\times B\Sigma_2 \circlearrowleft$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,z,y)$$

Per tant, $S^2(x) = \sum x_{ij}\, t^i s^j$ ha de ser un polinomi simètric en t,s.

Fem els detalls; si $n=|x|$:

$$S(x) = \sum t^{n-k}\, Sq^k(x)$$

Com que t té grau 1, per estabilitat tenim

$$S(t) = st + t^2$$

Aleshores:

$$S^2(x) = S\left(\sum t^{n-k} Sq^k(x)\right) =$$
$$= \sum S(t)^{n-k}\, S(Sq^k x) = \sum (st+t^2)^{n-k}\, s^{n+k-m}\, Sq^m Sq^k(x)$$

no repeteixo. Imposant que això sigui simètric en s,t, s'obtenen les conegudes relacions d'Adem estimades.