Curs de topologia de varietats

Jaume Aguadé
UAB

L'autor és Jaume Aguadé Bover
Jaume.Aguade@uab.cat

Aquests apunts es poden descarregar aquí:
http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html

Topologia de Varietats

Curs 2009–2010

Programa

1 **El concepte de varietat diferenciable**

(a) Espais topològics i varietats topològiques.
(b) Estructures diferenciables i varietats diferenciables.
(c) Vectors tangents.
(d) El fibrat tangent i la diferencial.
(e) Formes diferencials i fibrat cotangent.

2 **El complex de de Rham**

(a) L'àlgebra tensorial i l'àlgebra exterior.
(b) Camps tensorials i r-formes diferencials.
(c) La diferencial exterior.
(d) Cohomologia de de Rham.
(e) El lema de Poincaré

3 **Complexos, homologia i cohomologia**

(a) Complexos de cadenes.
(b) Homotopia i successió exacta llarga d'homologia.
(c) El complex singular i l'homologia singular.
(d) Les dues propietats fonamentals de l'homologia.

4 **El teorema de de Rham**

(a) Orientació.
(b) Integració.
(c) Relació entre el complex singular i el complex de de Rham.
(d) Demostració del teorema de de Rham.

5 **El teorema de dualitat de Poincaré**

(a) Enunciat del teorema de dualitat.
(b) Suports compactes.
(c) Demostració del teorema de dualitat.

6 **El grup fonamental**

(a) Llaços en un espai.
(b) El grup fonamental de la circumferència.
(c) El grup fonamental de X/G.
(d) El grup fonamental de l'esfera.
(e) Grup fonamental i orientació
(f) Grup fonamental i primer grup d'homologia.

Bibliografia recomanada

- **F.W. Warner**, *Foundations of differenciable manifolds and Lie groups.*
- **W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone**, *Connections, curvature and cohomology.*
- **J.W. Milnor, J.D. Stasheff**, *Characteristic classes.*
- **J.W. Vick**, *Homology theory.*
- **C. Kosniowski**, *A first course in algebraic topology.*
- **M. Greenberg, J.R. Harper**, *Algebraic topology: A first course.*

1. El concepte de varietat diferenciable

1. Espais topològics i varietats topològiques

Tots els espais topològics que utilitzarem seran Hausdorff i compliran el 2on axioma de numerabilitat (existència d'una base numerable d'oberts)

Exemples:

$\mathbb{R}^n$

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

$\mathbb{R}P^n = \dfrac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{x \sim \lambda x,\ \lambda \neq 0} = S^n /_{x \sim -x}$

Una varietat topològica de dimensió d és un espai topològic X tal que tot $x \in X$ té un entorn homeomorf a un obert de $\mathbb{R}^d$.

$$x \in U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{R}^d \qquad V \text{ obert}$$

Direm que (U, φ) és una carta local de X o també un sistema de coordenades locals a $x \in X$. φ tindrà d components $x_1, \dots, x_d$ i $x_1(x), \dots, x_d(x)$ seran les coordenades de x en la carta local (U, φ).

Exemples

a) $\mathbb{R}^n$ és una varietat topològica de dimensió d

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ és un obert, U és també una varietat topològica de dim d.

En els dos casos, podem prendre una única carta local $(\mathbb{R}^n, id)$ o (U, id).

b) S^n

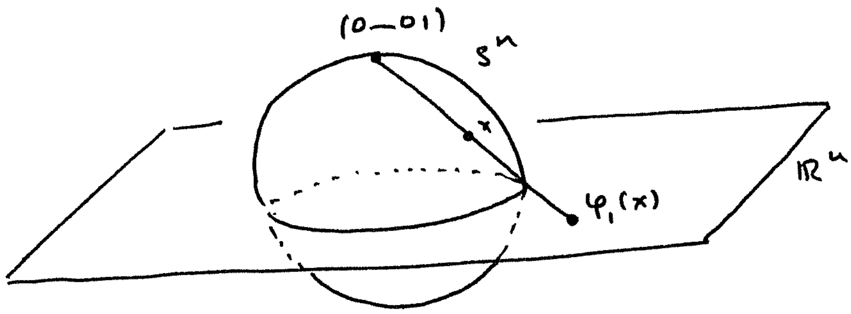
Hi ha moltes maneres de prendre cartes locals a S^n. De fet, parlant atlas és un sistema de cartes locals per a la terra (que és S^2).

El nombre mínim de cartes locals és 2 i es poden prendre així:

$$U_1 = S^n - \{(0,\dots,0,1)\}$$

$$U_{-1} = S^n - \{(0,\dots,0,-1)\}$$

Ara hem de definir $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : U_{-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ho fem per "projecció estereogràfica"



Si fem els càlculs de geometria analítica pertinents, veiem que φ_1 és contínua i, de fet, és un homeomorfisme. φ_2 es defineix igual, prenent com a punt origen el pol sud.

c) $$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - 0}{x \sim \lambda x,\ \lambda \neq 0}$$

Els punts de $\mathbb{R}P^n$ són classes d'equivalència

$$x = [x_0, \dots, x_n]$$

tals que

a) $x_0, \dots, x_n$ no són tots $= 0$

b) $[x_0, \dots, x_n] = [x'_0, \dots, x'_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ tal que $x'_i = \lambda x_i$.

Definim

$$U_i = \{ [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0 \} \qquad i = 0, \dots, n$$

És clar que $\mathbb{R}P^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$. Cada U_i és una carta local

via
$$U_i \xrightarrow{\ \varphi_i\ } \mathbb{R}^n$$
$$[x_0,\dots,x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

d) Si M_1 i M_2 són varietats topològiques, aleshores $M_1 \times M_2$ també ho és, de manera trivial. A més, $\dim (M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$.

e) Si M és una varietat topològica i $U \subset M$ és un obert, és evident que U també és una varietat topològica.

f) Si X és un espai i G és un grup que actua sobre X, podem considerar l'espai quocient
$$X \xrightarrow{\ \pi\ } X/G = X/_{x \sim gx,\ g \in G}$$

En general, l'espai X/G podria tenir propietats molt dolentes. Per exemple, podria no ser ni Hausdorff. X/G és prou bo si l'acció és pròpiament discontínua:

Tot $x \in X$ té un entorn obert U tal que, si $g, g' \in G$: $g \cdot U \cap g' U \neq \emptyset \Rightarrow g = g'$

Proposició: Si X és una varietat topològica i G actua sobre X de manera pròpiament discontínua, aleshores X/G és també una varietat topològica.

Demo: Sigui $[x] \in X/G$ i x un representant. Sigui U un entorn de x com el de la definició d'acció pròpiament discontínua i sigui (V, φ) una carta local a x. Sigui $W = U \cap V$. Aleshores
$$\pi_{|W} : W \longrightarrow \pi(W) \subset X/G$$
és un homeomorfisme i $(\pi(W), \varphi \circ \pi_{|W}^{-1})$ és una carta local a $[x]$.

Cal veure que X/G és Hausdorff i compleix el 2n axioma de numerabilitat, però això és senzill. //

Proposició Si G és un grup finit i G actua sobre X sense punts fixos, aleshores l'acció és pròpiament discontínua.

Demo: Exercici. //

En particular, tenim una altra demostració de que $\mathbb{R}P^n$ és una varietat topològica.

Exemple: Espais lenticulars

$$S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$$

Prenem p, q primers entre ells; definim una acció de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sobre S^3:

$$\varepsilon\,(z_1, z_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1 ,\ e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2 \right)$$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}\}$. L'acció no té punts fixos i el quocient és una varietat topològica

$$L(p,q) = S^3 / \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \qquad \text{(espai lenticular)}$$

Exemple $\mathbb{Z}^2$ actua sobre $\mathbb{R}^2$ per translacions:

$$(n,m)\cdot(x,y) = (x+n, y+m)$$

el quocient és un tor

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2 = S^1 \times S^1$$

Exemple: superfícies

Les superfícies que vam estudiar en el seu moment són varietats topològiques de dimensió 2.

2. Estructures diferenciables: varietats diferenciables

Sigui M una varietat topològica de dim d. Una estructura diferenciable sobre M és un conjunt de cartes locals

$$\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\}$$

tals que

1) $M = \bigcup_I U_i$ (és a dir, les cartes formen un atlas)

2) Les funcions de transició són diferenciables ($= \mathcal{C}^\infty$)

$$(\text{obert de})\ \mathbb{R}^d \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{R}^d \qquad (\text{abús de llenguatge})$$

3) $\mathcal{F}$ és maximal

Observem que la condició 3 no és mai un problema: si $\mathcal{F}$ compleix 1 i 2, sigui

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ (U,\varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} (U,\varphi) \text{ carta local} \\ \varphi\circ\varphi_i^{-1},\ \varphi_i\circ\varphi^{-1} \text{ diferenciables } \forall i \end{array} \right\}$$

aleshores $\overline{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ compleix 1, 2, 3 i $\overline{\mathcal{F}}$ és l'única estructura diferenciable que conté $\mathcal{F}$.

Una varietat diferenciable és una parell $(M, \mathcal{F})$ on M és una varietat topològica i $\mathcal{F}$ és una estructura diferenciable sobre M. Abús de llenguatge: en direm varietat i oblidarem $\mathcal{F}$.

Exemples

Els exemples a – e de l'apartat anterior són varietats diferenciables amb les estructures diferenciables natural.

Es tracta més de comprovar que les funcions de transició són diferenciables, en cada cas.

Una varietat topològica M pot tenir estructures diferenciables diferents $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$. L'exemple més senzill és aquest:

$$\mathbb{R} \qquad (U, \varphi_1) = (\mathbb{R}, id)$$

$$\mathbb{R} \qquad (U, \varphi_2) = (\mathbb{R}, t \mapsto t^3)$$

Observem que φ_2^{-1} no és diferenciable. Per tant, (U, φ_2) no pot pertànyer a cap estructura diferenciable que contingui (U, φ_1). Així demostra que $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$.

Com sempre para a matemàtiques, després de definir els *objectes* hem de definir els morfismes:

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ és *diferenciable* si, per tota carta local (U, φ),

$$\mathbb{R}^d \supset \varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f|U} \mathbb{R}$$

és diferenciable. Prenem

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{ f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ diferenciable} \}$$

$f : M \longrightarrow N$ és *diferenciable* si per tota carta local (U, φ) de M i tota carta local (V, ψ) de N, la composició

$$\mathbb{R}^d \supset W \xrightarrow{\varphi^{-1}} f^{-1}(V) \cap U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^k$$

és diferenciable. Prenem $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

$f : M \longrightarrow N$ és un *difeomorfisme* si f és bijectiva i $f^{-1} : N \longrightarrow M$ és també diferenciable. Direm que M i N són varietats *difeomorfes* si existeix un difeomorfisme entre elles.

3. Vectors Tangents

Com que les varietats diferenciables no es presenten submergides a $\mathbb{R}^n$, la definició de què és un vector tangent en un punt necessita una certa imaginació.

Sigui $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i v un vector de $\mathbb{R}^n$. Podem definir la derivada direccional de f en la direcció v com

$$v(f) = D_v(f) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0 \in \mathbb{R}$$

on $v = (v_1, \dots, v_n)$ i $x_1, \dots, x_n$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$.

Aquesta operació D_v compleix:

a) lineal $\quad D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g), \quad D_v(\lambda f) = \lambda D_v(f)$

b) regla del producte $\quad D_v(f \cdot g) = f(0)\, D_v(g) + g(0)\, D_v(f)$

Direm que D_v és una derivació

c) Si $f = g$ en un entorn de zero, aleshores $D_v(f) = D_v(g)$

És a dir, per calcular D_v només necessitem conèixer f en un cert entorn de 0. Parlem de germens de funcions:

Sigui X un espai topològic i $p \in X$ un punt. Una funció definida localment a p és una parella (U, f) on

- U és un entorn obert de p
- $f: U \to \mathbb{R}$ és una funció contínua.

Direm que $(U, f) \sim (V, g)$ si $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. El conjunt quocient és el conjunt de germens de funcions contínues a p

Si X (=M) és una varietat diferenciable i $p \in X$, podem parlar del

Conjunt de gèrmens de funcions diferenciables a p: $\mathcal{G}(M,p)$

$\mathcal{G}(M,p)$ té estructura d'àlgebra commutativa.

Tenim

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & \mathrm{Der}(\mathcal{G}(\mathbb{R}^n,0)) \\ v & \longmapsto & D_v \end{array}$$

<u>Lema</u> D és un isomorfisme d'espais vectorials

<u>Demo:</u> a) D és lineal, és a dir,

$$D_{v+w} = D_v + D_w$$
$$D_{\lambda v} = \lambda D_v$$

Això és una comprovació trivial.

b) D és injectiva, és a dir, $D_v = 0 \Rightarrow v = 0$.

Suposem $D_v = 0$. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Aleshores

$$0 = D_v(f) = \sum_j v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0 = v_i \qquad \Rightarrow v = 0.$$

c) D és exhaustiva. Aquest és el punt més difícil.

Sigui $\alpha \in \mathrm{Der}(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, 0))$. Si f és una funció diferenciable definida en una bola centrada a l'origen, la fórmula de Taylor ens diu:

$$f(x) = f(0) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0 x_i + \sum_{i,j} \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{tx} dt \right) x_i x_j$$

Apliquem α als dos costats; obtenim:

1) $\alpha(c) = c\alpha(1) = c\,\alpha(1 \cdot 1) = c\,(1\,\alpha(1) + 1 \cdot \alpha(1)) = 2\alpha(c) \Rightarrow \alpha(c) = 0$

2) $\alpha(x_i \cdot x_j) = x_i(0)\,\alpha(x_j) + x_j(0)\,\alpha(x_i) = 0$

Per tant,

$$\alpha(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0 \alpha(x_i) = D_v(f) \quad , v = (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) \quad //$$

Aquest lema és el que ens dóna la clau per definir què és un vector tangent a una varietat en un punt:

<u>Definició</u> a) Sigui M una varietat i $p \in M$. Un <u>vector tangent</u> a M al punt p és una <u>derivació</u> de l'àlgebra $\mathfrak{G}(M,p)$

b) L'<u>espai tangent</u> a M al punt p, és l'espai vectorial

$$M_p := \mathrm{Der}\,(\mathfrak{G}(M,p))$$

és a dir, el conjunt de tots els vectors tangents a M a p.

<u>Teorema</u> $\dim M_p = \dim M$

Demo: Si (U,φ) és una carta local a p, amb $\varphi(p)=0$, φ transforma gèrmens de funcions diferenciables a p en gèrmens de funcions diferenciables a l'origen de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{G}(M,p) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathfrak{G}(\mathbb{R}^n,0)$$

Per tant, $\quad M_p = \mathrm{Der}\,(\mathfrak{G}(M,p)) = \mathrm{Der}\,(\mathfrak{G}(\mathbb{R}^n,0)) \cong \mathbb{R}^n$. //

Cal recordar que sempre pensem els vectors tangents com a <u>operadors</u> sobre les funcions

$$\vec{v} \rightsquigarrow \vec{v}(f) \in \mathbb{R}.$$

Si (U,φ) és una carta local a $p \in M$, podem explicitar una <u>base</u> de M_p així:

$\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in M_p$ és, per definició, el vector tangent definit així:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) := \left.\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{\varphi(p)} \qquad i=1,\dots,n$$

Es compleixen aquestes propietats:

1) $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ é una derivació. Per tant, é un element ben definit de l'espai tangent M_p. Comprovació immediata

2) $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ són linealment independents. Per tant, són una base de M_p.

En efecte, suposem que tenim $\sum \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0$. Sigui f_j la funció

$$f_j(q) = \text{coordenada } j\text{-èsima de } \varphi(q)$$

Aleshores,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f_j) = \delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

3) Si $v \in M_p$ é un vector tangent, aleshores les coordenades de v en la base $\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ són $v(x_1), \ldots, v(x_n)$ on

$$x_i = \text{coordenada } i\text{-èsima de } \varphi;$$

És a dir,

$$v = \sum v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Això és evident: Definim

$$\tilde{v} = \sum v(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in M_p$$

Aleshores, $v(x_i) = \tilde{v}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Però hem vist que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{D} M_p \\ v &\longmapsto D_v \end{aligned}$$

és un isomorfisme. //

4) Canvi de coordenades. Si (V, ψ) és una altra carta local a p, obtenim aleshores una nova base $\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$ $i = 1, \ldots, n$ de M_p. El canvi de base és:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p = \sum_i \left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad //$$

4. El fibrat tangent i la diferencial

Prenem

$$TM = \coprod_{p\in M} M_p$$

que, en principi, és un conjunt; amb una projecció

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

que envia cada $v \in M_p$ a $p \in M$. El punt interessant és que podem dotar TM d'estructura de varietat diferenciable, de manera que π és una aplicació diferenciable. La idea és aquesta:

Per cada $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ (l'estructura diferenciable de M), siguin $x_1, \dots, x_n$ les coordenades de φ. Prenem coordenades locals a TM del tipus $(\pi^{-1}U, \tilde\varphi)$ on $\tilde\varphi : \pi^{-1}U \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es defineix així:

$$\tilde\varphi(p,v) = (p, v(x_1), \dots, v(x_n))$$

No fem els detalls.

Diem que $\pi : TM \to M$ és el fibrat tangent de M.

Definició Un camp vectorial a M és una aplicació diferenciable

$$X : M \longrightarrow TM$$

tal que $\pi \circ X = id$. És a dir, una secció diferenciable de π.

$\mathfrak{X}(M) = \{$camps vectorials a $M\}$. Té estructura d'espai vectorial.

Nota: En general, $\dim \mathfrak{X}(M) = \infty$. També és un mòdul sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Un camp X transforma funcions diferenciables en funcions diferenciables, així:

$$X(f)(p) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

$\mathfrak{X}(M)$ té una altra estructura important. És una <u>àlgebra de Lie</u>.

Definim una aplicació lineal

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

així:

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

Es compleix:

a) $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$, és a dir, és diferenciable

b) $[X,Y] = -[Y,X]$

c) $[\ ,\ ]$ és bilineal

d) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identitat de Jacobi)

Si $\varphi : M \to N$ és una aplicació diferenciable, es pot pujar a una aplicació diferenciable entre els fibrats tangents:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{d\varphi} & TN \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

$d\varphi$ és la <u>diferencial de φ</u> o <u>l'aplicació lineal tangent a φ</u>. Es defineix de manera molt simple:

$$\left(d\varphi_p(v)\right)(f) = v(f \circ \varphi)$$

Obtenim per cada

$$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$$

és una aplicació lineal entre els espais (vectorials) tangents.

Propietats i casos particulars.

1) Expressió en coordenades

$$\varphi : M \longrightarrow N \qquad \varphi(p) = q$$

$x_1 - x_n$ coordenades locals a un entorn de p
$y_1 - y_m$ " " " q

$$d\varphi_p : M_p \longrightarrow N_q \qquad \text{lineal}$$

$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$ base de M_p

$\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_m}\right|_q$ base de N_q

Aleshores, la matriu de $d\varphi_p$ és $\left(\left.\frac{\partial (y_i \circ \varphi)}{\partial x_j}\right|_p \right)$ ("matriu jacobiana")

2) Regla de la cadena: $d(\varphi \circ \psi) = d\varphi \circ d\psi$

En un punt: $d(\varphi \circ \psi)_p = d\varphi_{\psi(p)} \circ d\psi_p$.

3) Cas particular $M = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Aleshores $\varphi : (a,b) \longrightarrow N$ és una corba diferenciable a N. Si $t \in (a,b)$, aleshores

$$\dot{\varphi}(t) := d\varphi_t \left(\left.\frac{d}{dx}\right|_t \right) \in M_{\varphi(t)}$$

és el vector tangent a la corba al punt t.

4) Cas particular $N = \mathbb{R}$. Aleshores $\varphi : M \to \mathbb{R}$ és una funció diferenciable i $d\varphi_p : M_p \longrightarrow \mathbb{R}_{\varphi(p)} = \mathbb{R}$

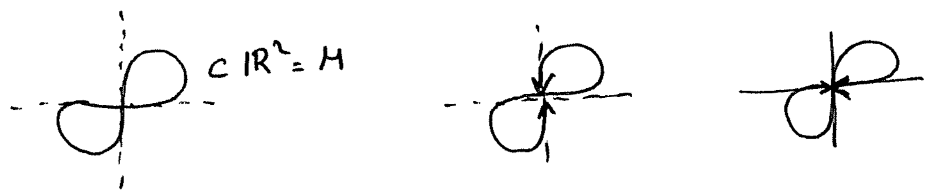
$$v \longmapsto v(\varphi)$$

L'aplicació lineal tangent ens permet definir el concepte de subvarietat

Sigui M una varietat diferenciable. Una <u>subvarietat</u> de M és $\varphi : N \longrightarrow M$ tal que

1) N és varietat diferenciable i φ és diferenciable
2) φ és injectiva
3) $d\varphi_p$ és injectiva per tot p.

Observem que una subvarietat no és només un subconjunt de M. De fet, un mateix subconjunt de M pot tenir diverses estructures de subvarietat, per exemple:



5. <u>Formes diferencials : fibrat cotangent</u>

Si V és un espai vectorial, els elements de V^* s'anomenen <u>formes lineals</u> sobre V:

$$V^* = \{\omega : V \longrightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ lineal}\}$$

Si M és una varietat i $p \in M$, definim l'<u>espai cotangent</u> a M a p com

$$(M_p)^*$$

I igual que hem fet amb els espais tangents, podem agrupar tots els espais cotangents en una varietat diferenciable

$$T^*M = \coprod_{p \in M} M_p^* \xrightarrow{\ \pi\ } M$$

que s'anomena el <u>fibrat cotangent de M</u>. Aleshores, una <u>forma diferencial</u> sobre M és una secció (diferenciable) del fibrat cotangent.

$$\omega : M \longrightarrow T^*M \qquad \omega_p \in M_p^*.$$

El punt interessant és que la diferencial d'una funció es pot pensar com una forma diferencial.

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad df : TM \longrightarrow T\mathbb{R}$$

$$df_p : M_p \longrightarrow \mathbb{R}_p = \mathbb{R} \Rightarrow (df)_p \in M_p^*$$

Si posem $\Omega^1(M) = \{$formes diferencials sobre $M\}$, aleshores

a) $\Omega^1(M)$ és un espai vectorial

b) $\Omega^1(M)$ és un mòdul sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$

c) $d : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ és $\mathbb{R}$-lineal.
$\qquad f \longmapsto df$

d) $\Omega^1(-)$ és contravariant: si tenim $\varphi : N \longrightarrow M$, aleshores tenim $d\varphi_p : N_p \longrightarrow M_{\varphi(p)}$ i $(d\varphi_p)^* : M^*_{\varphi(p)} \longrightarrow N_p^*$

Posem $\delta\varphi := (d\varphi)^*$

Podem definir $\varphi^* : \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(N)$ així

$$\varphi^*(\omega)_p = \delta\varphi\,(\omega_{\varphi(p)})$$

És a dir,

$$\begin{tikzcd} T^*N & T^*M \arrow[l, "\delta\varphi"'] \\ N \arrow[u, leftarrow] \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[u, leftarrow] \arrow[u, bend right, "\omega"'] \end{tikzcd} \qquad \varphi^*\omega = \delta\varphi \circ \omega \circ \varphi$$

$\delta\varphi :=$ aplicació lineal cotangent.

(observem que aquesta propietat és molt interessant i els camps vectorials no la tenen)

e) <u>Expressió en coordenades</u>. Si (U,φ) és una carta local a un entorn de $p \in M$ i $x_1, \dots, x_n$ són les coordenades de φ, aleshores $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^\infty(U)$ i $dx_1, \dots, dx_n \in \Omega^1(U)$. És complex fent $dx_{1p}, \dots, dx_{np}$ és una base de T_p^*M. De fet, a la base dual de la base dual de la base $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ de T_pM :

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \right) = \delta_{ij}$$

Si $\omega_p \in T_p^*M$, s'escriurà

$$\omega_p = \sum \lambda_i \, dx_{i\,p} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

i tindrem, si $\omega \in \Omega^1(U)$:

$$\omega = \sum f_i \, dx_i \qquad f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

amb $\lambda_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right)$.

2. El complex de de Rham

1. L'àlgebra tensorial i l'àlgebra exterior

Si V és un espai vectorial, podem submergir V en una àlgebra associativa $V \hookrightarrow TV$ considerant producte "formal" de vectors $(v, w) \mapsto v \otimes w$. Amb més rigor, això seria així:

$$V \otimes W = \frac{\{ \sum \lambda_i v_i \otimes w_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ v_i \in V,\ w_i \in W \}}{\text{bilinealitat}}$$

aquí "bilinealitat" vol dir que fem quocient per les relacions

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$
$$(\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda (v \otimes w)$$

Aleshores $V \otimes W$ és un un espai vectorial.
Si $v_1, \ldots, v_n$ és una base de V i $w_1, \ldots, w_m$ és una base de W, aleshores $\{v_i \otimes w_j\}$ és una base de $V \otimes W$. En particular,

$$\dim (V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W.$$

$V \otimes W$ és el <u>producte tensorial</u> de V i W.

<u>Nota</u>: $V \otimes W$ i $W \otimes V$ són isomorfs, però són <u>diferents</u>.

Aquesta construcció és <u>functorial</u> en el sentit que si

$$\varphi : V \longrightarrow V'$$
$$\psi : W \longrightarrow W'$$

són lineals, aleshores podem definir una aplicació lineal

$$\varphi \otimes \psi : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$$
$$v \otimes w \longmapsto \varphi(v) \otimes \psi(w)$$

Definició

$$T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$$

que té una estructura natural d'àlgebra amb unitat, graduada, associativa, no commutativa. Se'n diu l'<u>àlgebra tensorial</u> de V.

Sigui $I \subset T(V)$ l'<u>ideal</u> bilateral generat pels elements de la forma

$$v \otimes v \qquad v \in V$$

i considerem

$$\Lambda(V) := T(V)/I$$

que és també una àlgebra amb unitat, associativa, graduada.
El producte a $\Lambda(V)$ s'indica "$\wedge$", és a dir

$$[v] \wedge [w] = [v \otimes w]$$

se'n diu "producte exterior" i $\Lambda(V)$ s'anomena l'<u>àlgebra exterior</u> de V.

Estudiem les <u>propietats de l'àlgebra exterior</u>:

1) $v \wedge v = 0 \quad \forall v \in V$. Per construcció.
2) El producte exterior és bilineal. Evident perquè $\otimes$ ho és.
3) $v \wedge w = - w \wedge v$ si $v, w \in V$
   Surt de que $(v+w) \wedge (v+w) = 0$.
4) $x \wedge x = 0 \quad \forall x \in \Lambda(V)_{2k+1}$ Conseqüència de 1, 2, 3.
5) $x \wedge y = (-1)^{|x||y|} y \wedge x \quad \forall x, y \in \Lambda(V)$
   Aquí $|x|$ denota el <u>grau</u> de x ($\Lambda(V)$ és una àlgebra graduada)
6) Si $v_1, \ldots, v_n$ és una base de V, aleshores $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ és una base de $\Lambda_k(V)$. En particular

$$\dim \Lambda_k(V) = \binom{n}{k}$$

És a dir, $\Lambda(V)$ és una àlgebra de <u>dimensió finita</u> i

$$\Lambda_i(V) = 0 \quad \text{si } i > n = \dim V$$
$$\Lambda_n(V) \cong \mathbb{R}$$

<u>Demostració</u>: Tota la dificultat està en veure que aquests elements $\{v_I\}$ són linealment independents. Suposem $\sum a_I v_I = 0$. Sigui J el complementari de I_0. Aleshores

$$0 = v_J \wedge \left(\sum a_I v_I\right) = \sum a_I \, v_J \wedge v_I = a_{I_0} \, v_{\bar{I}_0} \wedge v_{I_0} = \pm a_{I_0} v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

i veiem que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$ ja hem acabat. És a dir, cal veure que $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \notin I$, on I és l'ideal generat per $v \otimes v$.

Utilitzem el <u>determinant</u>:

$$\overset{n}{V \otimes \dots \otimes V} \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$$

que clarament s'anul·la sobre $I \cap (V \otimes \dots \otimes V)$ i dóna

$$\Lambda_n V = V \wedge \dots \wedge V \xrightarrow{\overline{\det}} \mathbb{R}$$

Com que $\det(v_1, \dots, v_n) = 1$, tenim que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$. //

2. Camps tensorials i formes diferencials

Si M és una varietat diferenciable de dim n, tenim a cada punt l'espai tangent M_p i l'espai cotangent M_p^* que són espais vectorials i, per tant, podem considerar les seves àlgebres tensorial i exterior TM_p, $\Lambda(M_p^*)$. Igual que abans, podem enganxar tots aquests espais vectorials en un <u>fibrat tensorial</u> i en un <u>fibrat exterior</u>.

Un <u>camp tensorial</u> sobre M és una secció del fibrat tensorial.

És a dir, a cada punt tenim, de manera diferenciable, un tensor $X_p \in M_p \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes M_p$.

Una <u>r-forma diferencial</u> $\overset{\omega}{}$ sobre M és una secció del fibrat $\Lambda_r T^*M$. És a dir, a cada punt $p \in M$, $\omega_p \in \Lambda_r(M_p^*)$.

En coordenades locals, un camp tensorial de tipus r s'expressa

$$X = \sum a_I \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}$$

i una r-forma diferencial s'expressa

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1 \dots i_r} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

(També hi ha camps tensorials mixtos, covariant i contravariant)

Les formes diferencials del capítol anterior són el cas particular $r=1$.

També podem definir $\Omega^0(M) = \mathcal{E}^\infty(M)$. Tenim, doncs,

$$\{\Omega^*(M)\}$$

Quina estructura té?

1) És un mòdul sobre $\mathcal{E}^\infty(M)$, producte.

2) És un espai vectorial graduat

3) És una àlgebra graduada:

$$\omega_1 \in \Omega^r(M),\ \omega_2 \in \Omega^s(M) \longrightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{r+s}(M)$$

4) $\Omega^*(M)$ és anti-commutativa, o millor, commutativa en sentit graduat:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$$

Les 1-formes <u>actuen sobre els camps</u> de manera natural. Aquesta acció s'estén a les r-formes:

$$\omega \in \Omega^r(M) \rightarrow \omega_p(X_1, \dots, X_r)_p \in \mathbb{R}.$$

Aquesta acció es defineix de la següent manera:

$$\omega_1\wedge\dots\wedge\omega_r(X_1,\dots,X_r) = \det(\omega_i(X_j))$$

Es comprova que està ben definit i que dóna lloc a una aplicació multilineal alternada:

$$\omega\in\Omega^r(M) \Rightarrow \qquad \omega: \mathfrak{X}(M)\times\overset{r}{\dots}\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M)$$

nota: ω és multilineal respecte de l'estructura de $C^\infty(M)$-mòdul i no només de l'estructura d'espai vectorial.

Observem finalment que $M \rightsquigarrow \Omega^*(M)$ és un functor contravariant, és a dir, $\varphi: M\longrightarrow N$ diferenciable dóna

$$\varphi^*:\Omega^*N\longrightarrow\Omega^*M$$

que és un homomorfisme natural d'àlgebres graduades;

$$\varphi^*(\omega\wedge\eta)=\varphi^*\omega\wedge\varphi^*\eta$$

$$(\varphi^*\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$$

φ^* es defineix d'aquesta manera. Sigui $p\in M$ i $\varphi(p)=q\in N$. Tenim l'aplicació lineal tangent

$$d\varphi: M_p\longrightarrow N_{\varphi(p)}$$

i la seva dual

$$\delta\varphi=(d\varphi)^*: N^*_{\varphi(p)}\longrightarrow M^*_p$$

que s'estén de manera natural a les àlgebres exteriors:

$$\delta\varphi:\Lambda N^*_{\varphi(p)}\longrightarrow\Lambda M^*_p$$

Ara, si $\omega\in\Omega^r(N)$, podem definir $\varphi^*\omega\in\Omega^r(M)$ com la/una

$$\varphi^*(\omega)_p = (\delta\varphi)(\omega_{\varphi(p)})$$

Hem de comprovar que $\varphi^*(\omega)$ és realment una forma diferencial.

Prenem coordenades locals $(U, x_1, \ldots, x_n)$ a un entorn de $\varphi(p)$

Aleshores,

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_r} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \qquad (*)$$

En primer lloc observem que

<u>Lema</u> Si $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, aleshores

a) $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$

b) $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$

<u>Dem:</u> a) és clar, es pot prendre com a <u>definició</u> de φ^* sobre $\mathcal{C}^\infty(N) = \Omega^0(N)$.

b) Hem de demostrar que $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$. Tenim:

$$\varphi^*(df)_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } \varphi^*}}{=} (\delta\varphi)(df_q) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } \delta\varphi}}{=} df \circ d\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regla de la cadena}}}{=} d(f \circ \varphi)$$

//

Vist això, tenim a $(*)$

$$\varphi^* \omega = \sum \varphi^* a_{i_1 \ldots i_r} \, \varphi^* dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^* dx_{i_r} =$$

$$= \sum (a_{i_1 \ldots i_r} \circ \varphi) \, d(x_{i_1} \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_r} \circ \varphi)$$

i així em demostra que $\varphi^*\omega$ és una forma diferencial. A més hem vist que aquest diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty N \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "d"'] & \mathcal{C}^\infty M \arrow[d, "d"] \\
\Omega^1 N \arrow[r, "\varphi^*"] & \Omega^1 M
\end{tikzcd}$$

φ^* té també una expressió natural a nivell de l'acció sobre els camps. Recordem que si $\omega \in \Omega^r(N)$, aleshores ω dóna lloc a una aplicació multilineal alternada

$$\omega : \mathfrak{X}(N) \times \overset{r}{\cdots} \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(N)$$

Si $\varphi^*(\omega) \in \Omega^r(M)$, per tant,

$$\varphi^*(\omega) : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

$\varphi^*(\omega)$ actua així:

$$\varphi^*(\omega)\,(X_1, \ldots, X_r)(p) = \omega_q\,(d\varphi(X_{1p}), \ldots, d\varphi(X_{rp}))$$

La demostració és immediata aplicant les definicions. N'hi ha prou amb veure-ho per $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$, ω_i 1-formes. Aleshores,

$$\varphi^*\omega\,(X_1 \ldots X_r) = (\varphi^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge \varphi^*\omega_r)(X_1 \ldots X_r) = \det((\varphi^*\omega_i)(X_j))$$

$$= \det(\omega_i(d\varphi X_j)) = (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(d\varphi X_1, \ldots, d\varphi X_r).$$

3. La diferencial exterior

Recordem que la diferencial d'una funció és una 1-forma

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ \| & & \\ \Omega^0(M) & & \\ f & \longmapsto & df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{(localment)} \end{array}$$

i que es compleix la regla del producte:

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f\,dg$$

És importantíssim observar que aquest operador es pot estendre a tot $\Omega^*(M)$:

<u>Teorema</u> Existeix un únic operador $\mathbb{R}$-lineal $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ anomenat <u>diferencial exterior</u> tal que:

1) $d : \Omega^r \to \Omega^{r+1}$
2) $d|_{\Omega^0}$ és la diferencial de funcions
3) $d \circ d = 0$
4) d és una <u>derivació</u> (en sentit graduat!):

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

<u>Demostració</u>: Comencem donant la definició local de d. Sigui (U, φ) una carta local amb coordenades $x_1, \dots, x_n$. Aleshores, $\omega \in \Omega^r(M)$ s'escriu localment com

$$\omega = \sum_I a_I \, dx_I \qquad a_I \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

on $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ $i_1 < \dots < i_r$. Aleshores, definim $d\omega$ així (observem que no tenim altra opció, si volem que sigui una derivació):

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I \in \Omega^{r+1}(U)$$

Hem de veure que $d\omega$ no depèn de l'elecció de la carta local.

Abans, observem que es compleixen aquestes propietats:

a) d és $\mathbb{R}$-lineal
b) d és una derivació $\to$ exercici
c) $f \in \mathcal{C}^\infty(U) \Rightarrow d^2(f) = 0$

En efecte:

$$d^2(f) = d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0$$

Ara, suposem que tenim una altra carta local (V, ψ) amb coordenades $y_1, \dots, y_n$ i que definim la diferencial exterior per la mateixa fórmula, però referida a les noves coordenades. Tindrem $\bar{d}$, que complirà també les condicions a, b, c anteriors. En particular,

$$\bar{d}(dx_i) = \bar{d}\,\bar{d}\,x_i = \bar{d}^2 x_i = 0$$

i tenim

$$\bar{d}\omega = \bar{d}\left(\sum a_I dx_I\right) = \sum \bar{d}a_I \wedge dx_I + \sum a_I \overbrace{\bar{d}\,d\,x_I}^{0} =$$

$$= \sum da_I \wedge dx_I = d\omega$$

Per tant, d no depèn de la carta local i tenim

$$d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

i és clar que es compleixen les propietats que volem.

Falta la demostració de la unicitat (necessita utilitzar la paracompacitat) //

Aquesta diferencial exterior és <u>natural</u>:

<u>Proposició</u> Si $\varphi : M \to N$ és diferenciable, aleshores

$$\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$$

És a dir,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r N & \xrightarrow{\varphi^*} & \Omega^r M \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega^{r+1} N & \xrightarrow{\varphi^*} & \Omega^{r+1} M \end{array}$$

és un diagrama commutatiu.

<u>Demo:</u> N'hi ha prou amb comprovar-ho localment. Prenem

$$\omega = \sum a_I \, dx_I$$

$$\varphi^*\omega = \sum (a_I\circ\varphi)\, d(x_I\circ\varphi)$$

el teorema ja el tenim per $r=0$

$$d\varphi^*\omega = \sum d(a_I\circ\varphi)\wedge d(x_I\circ\varphi) = \varphi^*\sum da_I\wedge dx_I = \varphi^* d\omega \quad //$$

4. Cohomologia de de Rham

Si M és una varietat, hom construeix el complex de de Rham:

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \to \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \to 0$$

És complex per $d^2=0$

ω direm que és tancada si $d\omega = 0$

ω direm que és exacta si $\omega = d\eta$

Evidentment, exacta $\Rightarrow$ tancada: les formes exactes (tancades) formen un subespai vectorial.

Definim la cohomologia de de Rham de M com

$$H^r(M) = \{r\text{-formes tancades}\}/\{r\text{-formes exactes}\}$$

que és un espai vectorial canònicament associat a la varietat M:

$$H^0(M),\ H^1(M),\ \dots,\ H^n(M)$$

prenem $H^r(M)=0$ si $r>n$.

Aquesta cohomologia és un functor contravariant

$$H^*:\ \text{Varietats} \longrightarrow \text{Espais Vectorials graduats.}$$

En efecte, si $\varphi: M\to N$ és diferenciable, tenim $\varphi^*:\Omega^*N\to\Omega^*M$ i com que $\varphi^*\circ d = d\circ\varphi^*$, és evident que $\varphi^*(\text{tancades}) \subset \text{tancades}$, $\varphi^*(\text{exactes}) \subset \text{exactes}$ i per tant φ^* indueix

$$\varphi^*: H^*N \longrightarrow H^*M$$

de manera que es compleixen les propietats de functor:

$$(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$$

$$id^* = id$$

$H^*(M)$ té estructura d'àlgebra graduada commutativa, via

$$[\eta]\wedge[\omega] = [\eta\wedge\omega]$$

cal veure que així està ben definit, però és evident perquè d és una derivació. Per tant,

$$H^*: \text{Varietats} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-àlgebres graduades commutatives}$$

$$M \longmapsto H^*(M)$$

Fem ara un llistat de propietats elementals de la cohomologia de de Rham d'una varietat.

1) $H^iM=0$ si $i>\dim M$

2) $H^*(\coprod M_i) = \prod H^*(M_i)$

3) $H^0(M)\cong\mathbb{R}$ si M és connexa

$H^0(M) = \{0\text{-formes exactes}\} = \{f \mid df=0\}\cong\mathbb{R}$

(és fàcil veure que si $df=0$, aleshores f és constant sobre cada component connexa de M)

4) $H^1(S^1)\cong\mathbb{R}$

Per demostrar això hem de trobar una 1-forma ω que no sigui exacta i veure que si α és una 1-forma, aleshores $\alpha - c\omega$ és exacta per alguna constant c.

Recobrim S^1 amb dues cartes locals:

$$U_1 = S^1-\{1\} \xrightarrow{\theta_1} (0,2\pi)$$

$$U_2 = S^1-\{-1\} \xrightarrow{\theta_2} (-\pi,\pi)$$

on en cada cas, θ_i indica la funció argument, ben definida.

Considerem $d\theta_1$ sobre U_1 i $d\theta_2$ sobre U_2 i observem que, a $U_1 \cap U_2 = S^1 - \{\pm 1\}$, tenim $d\theta_1 = d\theta_2$. Per tant, tenim una 1-forma ω ben definida:

$$\omega = \begin{cases} d\theta_1 & \text{sobre } U_1 \\ d\theta_2 & \text{sobre } U_2 \end{cases}$$

Veiem ara que $\omega \neq df$. En efecte, si aquesta funció f existís, seria $f = \theta_1 + c_1$ sobre U_1 i $f = \theta_2 + c_2$ sobre U_2. És a dir, tindríem que $\theta_1 = \theta_2 + c_3$ sobre $U_1 \cap U_2$ i això no és cert.

(Per veure la segona part utilitzarem una mica de teoria d'integració de formes, que encara no hem estudiat.)

Sigui α una 1-forma sobre S^1 i sigui $c \in \mathbb{R}$ definit així:

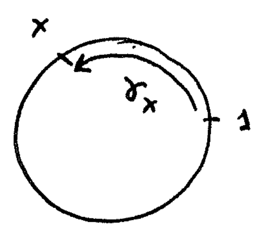
$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \alpha$$

Demostrarem que existeix una funció $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$dg = \alpha - c\,\omega$$

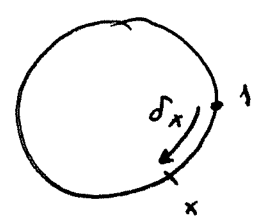
Definim g sobre cada carta U_1, U_2, així:

$x \in U_1$: $\quad g_1(x) = \int_{\gamma_x} \alpha - c\,\theta_1(x)$



on γ_x és el camí $\quad [0,1] \longrightarrow S^1$, $\quad t \longmapsto e^{2\pi i t\,\theta_1(x)}$

$x \in U_2$: $\quad g_2(x) = \int_{\delta_x} \alpha - c\,\theta_2(x)$



Aleshores, si $x \in U_1 \cap U_2$, tenim que $g_1(x) = g_2(x)$. Per tant, g

és una funció global ben definida $g : S^1 \to \mathbb{R}$.

Calculem ara dg. Ho fem a U_1 i a U_2:

$$U_1 : \qquad dg = \alpha - c\omega$$

$$U_2 : \qquad dg = \alpha - c\omega$$

Per tant, $dg = \alpha - c\omega$ i hem acabat. //

<u>Nota</u>: observem que, en general, que una forma sigui exacta és equivalent a l'existència ~~de~~ o no de solucions de certes equacions en derivades parcials.

<u>Exemple</u>: a $\mathbb{R}^2$, una 1-forma és $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$.

i $\omega = dh$ és equivalent a resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h}{\partial x} = f(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} = g(x,y) \end{array}\right\}$$

Sabem (càlcul elemental) que aquest sistema té solució si i només si

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

És a dir, estem dient que $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, perquè $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ és equivalent a $d\omega = 0$.

D'altra banda, sabem per càlcul elemental que, a $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, la condició

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

és encara necessària però no és suficient. Estem dient que

$$H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = 0$$

La teoria de de Rham el que fa és estendre tot això a la seva màxima generalitat.

5. El lema de Poincaré

En aquest apartat volem demostrar que

$$H^i(B^n) = 0 \qquad i > 0$$

si B^n és una bola oberta de $\mathbb{R}^n$. És a dir, hem de demostrar que en una bola oberta, tota r-forma tancada és exacta ($r \geq 1$). La demostració és la mateixa si substituïm B^n per un "conjunt estrellat" de $\mathbb{R}^n$.

<u>Idea de la demo</u>: Construirem un operador

$$h : \Omega^r(B^n) \longrightarrow \Omega^{r-1}(B^n)$$

tal que

$$h \circ d + d \circ h = id$$

Aleshores, si $d\omega = 0$, tenim $\omega = h\,d\omega + d\,h\omega = d(h\omega)$ i ω és exacta.

Definim $h = \alpha \circ j$, $\alpha : \Omega^{r-1} \longrightarrow \Omega^{r-1}$, $j : \Omega^r \longrightarrow \Omega^{r-1}$.

a) <u>l'operador α</u>

Observem que som a un obert de $\mathbb{R}^n$. Per tant, tenim coordenades <u>globals</u> $x_1, \dots, x_n$. Definim

$$\alpha : \Omega^r(B^n) \longrightarrow \Omega^r(B^n)$$

$$\alpha(f\, dx_I)_p = \left(\int_0^1 t^{r-1} f(tp)\, dt\right) dx_I \big|_p$$

(aquí necessitem que B^n sigui estrellat perquè tingui sentit $f(tp)$)

<u>Lema</u> $\alpha \circ d = d \circ \alpha$

<u>Demo</u>:

$$\alpha\, d(f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}) = \alpha\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}\right)$$

$$= \sum_i \left(\int_0^1 t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{tp} dt\right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}} =$$

(derivació dintre la integral)

$$= d\left[\left(\int_0^1 t^{r-1} f(tp)\,dt\right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}\right] =$$

$$= d\,\alpha\,(f\,dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}) \quad //$$

b) <u>L'operador j</u>

Definim $j : \Omega^r \longrightarrow \Omega^{r-1}$ tal que

1) $j(dx_i) = x_i \in \mathcal{C}^\infty(B^n)$
2) j é una derivació (en sentit producte)

<u>Lema</u> $\beta = jd + dj$ é una derivació (sense graus), és a dir,

$$\beta(x \wedge y) = \beta x \wedge y + x \wedge \beta y$$

<u>Demo</u>: Exercici trivial.

Observem que també es compleix trivialment que

$$\beta d = d \beta .$$

<u>Lema</u> $\alpha \circ \beta = id$

<u>Demo</u>: Observem primer que

$$\beta f = j\,df = j\left(\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$$

Aleshores,

$$\alpha \circ \beta\,(f\,dx_I) = \alpha\left(\left(rf + \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i\right) dx_I\right) =$$

$$= \left(\int_0^1 t^{r-1}\left(r f(tp) + \Sigma \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{tp} x_i(tp)\right)\right) dx_I =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^r f(tp)\right) dt\right) dx_I = f\,dx_I \quad .//$$

Aleshores,

$$id = \alpha \circ \beta = \alpha j d + \alpha d j = \alpha j d + d \alpha j = h d + d h$$

i tenim l'operador h que volíem si posem $h = \alpha j$. //

3. Complexos. Homologia i Cohomologia

1. Complexos de cadenes

Fixem un anell R. Tots els objectes seran R-mòduls. Podem pensar que $R = \mathbb{R}$; aleshores estarem parlant d'espais vectorials.

Un *complex* és una successió de mòduls i homomorfismes

$$\cdots \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow \cdots$$

en què la composició de dues fletxes consecutives és zero.

Normalment, pensarem els mòduls A, B, etc. com un índex de objecte graduat. Aleshores, les fletxes poden pujar el grau o baixar el grau:

$$\cdots \longrightarrow K^{n-1} \xrightarrow{d} K^{n} \xrightarrow{d} K^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial} K_{n} \xrightarrow{\partial} K_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

En el primer cas direm que és un complex de *cocadenes* o cohomològic. En el segon cas, parlarem de complex de *cadenes* o homològic.

Exemple Si M és una varietat, el *complex de de Rham* de M, $(\Omega^* M, d)$ és un complex de cocadenes d'espais vectorials.

Moltes de les coses que podem fer amb mòduls les podem fer amb complexos. Per exemple:

1) *Homomorfisme* $\varphi : (K, d) \longrightarrow (K', d')$ és $\varphi^n : K^n \longrightarrow (K')^n$ per tot n, tal que $\varphi \circ d = d \circ \varphi$.

Exemple: $f : M \longrightarrow N$ indueix $\varphi : (\Omega^* N, d) \longrightarrow (\Omega^* M, d)$

2) <u>Subcomplexos</u> $K \subset L$ vol dir $K^n \hookrightarrow L^n$ $\forall n$ i $d_L|_K = d_K$.

3) Nuclis, conuclis, quocient d'un complex per un subcomplex.

4) <u>Successions exactes</u>

Recordem que $\cdots \to A_i \to A_{i+1} \to A_{i+2} \to \cdots$ diem que és una successió <u>exacta</u> si la imatge de cada fletxa coincideix amb el nucli de la fletxa següent.

Una successió exacta curta és

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

que sigui exacta. Això és equivalent a:

a) φ injectiva

b) π exhaustiva

c) $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} \varphi$

En aquest cas, tenim $C \cong B/\varphi(A)$ i

$$\begin{tikzcd} & C \\ B \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr] & \\ & B/\varphi(A) \arrow[uu, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

és commutativa.

Si K és un complex, definim

$$Z_n(K) = \operatorname{Ker}\{\partial : K_n \to K_{n-1}\} = \{n\text{-cicles}\}$$

$$B_n(K) = \operatorname{Im}\{\partial : K_{n+1} \to K_n\} = \{n\text{-vores}\}$$

$\partial^2 = 0$ implica que $Z_n(K) \subset B_n(K)$ i podem definir

$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$$

que anomenem <u>n-èsim mòdul d'homologia</u> de K. [Si K és cohomològic, parlem del <u>n-èsim mòdul de cohomologia</u> de K i escrivim $H^n(K)$.]

<u>Exemple</u>: la cohomologia del complex de de Rham és la cohomologia de de Rham.

El pas de K a H_*K és functorial: si $\varphi: K \to L$ és un homomorfisme de complexos, aleshores podem definir

$$\varphi_* = H_n(\varphi): H_nK \longrightarrow H_nL$$
$$[z] \longmapsto [\varphi(z)]$$

que està ben definit, és lineal i compleix

$$(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$$

$$id_* = id$$

(canvis a les i són complexos cohomològics)

2. <u>Homotopia i successió exacta llarga d'homologia</u>

Siguin $f, g: K \to K'$ morfismes de complexos. Una <u>homotopia</u> entre f i g $(s: f \simeq g)$ és $s_n: K_n \to K'_{n+1}$ tal que

$$\partial s + s\partial = f - g$$

<u>Propietats</u>

1) $\simeq$ és una relació d'equivalència:

$$0: f \simeq f$$
$$s: f \simeq g \Rightarrow -s: g \simeq f$$
$$s: f \simeq g,\ t: g \simeq h \Rightarrow s+t: f \simeq h$$

2) $\simeq$ és compatible amb la composició

$$f \simeq g,\ f' \simeq g' \Rightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$$

3) $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

Exemple: Quan vam demostrar el lema de Poincaré, vam construir una homotopia entre $id: \Omega^* B^n \to \Omega^* B^n$ i $0: \Omega^* B^n \to \Omega^* B^n$. Per tant, $id = id^* = 0^* = 0$ i això implicava que $H^* B^n = 0$. $(*>0)$

Sigui ara $0 \to K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \to 0$ una successió exacta curta de complexos. Podem definir ara l'homomorfisme de connexió (= "connecting")

$$\delta : H_n K'' \longrightarrow H_{n-1} K' \qquad \forall n$$

$$\delta[z] = [\, i^{-1} \partial p^{-1}(z)\,]$$

Cal veure que δ està ben definit i és lineal.

A més, δ és natural, és a dir, si tenim

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & K'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & L \arrow[r] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

aleshores, els connecting de les dues successions exactes associades:

$$\begin{tikzcd}
H_n K'' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f''_*"'] & H_{n-1} K' \arrow[d, "f'_*"] \\
H_n L'' \arrow[r, "\delta"] & H_{n-1} L'
\end{tikzcd}$$

és un diagrama commutatiu. És important, més, el resultat següent:

Teorema (successió exacta llarga d'homologia)

$$\cdots \to H_n K' \xrightarrow{i_*} H_n K \xrightarrow{p_*} H_n K'' \xrightarrow{\delta} H_{n-1} K' \xrightarrow{i_*} H_{n-1} K \to \cdots$$

és una successió exacta. //

Demo: "Diagram chasing". //

Exemple (successió de Mayer-Vietoris en cohomologia de de Rham)

Sigui M una varietat i U, V dos oberts de M tals que $M = U \cup V$.

Tenim inclusions

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j"'] & U \arrow[d, hook, "k"] \\ V \arrow[r, hook, "l"] & M \end{tikzcd}$$

i podem considerar la successió

$$0 \longrightarrow \Omega^* M \xrightarrow{\alpha} \Omega^* U \oplus \Omega^* V \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

$$\omega \longmapsto (k^*\omega, l^*\omega)$$

$$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto i^*\omega_1 - j^*\omega_2$$

Proposició Aquesta successió és exacta.

Dem: L'únic punt que no és evident és que β sigui epi. Utilitzarem particions de la unitat. Siguin $g, h : M \longrightarrow [0,1]$ diferenciables tals que

a) $g + h = 1$

b) $\overline{\{x \in M \mid g(x) \neq 0\}} \subset U$

c) $\overline{\{x \in M \mid h(x) \neq 0\}} \subset V$

Si $\omega \in \Omega^*(U \cap V)$, aleshores $g\omega$ es pot estendre a $\omega_V \in \Omega^* V$ via

$$\omega_V(x) = \begin{cases} g\,\omega(x) & x \in U \cap V \\ 0 & x \in V - U \end{cases}$$

i també $h\omega$ es pot estendre a $\omega_U \in \Omega^* U$. Aleshores

$$\beta(\omega_U - \omega_V) = \omega \quad //$$

Per tant, obtenim una successió exacta llarga de cohomologia de de Rham (de tipus cohomològic):

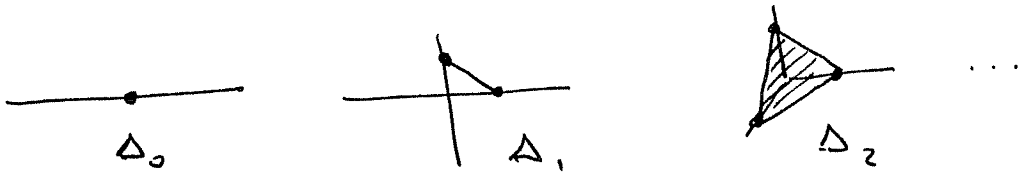
$$\cdots \longrightarrow H^i(U \cap V) \longrightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^{i+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

3. El complex singular i l'homologia singular

Definim el p-símplex standard com

$$\Delta_p = \{ (t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid t_i \geq 0, \ \sum t_i = 1 \}$$

(nota: $\Delta_p = \emptyset$ si $p<0$)



El p-símplex standard té p+1 cares, però s'identifiquen cada una a un p-1 símplex standard via:

$$\partial_i \Delta_p = \text{cara } i\text{-èssima de } \Delta_p \qquad i=0,\dots,p$$

$$\partial_i \Delta_p = \{ (t_0, \dots, t_p) \in \Delta_p \mid t_i = 0 \}$$

$$\Delta_{p-1} \xrightarrow{\ \cong\ } \partial_i \Delta_p$$

$$(t_0, \dots, t_{p-1}) \longmapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$$

posem $\partial_i : \Delta_{p-1} \longrightarrow \Delta_p$ "cara i-èssima".

<u>Observació important</u>: si $j \leq i$, $\partial_j \circ \partial_i = \partial_{i+1} \circ \partial_j$ (identitat simplicial)

Si X és un espai topològic, un p-símplex <u>singular</u> a X és una aplicació contínua

$$\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$$

Un p-símplex singular de X també té p+1 <u>cares</u>, que són (p-1)-símplex singulars:

$$\begin{tikzcd} \Delta_{p-1} \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[rr, bend left, "\partial_i \sigma"] & \Delta_p \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

I si $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ és un símplex singular i $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua, aleshores $f\circ\sigma : \Delta_p \longrightarrow Y$ és un símplex singular de Y.

Ara ja podem definir el <u>complex singular</u> d'un espai, $S(X)$.

$S_n(X)$ = R-mòdul lliure generat pels n-símplex singulars de X

(si volem indicar R, posem $S_n(X;R)$)

$$\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\partial = \sum (-1)^i \partial_i$$

És a dir, $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \sigma$. (<u>nota</u>: $S_n X = 0$ si $n<0$)

Cal comprovar:

<u>Lema</u> $\partial^2 = 0$

Demo: $\partial^2 = \partial\circ\partial = \partial\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial_j\right) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial(\partial_j) =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} (-1)^i (-1)^j \partial_j \circ \partial_i =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=0\\ j\leq i}}^{n,n-1} (-1)^{i+j} \partial_j \circ \partial_i + \sum_{\substack{i,j=0\\ j>i}}^{n,n-1} (-1)^{i+j} \partial_j \circ \partial_i =$$

(identitat simplicial) $$= \sum_{j\leq i} (-1)^{i+j} \partial_{i+1} \circ \partial_j + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \partial_j \circ \partial_i =$$

$\left(\begin{array}{l} l=j \\ k=i+1 \end{array}\right)$ $$= \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} \partial_k \circ \partial_l + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \partial_j \circ \partial_i = 0 \quad //$$

Per tant, $(S_*(X),\partial)$ és un complex de cadenes; podem considerar la seva <u>homologia</u>. Això és, per definició, l'<u>homologia singular</u> de l'espai X:

$$H_n(X) := H_n(S(X))$$

Si és necessari recordar quin anell base prenem, escrivim $H_*(X;R)$.

L'homologia és un functor. És a dir, si $f: X \to Y$ és contínua, tindrem $f_*: H_*X \to H_*Y$ i es compleixen les dues propietats de naturalitat: $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $id_* = id$.

En algunes circumstàncies ens pot interessar més treballar amb cohomologia. Cap problema. Definim les "cocadenes singulars de X com:

$$S^n(X) := \text{dual de } S_nX = \mathrm{Hom}(S_nX, R)$$

i $\delta: S^nX \to S^{n+1}X$ com l'homomorfisme dual de $\partial: S_{n+1}X \to S_nX$.

Tenim el complex de cocadenes singulars de X, (S^*X, δ) i la seva cohomologia és, per definició, la cohomologia ~~de~~ singular de X:

$$H^n(X) := H^n(S^*(X))$$

que també és un functor (contravariant: canvia el sentit de les fletxes).

Exemples

1) Homologia d'un punt.

$X = \{*\}$. Hi ha un únic n-símplex φ_n per cada n. $S_n(X) \cong R\varphi_n$

$$\partial_n : S_nX \longrightarrow S_{n-1}X$$

$$\partial \varphi_n = \sum (-1)^i \varphi_{n-1} = \begin{cases} 0 & i \text{ parell} \\ \varphi_{n-1} & i \text{ senar} \end{cases}$$

$$S_*X: \quad \cdots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{=} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{=} R \longrightarrow \cdots \xrightarrow{0} R$$

$$H_i(X) = \begin{cases} 0 & i \neq 0 \\ R & i = 0 \end{cases}$$

2) Homologia en dimensió zero

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \longrightarrow 0$$

$S_0(X)$ = R-mòdul lliure generat pels punts de X

$S_1(X)$ = R-mòdul lliure generat pels camins de X

Si X és arc-connex, $\sum \lambda_x x = \partial \omega \iff \sum \lambda_x = 0$

$$0 \to B_0X \longrightarrow R(X) \longrightarrow R \longrightarrow 0$$
$$\sum \lambda_x x \longmapsto \sum \lambda_x$$

i $H_0X = \dfrac{S_0(X)}{B_0(X)} \cong R$

En general, si $X = \coprod X_i$ és la descomposició de X en components arc-connexos, és immediat que

$$S(X) \cong \oplus\, S(X_i)$$
$$H_*X \cong \oplus\, H_*X_i$$

Per tant, $H_0(X) \cong \oplus R$ amb tantes còpies com components arc-connexos tingui X.

4. Les dues propietats fonamentals de l'homologia singular

A) Invariància per homotopia

Teorema $f, g : X \to Y$, $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

Recordem que $f \simeq g$ (f homòtopa a g) vol dir que existeix

$$H : X \times I \to Y \quad \text{contínua}$$

tal que

$$H(x,0) = f(x)$$
$$H(x,1) = g(x)$$

Aquesta relació entre aplicacions contínues és una relació d'equivalència i ens permet definir el concepte d'<u>equivalència homotòpica</u>:

$f : X \to Y$ és una <u>equivalència homotòpica</u> si existeix $g : Y \to X$ que és una "inversa llevat d'homotopia", és a dir, tal que

$$g \circ f \simeq id_X$$
$$f \circ g \simeq id_Y$$

Es diu que X i Y són del mateix tipus d'homotopia si existeix una equivalència homotòpica entre ells. Posem $X \simeq Y$.

<u>Corol·lari</u> $X \simeq Y \Rightarrow H_*(X) \cong H_*(Y)$ (isomorfisme de R-mòduls)

<u>Corol·lari</u> X contràctil $\Rightarrow H_i(X) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ R & i = 0 \end{cases}$

X contràctil vol dir, per definició, $X \simeq *$. En particular, una bola (oberta o tancada) de $\mathbb{R}^n$ és contràctil i, per tant, té la mateixa homologia que un punt.

No demostrem el teorema (referència: Vick). La idea és que si tenim una homotopia H entre f i g, podem construir una homotopia entre $S(f) : SX \to SY$ i $S(g) : SX \to SY$. I ja sabem que dos homomorfismes de complexos que siguin homòtops indueixen el mateix homomorfisme a homologia.

El mateix teorema és també cert a cohomologia.

B) <u>La successió exacta de Mayer-Vietoris</u>

Sigui $X = A \cup B$, amb A i B oberts. I pel que hem fet en un altre moment, podem considerar les inclusions

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xhookrightarrow{i} & A \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ B & \xhookrightarrow{l} & X \end{array}$$

i la successió

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & S(A\cap B) & \xrightarrow{\alpha} & S(A)\oplus S(B) & \xrightarrow{\beta} & SX & \longrightarrow 0 \\ & x & \longmapsto & (i_* x, -j_* x) & & & \\ & & & (x,y) & \longmapsto & k_* x + l_* y & \end{array}$$

Però, en contrast amb el que passava amb la forma diferencial, ara β <u>no</u> és epi. És fàcil calcular la imatge de β:

$$\operatorname{Im}\beta = S^P(X) = R\text{-mòdul lliure generat pels símplex "petits".}$$

on $\sigma:\Delta_n \longrightarrow X$ és <u>petit</u> si $\sigma(\Delta_n)\subset A$ o bé $\sigma(\Delta_n)\subset B$. Tenim, doncs, una successió exacta

$$0 \longrightarrow S(A\cap B) \xrightarrow{\alpha} S(A)\oplus S(B) \xrightarrow{\beta} S^P X \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$S^P(X)$ és també un complex de cadenes i té una certa homologia que denotarem, provisionalment, "homologia petita" $H^P_*(X)$. El punt crucial és:

<u>Teorema</u> (dels símplex petits) $S^P(X) \hookrightarrow SX$ indueix isomorfisme a cohomologia: $H^P_* X \cong H_* X$.

La demostració és complicada. La idea consisteix en descomposar un símplex en una suma de símplex petits, sense que canviï l'homologia. (referència: Vick)

Ara, la successió exacta llarga ~~de cob~~ d'homologia associada a la successió exacta $(*)$ i el teorema dels símplex petits dóna:

<u>Teorema</u> (successió exacta de Mayer-Vietoris)

Hi ha una successió exacta natural

$$\cdots \longrightarrow H_n(A\cap B) \longrightarrow H_n A\oplus H_n B \longrightarrow H_n X \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

(i el mateix en cohomologia)

Els dos teoremes fonamentals anteriors ens permeten calcular l'homologia de molts espais:

Exemple: L'homologia de S^n

Ja sabem que

$$H_i(S^0) = \begin{cases} R\oplus R & i=0 \\ 0 & i>0 \end{cases}$$

Considerem $S^1 = \underbrace{(S^1-\{i\})}_{A} \cup \underbrace{(S^1-\{-i\})}_{B} \subset \mathbb{C}$ i apliquem Mayer-Vietoris

A i B són contràctils. Per tant, tenen homologia trivial. $A\cap B$ té el tipus d'homotopia de $S^0 \subset S^1$. Obtenim

$$H_0(S^1) = R$$
$$H_i(S^1) = 0 \quad i>1$$

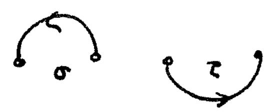
$$0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \underset{\substack{\cong \\ R\oplus R}}{H_0(S^0)} \xrightarrow{\varphi} \underset{\substack{\cong \\ R\oplus R}}{H_0A \oplus H_0B}$$

i si ens hi fixem bé, veurem que φ ve donada per la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Per tant, $H_1(S^1) \cong R$. Com podem trobar un generador? $\ker\varphi = \langle(1,-1)\rangle$

Per tant, si un 1-cicle singular z és tal que $\Delta z = (1,-1)$, ja tenim que $[z]$ és un generador.

Exemple: $\sigma, \tau : [0,1] \longrightarrow S^1$



$\partial(\sigma+\tau) = 0$
$\Downarrow$
$\sigma+\tau$ 1-cicle

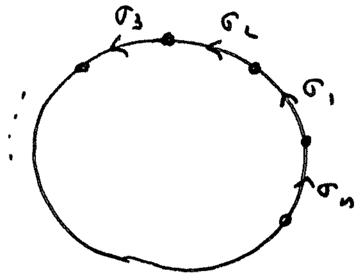
$$\Delta[\sigma+\tau] = (1,-1) \quad \text{(exercici)}$$

Un altre generador seria $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1$ . En efecte, γ no és [illegible], però $[\gamma] = [\sigma+\tau]$ ja que podem construir

$$\rho : \Delta_2 \longrightarrow S^1$$

amb $\partial\rho = \gamma - \sigma - \tau$, clarament. Prenem $[\gamma] = c$

Anàlogament, $\iota = [\sigma_1 + \cdots + \sigma_n]$:



Així, per inducció, podem fer el mateix amb S^n. Obtenim isomorfismes

$$\cdots \; H_n S^n \overset{\Delta}{\cong} H_{n-1} S^{n-1} \overset{\Delta}{\cong} \cdots \cong H_1 S^1 \cong R$$

Per tant,

$$H_i(S^n) = \begin{cases} R & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases} \qquad (i \geq 0)$$

i l'elecció del generador ι a $H_1 S^1$ ens dóna generadors ι_n a $H_n S^n$.

Si haguéssim fet aquest càlcul en cohomologia hauríem arribat a les mateixes conclusions. Però no hem de pensar que l'homologia i la cohomologia són sempre el mateix!

4. El teorema de de Rham

1. Orientació

Si V és un espai vectorial (real!) i $\{e_1, \dots, e_n\}$ i $\{v_1, \dots, v_n\}$ són dues bases (ordenades!) i P és la matriu del canvi de base, aleshores $\det P \neq 0$. Per tant, $\det P > 0$ o bé $\det P < 0$. En el primer cas, direm que les dues bases tenen la mateixa orientació. En el segon cas, direm que tenen orientacions oposades. Tenir la mateixa orientació és una relació d'equivalència al conjunt de bases. El conjunt quocient té només dos elements.

Orientar un espai vectorial és escollir una d'aquestes dues classes d'equivalència. És, a dir, és escollir una base de V i anomenar-la "positiva".

$\dim \Lambda^n(V) = 1$. Per tant, $\Lambda^n(V) \cong \mathbb{R}$ i $\Lambda^n(V) - 0$ té dues components. Orientar V és el mateix que escollir una d'aquestes dues components. L'equivalència és òbvia, ja que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = (\det P)\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Si M és una varietat ~~suau~~ (connexa), cada espai tangent M_p és un espai vectorial de dimensió n. Orientar M vol dir escollir una orientació a M_p, $\forall p$, "de manera coherent".

Si volem donar una definició rigorosa d'això, és millor utilitzar formes diferencials:

Definició Orientar M és escollir $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega_p \neq 0$ $\forall p$.

<u>Nota</u>: Pot ser que aquesta ω no existeixi. Aleshores direm que M <u>no és orientable</u>. Hi ha varietats no orientables.

Direm que ω és la forma d'orientació. A partir de ω, podem orientar cada espai tangent M_p, així:

$e_1, \dots, e_n$ base de M_p

direm que $e_1, \dots, e_n$ és <u>positiva</u> si $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$.

Aquesta definició és coherent perquè si $v_1 \dots v_n$ és una altra base, aleshores

$$\omega(v_1 \dots v_n) = \det P \; \omega(e_1 \dots e_n)$$

on P és la matriu de canvi de base.

<u>Exemples</u>

a) L'orientació standard de $\mathbb{R}^n$ ve donada per la n-forma diferencial $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

b) S^n és orientable.

Sigui $p \in S^n$. Considerem $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de la manera habitual. Aleshores, podem veure-hi cada espai tangent $\theta(S^n)_p$ com un subespai de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sigui $\vec{n}_p$ el vector <u>normal</u> a l'esfera al punt p en la direcció "cap enfora" (dit d'una altra manera: $\vec{n}_p = \vec{p}$!). Aleshores, una base $e_1, \dots, e_n$ de $(S^n)_p$ direm que és positiva si $e_1, \dots, e_n, \vec{n}_p$ és una base positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aquest exemple es generalitza a qualsevol $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ que tingui un camp <u>normal</u> unitari.

c) $\mathbb{R}P^n$ és orientable $\Longleftrightarrow$ n és senar.

Recordem que $\mathbb{R}P^n = S^n/_{x \sim -x}$. L'aplicació

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{A} & S^n \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Conserva l'orientació si i només si n és senar (exercici). Per tant, si n és senar, podem orientar $\mathbb{RP}^n$ prenent a cada punt $p \in \mathbb{RP}^n$ l'orientació produïda de les dues antiimatges de p.

Si n és parell, ja veiem que $\mathbb{RP}^n$ no és orientable, fem aquest raonament: suposem que $\mathbb{RP}^n$ fos orientable. Orientem S^n i orientem $\mathbb{RP}^n$ i ens preguntem si $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^n$ conserva l'orientació o inverteix l'orientació. En els dos casos arribem a contradicció perquè tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S^n \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{RP}^n & \end{tikzcd}$$

i A inverteix l'orientació.

En aquest exemple hem parlat d'aplicacions que conserven l'orientació i aplicacions que inverteixen l'orientació. Discutim aquest concepte.

Siguin M i N varietats orientades i $\varphi : M \to N$ una aplicació diferenciable tal que $d\varphi$ és un isomorfisme a tot punt $p \in M$. Aleshores $(d\varphi)_p : M_p \to N_{\varphi(p)}$ conserva l'orientació o inverteix l'orientació.

Lema Si $(d\varphi)_p$ conserva l'orientació a $p \in M \Rightarrow (d\varphi)_q$ conserva l'orientació $\forall q \in M$.

Demo: Unim p i q amb un camí i considerem a cada punt x del camí una base positiva de M_x, que variï contínuament amb x.

Siguin ω la forma d'orientació de N. Tenim

$$(\varphi^*\omega)_x(e_1^x, \dots, e_n^x) = \omega_{\varphi(x)}(d\varphi\, e_1^x, \dots, d\varphi\, e_n^x) \begin{cases} >0 \text{ si } (d\varphi)_x \text{ conserva orient.} \\ <0 \text{ si } (d\varphi)_x \text{ inverteix orient.} \end{cases}$$

Per tant, si $d\varphi$ conserva l'orientació a p, també l'ha de conservar a q. //

Per tant, podem dir que φ <u>conserva l'orientació</u> si $d\varphi$ conserva l'orientació a tot punt; que φ <u>inverteix l'orientació</u> si $d\varphi$ inverteix l'orientació a tot punt. El lema implica que si $d\varphi$ és iso a tot punt, aleshores o bé φ conserva l'orientació o bé φ inverteix l'orientació.

2. Integració

Suposem que coneixem la teoria d'integració de funcions a $\mathbb{R}^n$. És a dir, si $A \subset \mathbb{R}^n$ és "prou bo" i $f : A \to \mathbb{R}$ és contínua sabem què vol dir

$$\int_A f \in \mathbb{R}$$

Suposem ara que $A \subset M$ on M és una varietat i volem donar un sentit a $\int_A f$. La manera de fer-ho seria escollir cartes locals que recobreixin A: sobre cada carta local $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ definim

$$\int_{A\cap U} f := \int_{\varphi(A\cap U)} f \circ \varphi^{-1}$$

El problema és que això <u>depèn de la carta local que hem escollit</u>

i per tant no té sentit. En efecte, si $U \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ és una altra carta local, podem considerar $\rho = \varphi \circ \psi^{-1}$. Aleshores

$$\int_{A\cap U} f = \int_{\varphi(A\cap U)} f \circ \varphi^{-1}$$

$$\int_{A\cap U} f = \int_{\psi(A\cap U)} f \circ \psi^{-1} = \int_{\psi(A\cap U)} (f \circ \varphi^{-1}) \circ \rho$$

i aquestes dues coses són diferents. La relació entre ambdues ve donada pel teorema del canvi de variables a $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\rho(A)} f = \int_A f \circ \rho \left| \det\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}\right)\right|$$

si ρ és un difeomorfisme d'un obert acotat de $\mathbb{R}^n$ en un obert acotat de $\mathbb{R}^n$.

En canvi, sí que té sentit (llevat d'un petit "detall") la integració de formes diferencials. Considerem primer el cas de $\mathbb{R}^n$. Una n-forma diferencial a $\mathbb{R}^n$ (o a un obert $\Theta \subset \mathbb{R}^n$) és

$$\omega = f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Si $A \subset \Theta$, podem definir

$$\int_A \omega := \int_A f$$

Aleshores, en la situació anterior en què tenim un difeomorfisme φ, el teorema del canvi de variables diu

$$\int_{\rho(A)} \omega = \int_{\rho(A)} f = \int_A f \circ \rho \left| \det \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} \right|$$

però, si fem els càlculs, veiem que

$$\rho^*(\omega) = f \circ \rho \left(\det \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

i tenim

$$\int_{\rho(A)} \omega = \pm \int_A \rho^*(\omega)$$

És a dir, la integral està ben definida llevat d'un signe, que és positiu si i només si ρ <u>conserva l'orientació</u>.

Així ens suggereix que la integral d'una n-forma podria definir-se sobre una varietat orientable.

De tota manera, començarem integrant r-formes sobre r-símplexs <u>parametritzats</u>.

Sigui $\sigma : \Delta_r \longrightarrow M$ un r-símplex singular i sigui ω una r-forma diferencial sobre M. Definim

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta_r} \sigma^*(\omega)$$

[Hi ha un detall: per parlar de σ^* necessitem que $\sigma : \Delta_r \to M$ sigui <u>diferenciable</u>, però Δ_r no és una varietat diferenciable... Diem que σ és diferenciable si és la restricció a Δ_r d'una aplicació diferenciable $\tilde{\sigma} : U \longrightarrow M$ definida sobre un entorn obert de Δ_r a $\mathbb{R}^{r+1}$. Aleshores, si σ és un r-símplex singular diferenciable, tenim ben definit $\int_\sigma \omega$.]

Si $c = \sum a_i \sigma_i$ és una cadena singular (diferenciable), podem definir

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

En aquest context es compleix el <u>teorema de Stokes</u> (que no demostrarem):

$$\int_{\partial c}\omega = \int_c d\omega$$

A partir d'aquí, utilitzant el teorema del canvi de variable, podríem (no ho farem) desenvolupar una teoria de la integració en varietats per donar sentit a coses com

$$\int_A \omega$$

on ω és una n-forma sobre M amb $\dim M = n$ M orientable i $A \subset M$ és un subespai "apropiat". En particular, valdria el teorema de Stokes

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A}\omega$$

i, en particular, si M és compacta orientable té sentit $\int_M \omega$ i es compleix $\int_M d\omega = 0$. (Referència: Warner)

3. Relació entre el complex singular i el complex de de Rham

La integració sobre cadenes i el teorema de Stokes ens donen una relació entre el complex singular de M i el complex de de Rham de M, on M és una varietat. Considerem

$$\Omega^p(M) = \{p\text{-formes diferencials sobre } M\}$$

$$S_p^\infty(M) = \{p\text{-cadenes singulars } \mathcal{C}^\infty \text{ de } M\} \text{ sobre } \mathbb{R}$$

$$S^p_\infty(M) = (S_p^\infty(M))^* = \operatorname{Hom}(S_p^\infty(M), \mathbb{R})$$

Aleshores, tenim

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &\xrightarrow{\varphi} S^p_\infty(M) \\ \omega &\longmapsto \left\{ c \mapsto \int_c \omega \right\} \end{aligned}$$

Ω^*M i $S^*_\infty(M)$ són complexos de cocadenes amb diferencials d i δ, respectivament.

<u>Proposició</u> φ és un morfisme de complexos.

És a dir, $\delta\varphi = \varphi d$.

Això no és altra cosa que el teorema de Stokes.

Per tant, φ indueix homomorfismes

$$H^*_{dR} M \xrightarrow{\varphi^*} H^*_\infty(M;\mathbb{R})$$

on:

- $H^*_{dR}(M)$ és la cohomologia de de Rham de M
- $H^*_\infty(M;\mathbb{R})$ és la cohomologia del complex $S^*_\infty(M)$, és a dir, és la cohomologia singular, però definida amb símplex singulars diferenciables.

Ara ja podem enunciar el teorema de de Rham:

<u>Teorema de de Rham</u>

a) φ^* és isomorfisme

b) $S^*X \longrightarrow S^*_\infty X$ indueix isomorfisme a cohomologia

Per tant, la <u>cohomologia de de Rham</u> d'una varietat i la <u>cohomologia singular</u> (a coeficients reals) d'aquesta mateixa varietat són isomorfes.

Aquest teorema és genial, entre altres coses perquè

$H^*_{dR}(M)$ depèn de l'estructura diferenciable de M; ens informa sobre l'existència o no de solucions de certes equacions diferencials.

$H^*(M;\mathbb{R})$ depèn només de la topologia de M. De fet, només depèn del tipus d'homotopia de M.

4. Demostració del teorema de de Rham

Les dues parts es demostren de manera molt semblant. La 1a part és conceptualment més interessant i només demostrarem aquesta 1a part.

La demo es fa en diverses etapes:

1) <u>M és $\mathbb{R}^n$</u>

En aquest cas, ja sabem que la cohomologia singular i la cohomologia de de Rham coincideixen i són trivials. Per tant, el teorema és cert en aquest cas.

2) <u>$M = U \cup V$ oberts i el teorema és cert per a $U, V, U \cap V$</u>

Aquest cas es resol per Mayer-Vietoris. Ja sabem que la cohomologia singular i la cohomologia de de Rham compleixen Mayer-Vietoris.

3) <u>$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ on $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ són oberts amb adherència compacta i el teorema és cert per a cada U_i</u>

Aquest punt és delicat perquè necessita un argument de pas al límit que deixem per a un apèndix.

4) <u>M és un obert de $\mathbb{R}^n$</u>

Podem recobrir M per boles obertes: $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $U_i \cong \mathbb{R}^n$, $\overline{U_i} \subset M$

Prenem $V_k = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Aleshores $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$. Per l'apartat 2, el teorema és cert per a cada V_k. Per l'apartat 3, el teorema és cert per a M.

5) <u>M arbitrària</u>

Ho fem igual que a l'apartat 4: prenem $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$: cada U_i és difeomorf a un obert de $\mathbb{R}^n$. //

[En la prova precedent un cert argument de pas al límit. Discutim quins són els ingredients per raonar i completar aquell apartat.

a) El concepte de límit invers d'espais vectorials i complexos

$$A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \cdots \qquad \underline{\text{sistema invers}}$$

$$\varprojlim \{A_i\} = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \prod A_i \mid x_{i+1} \longmapsto x_i \}$$

b) $S^*(M) \cong \varprojlim S^*(U_i)$; $\Omega^*(M) \cong \varprojlim \Omega^*(U_i)$

Aquestes afirmacions són senzilles de veure.

c) Sabem que $H^*(S^*U_i; \mathbb{R}) \cong H^*(\Omega^* U_i)$. Per tant, cal saber com es comporten la cohomologia i $\varprojlim$. És un problema algebraic:

Siguin $\{A_i\} \xrightarrow{\varphi} \{B_i\}$ un homomorfisme de sistemes inversos de complexos i suposem que $\varphi_i^*: H^*A_i \xrightarrow{\cong} H^*B_i$ per tot i.

Implica això que

$$H^*(\varprojlim A_i) \cong H^*(\varprojlim B_i) \quad ?$$

La resposta és que, en general, no. Cal una condició tècnica, anomenada condició de Mittag-Leffler:

$\{A_n\}$ compleix la condició de M-L si "la imatge de $A_r \subset A_n$ és estable si r és gran". És a dir,

$$\forall n \quad \exists\, m(n) \text{ tal que } \operatorname{im}(A_r \longrightarrow A_n) = \operatorname{im}(A_{m(n)} \longrightarrow A_n) \ \forall r \geq m(n).$$

Aleshores, tot es redueix a veure que (amb la hipòtesi que els U_i tenen adherència compacta), $\{S^*U_i\}$ i $\{\Omega^*U_i\}$ compleixen la condició de Mittag-Leffler.]

5. El teorema de dualitat de Poincaré

1. Enunciat del teorema de dualitat

Siguin V, W espais vectorials. Una dualitat entre V i W és una aplicació

$$\begin{aligned} V \times W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto \langle a,b \rangle \end{aligned}$$

tal que l'aplicació induïda

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow W^* \\ a &\longmapsto \langle a, - \rangle \end{aligned}$$

sigui un isomorfisme.

Sigui M una varietat compacta orientada. En particular, té sentit parlar de $\int_M \omega$ si ω és una n-forma, $n = \dim M$. És més, si $x \in H^n(M)$, $x = [\omega]$, podem definir

$$\int_M x = \int_M \omega \in \mathbb{R}$$

i això està ben definit perquè si $x = [\omega']$, tenim $\omega' = \omega + d\eta$ i

$$\int_M \omega' = \int_M \omega + \int_M d\eta = \int_M \omega$$

perquè $\int_M d\eta = 0$ pel teorema de Stokes. Així ens permet definir

$$\begin{aligned} H^i M \times H^{n-i} M &\xrightarrow{\ \Phi\ } \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \int_M x \wedge y \end{aligned}$$

(recordem que el producte exterior també està ben definit a la cohomologia de de Rham.)

Aleshores, el teorema de dualitat és aquest:

Teorema de dualitat de Poincaré : ϕ és una dualitat.

Com a conseqüència immediata tenim

a) $H^i M \cong H^{n-i} M$ $\forall i$, és a dir, la cohomologia d'una varietat compacta és capicua.

b) $H^n M \cong \mathbb{R}$; la forma d'orientació ω dóna un generador.

c) la hipòtesi que M sigui compacta és necessària, ja que $H^n(\mathbb{R}^n) = 0$

d) la hipòtesi que M sigui orientable és necessària. En efecte, només cal recordar que $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$.

e) si $\dim M$ és senar $\Rightarrow$ $\chi(M) = \sum (-1)^i \dim H^i(M) = 0$.

2. Suports compactes

Volem demostrar el teorema de dualitat de manera similar a com vam demostrar el teorema de de Rham. Per tant, hem d'utilitzar varietats no compactes per a les quals la versió del teorema que hem enunciat no és vàlida. Cal utilitzar suports compactes.

Si $\omega \in \Omega^* M$ és una forma diferencial, definim el suport de ω com

$$\operatorname{supp} \omega = \overline{\{ x \in M \mid \omega_x \neq 0 \}}$$

Posem

$$\Omega^*_c M = \{ \text{formes diferencials sobre } M \text{ amb suport compacte} \}$$

És clar que

$$\operatorname{supp}(\omega + \omega') \subset \operatorname{supp} \omega \cup \operatorname{supp} \omega'$$
$$\operatorname{supp}(\omega \wedge \omega') \subset \operatorname{supp} \omega \cap \operatorname{supp} \omega'$$
$$\operatorname{supp}(d\omega) \subset \operatorname{supp} \omega$$

Per tant, $\Omega^*_c(M) \subset \Omega^*(M)$ és un subcomplex; és també un ideal.

En particular, té sentit definir la cohomologia (de de Rham) de M amb suports compactes com

$$H^*_c(M) := H^*(\Omega^*_c(M))$$

i tenim

$$H^*_c(M) \longrightarrow H^*(M)$$

Estudiem les propietats d'aquesta cohomologia amb suports compactes.

1) Si M és compacta, $H^*_c(M) = H^*(M)$, evidentment.

2) Si M és (connexa i) no compacta, aleshores $H^0_c(M) = 0$. Evident.

3) naturalitat: H^*_c és natural respecte d'aplicacions pròpies.

$\varphi: M \to N$ és pròpia si l'antiimatge de tot compacte és un compacte. En aquest cas, φ^* envia formes amb suport compacte a formes amb suport compacte; tenim

$$\varphi^*: H^*_c(N) \longrightarrow H^*_c(M)$$

En particular, si φ és un difeo, φ és pròpia i tenim iso

$$\varphi^*: H^*_c(N) \xrightarrow{\cong} H^*_c(M)$$

4) Cohomologia a suport compacte de $\mathbb{R}^n$

Considerem $\mathbb{R}^n = S^n - \{p\} \hookrightarrow S^n$. Considerem la successió exacta de complexos

$$0 \longrightarrow \Omega^*_\infty(S^n) \longrightarrow \Omega^*(S^n) \xrightarrow{\pi} \Omega^*(S^n) / \Omega^*_\infty(S^n) \longrightarrow 0$$

on $\Omega^*_\infty(S^n)$ està format per les formes sobre S^n que s'anul·len a un entorn de p. Obtenim:

a) $\Omega^*_\infty(S^n) = \Omega^*_c(\mathbb{R}^n)$

b) $H^i(\Omega^* S^n / \Omega^*_\infty S^n) = 0$. (Exercici) $(i>0)$

$H^0(\Omega^* S^n / \Omega^*_\infty S^n) \cong \mathbb{R}$

Apliquem la successió exacta llarga de cohomologia. Obtenim

$$H^i_c(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H^i(S^n) \qquad i \geq 2$$

Per tant, si $n>0$

$$H^i_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & i<n \\ \mathbb{R} & i=n \end{cases}$$

5) Successió exacta de Mayer-Vietoris

Si $M = U_1 \cup U_2$, oberts, tenim una successió exacta de tipus Mayer-Vietoris que relaciona la cohomologies amb suport compacte de $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ i M. L'hem de discutir una mica perquè resulta pus vagi contra-natura.

Si $U \subset V$ són oberts i $\omega \in \Omega^*_c(U)$, podem estendre la forma ω a una forma $\tilde{\omega} \in \Omega^*_c(V)$ definint $\tilde{\omega}_x = 0$ si $x \notin \operatorname{supp} \omega$. És a dir, $\Omega^*_c(-)$ es comporta d'una forma covariant pel que fa a la inclusió d'un obert. Això ens permet fer

$$0 \to \Omega^*_c(U_1 \cap U_2) \to \Omega^*_c U_1 \oplus \Omega^*_c U_2 \longrightarrow \Omega^*_c(M) \to 0$$

que és una successió exacta de complexos. Aquesta successió exacta curta de complexos donarà lloc a una successió exacta llarga natural de cohomologia:

$$\cdots \to H^i_c(U_1 \cap U_2) \to H^i_c(U_1) \oplus H^i_c(U_2) \to H^i_c(M) \longrightarrow H^{i+1}_c(U_1 \cap U_2) \to \cdots$$

que anomenarem successió exacta de Mayer-Vietoris.

6) Integració

És clar que, en cas que M no sigui compacta, i $\omega \in \Omega_c^*(M)$, té sentit integrar ω sobre M, $\int_M \omega$.

Vist tot això, podem ara enunciar la versió del teorema de dualitat que és vàlida per a varietats orientades arbitràries:

Teorema de dualitat de Poincaré. Si M és una varietat orientada

$$H^i M \times H_c^{n-i}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \int_M x \wedge y$$

és una dualitat.

Observem que si ω_2 té suport compacte, $\omega_1 \wedge \omega_2$ també, encara que ω_1 no en tingui.

Dit d'una altra manera:

$$D : H^*(M) \xrightarrow{\cong} (H_c^*(M))^*$$
$$x \longmapsto \{ y \mapsto \int_M x \wedge y \}$$

3. Demostració del teorema de dualitat

Per demostrar el teorema de dualitat, seguirem els mateixos passos que vam seguir per demostrar el teorema de de Rham.

1. $M = \mathbb{R}^n$

Hem calculat $H^*(\mathbb{R}^n)$ i $H_c^*(\mathbb{R}^n)$. Només cal veure que

$$H_c^n M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_M x$$

és $\neq 0$. Sigui f una funció $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $f \geq 0$, $f(0) > 0$ i $f(x) = 0$ si $\|x\| > 1$. Aleshores, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n > 0$ i si $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, tenim que la imatge de $[\omega]$ és $\neq 0$.

2. <u>$M = U \cup V$ oberts i el teorema és cert per a $U, V, U \cap V$</u>

Aquest cas es resol amb Mayer-Victoris. D'una banda tenim

$$\cdots \to H^i_c(U \cap V) \to H^i_c U \oplus H^i_c V \to H^i_c M \to H^{i+1}_c(U \cap V) \to \cdots$$

i de l'altra, tenim

$$\cdots \leftarrow H^{n-i}(U \cap V) \leftarrow H^{n-i}(U) \oplus H^{n-i} V \leftarrow H^{n-i} M \leftarrow H^{n-i-1}(U \cap V) \leftarrow \cdots$$

Dualitzem aquesta 2ª successió exacta i connectem les dues successions amb la dualitat de Poincaré:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H^i_c(U \cap V) & \to & H^i_c U \oplus H^i_c V & \to & H^i_c M & \to & H^{i+1}_c(U \cap V) & \to \cdots \\
& D \big\downarrow \cong & & D \big\downarrow \cong & & \big\downarrow & & D \big\downarrow \cong & \\
\cdots \to & H^{n-i}(U \cap V)^* & \to & H^{n-i} U^* \oplus H^{n-i} V^* & \to & H^{n-i} M^* & \to & H^{n-i-1}(U \cap V)^* & \to \cdots
\end{array}$$

Aquest diagrama és commutatiu (això requereix demostració). Pel lema dels 5, tenim el que volem.

3. <u>Si $\mathcal{U}$ és una família d'oberts de M, tancada per interseccions finites i el teorema és cert per a cada obert de $\mathcal{U}$, aleshores, és cert per a unions finites d'oberts de $\mathcal{U}$.</u>

Evident per l'apartat anterior: inducció.

4. <u>Si $\mathcal{U}$ és una família d'oberts de M i el teorema és cert per a cada $U \in \mathcal{U}$, aleshores el teorema és cert per a unions disjuntes $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $U_i \in \mathcal{U}$.</u>

Sigui $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ una unió disjunta d'elements de $\mathcal{U}$. Tenim

$$H^* U \cong \prod_i H^* U_i$$

$$H^*_c U \cong \bigoplus_i H^*_c U_i$$

dualitzant, tenim

$$(H^*_c U)^* \cong \prod_i (H^* U_i)^*$$

i ara és elemental veure que el teorema de dualitat val per a U.

5. El Teorema és cert si M és un obert de $\mathbb{R}^n$

Sigui $\mathcal{U}$ la família de tots els cubs oberts de $\mathbb{R}^n$. Com que un cub obert és difeomorf a $\mathbb{R}^n$, el teorema és cert per a cada element de $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}$ és tancada per intersecció. Per l'apartat 3, el teorema és cert per a $\mathcal{U}_f$ = {unions finites d'elements de $\mathcal{U}$}. Per l'apartat 4, el teorema és cert per a $(\mathcal{U}_f)_\infty$ = {unions infinites numerables d'elements disjunts de $\mathcal{U}_f$} i, altre cop per l'apartat 3, el teorema és cert per a $((\mathcal{U}_f)_\infty)_f$. Una mica de Topologia general ens diu que tot obert de $\mathbb{R}^n$ és a $\mathcal{U}_{f\infty f}$.

6. El teorema és cert.

Sigui $\mathcal{U}$ la família dels oberts de M que són difeomorfs a oberts de $\mathbb{R}^n$. El teorema és cert per a cada element de $\mathcal{U}$: $M \in ((\mathcal{U}_f)_\infty)_f$. Per tant, el teorema és cert per a M. //

6. El grup fonamental

1. Llaços a un espai

Sigui X un espai en el qual hem escollit un "punt base" $x_0 \in X$. En direm "espai puntejat". Un llaç a X és una aplicació contínua

$$\sigma : [0,1] \longrightarrow X$$

tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$.

Els llaços es poden "multiplicar": Donats llaços $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to X$, definim

$$\sigma_1 * \sigma_2 : [0,1] \longrightarrow X$$

$$(\sigma_1 * \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Aquesta operació no té bones propietats. Per exemple, no és associativa. Definim ara una relació d'equivalència entre llaços. Direm que $\sigma \sim \tau$, "σ és homotòpic a τ" si existeix

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

tal que

$$F(0,t) = \sigma(t) \qquad \forall t$$
$$F(1,t) = \tau(t) \qquad \forall t$$
$$F(s,0) = F(s,1) = x_0 \qquad \forall s$$

És a dir, cada $F_s = F(s,-)$ és un llaç, $F_0 = \sigma$, $F_1 = \tau$ i F_s depèn contínuament de s.

<u>Definició</u> $\pi_1(X) = $ llaços de $X/\sim$. [Això és un abús de llenguatge perquè hauríem de dir $\pi_1(X, x_0)$.]

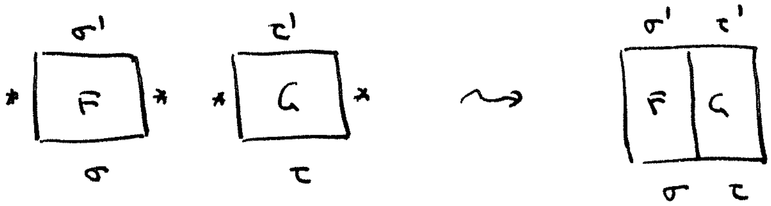
El producte de llaços dóna un producte de classes d'equivalència:

$$[\sigma]\cdot[\tau] = [\sigma * \tau]$$

Per veure que això està ben definit, cal comprovar que no depèn dels representants escollits, és a dir

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\sim\sigma'\\ \tau\sim\tau'\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \sigma*\tau \sim \sigma'*\tau'.$$

Gràficament:



Hem de ser capaços de traduir això en una definició de l'homotopia H entre $\sigma * \tau$ i $\sigma' * \tau'$: És immediat:

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'interès de passar a $\pi_1(X)$ és que ara el producte de llaços sí que té molt bones propietats:

<u>Teorema</u> $\pi_1(X)$, amb el producte de llaços, és un grup

Demo: Hem de veure: a) existència d'element neutre. b) propietat associativa; c) existència d'invers.

L'element neutre és

$$\varepsilon : [0,1] \longrightarrow X$$

$$\varepsilon(t) = x_0 \quad \forall t.$$

i l'invers d'un llaç és

$$\sigma^{-1} : [0,1] \longrightarrow X$$

$$\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$$

El que resta és de veure, però emprant com per definir homotopies

$$\sigma * \varepsilon \sim \sigma \sim \varepsilon * \sigma$$

$$\sigma * \sigma^{-1} \sim \varepsilon \sim \sigma^{-1} * \sigma$$

$$\sigma * (\tau * \gamma) \sim (\sigma * \tau) * \gamma$$

[Observem que no afirmem pas que $\pi_1 X$ compleixi la propietat commutativa.] //

$\pi_1 X$ és el grup fonamental de X o també el primer grup d'homotopia de l'espai X.

$\pi_1 X$ compleix una propietat dita de naturalitat: si $f : X \to Y$ és una aplicació contínua (d'espais puntejats, és a dir, $f(x_0) = y_0$), aleshores

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$f_*(\sigma) = f \circ \sigma$$

i com que $\sigma \sim \tau \Rightarrow \quad f \circ \sigma \sim f \circ \tau$, tenim

$$f_* : \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 Y$$

Es compleixen les propietats següents:

1) f_* és un homomorfisme de grups: $f_*(xy) = (f_* x)(f_* y)$

2) Si $f \sim g$, aleshores $f_* = g_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y$.

Aquí, $f \sim g$ vol dir que f i g són homòtopes com a aplicacions entre espais puntejats, és a dir, existeix

$$F : I \times X \longrightarrow Y$$

$$F(0,-) = f, \quad F(1,-) = g, \quad F(t, x_0) = y_0 \quad \forall t.$$

3) Com a conseqüència, si $X \simeq Y$ (com a espais puntejats), tenim que $\pi_1 X \cong \pi_1 Y$ com a grups.

4) Si X_0 és el component connex de X que conté el punt base x_0, aleshores, $\pi_1 X_0 \xrightarrow{\cong} \pi_1 X$. Evident perquè un llaç no pot sortir de X_0.

5) $\pi_1 (X \times Y) = \pi_1 X \times \pi_1 Y$, producte directe de grups.

Això és evident perquè

$$\sigma : [0,1] \longrightarrow X \times Y \begin{array}{l} \xrightarrow{p_1} X \\ \xrightarrow[p_2]{} Y \end{array}$$

i σ està determinat per $p_1 \circ \sigma$, $p_2 \circ \sigma$ que són llaços de X i Y, respectivament.

6) <u>El paper del punt base</u> En la majoria d'aplicacions pràctiques el punt base x_0 no hi juga cap paper, degut a això:

<u>Proposició</u> Si $x_0, x_1 \in X$ i hi ha un camí que uneix x_0 i x_1, aleshores $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

Demo: Sigui $\gamma : [0,1] \to X$ amb $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\sigma] &\longmapsto [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma] \end{aligned}$$

és morfisme que està ben definit, és homomorfisme de grups i és bijectiu amb invers $[\tau] \longmapsto [\gamma * \tau * \gamma^{-1}]$. //

Un espai X direm que és <u>simplement connex</u> si és arc-connex i $\pi_1(X, x_0) = 1$. Observem que, com que X és arc-connex, si $\pi_1(X, x_0) = 1$ per un $x_0 \in X$, és $\pi_1(X, x) = 1$ per tot $x \in X$.

2. El grup fonamental de la circumferència

Per calcular $\pi_1(S^1)$ $(= \pi_1(S^1, 1))$ utilitzarem una aplicació que és molt important:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t}$$

Observem que aquesta aplicació és contínua i exhaustiva. No és injectiva. De fet, si $p(t) = z$, aleshores

$$p^{-1}(z) = t + \mathbb{Z}.$$

Observem que p és un homomorfisme de grups: $p(t_1 + t_2) = p(t_1)\,p(t_2)$. i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ és el seu nucli. Per tant, com a grups:

$$S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

També: S^1 té la topologia quocient per p. i S^1 es pot entendre també com el quocient de l'espai $\mathbb{R}$ per l'acció del grup $\mathbb{Z}$,

$$n \cdot t := t + n$$

que és una acció pròpiament discontínua.

Una altra propietat fonamental de l'aplicació p és aquesta:

<u>Proposició</u> Tot $x \in S^1$ té un entorn obert U tal que

$$p^{-1} U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

on els V_i són oberts de $\mathbb{R}$, disjunts dos a dos i tals que

$$p_{|V_i} : V_i \xrightarrow{\cong} U$$

(Ho demostrarem després).

Aquesta propietat és tan important que dóna lloc a una <u>definició</u>

<u>Definició</u> $\pi : Y \longrightarrow X$ és un <u>espai recobridor</u> si π és contínua i exhaustiva: tot $x \in X$ té un entorn obert U tal que $\pi^{-1}U = \bigcup_{i \in I} V_i$ on els V_i són oberts disjunts dos a dos i tals que

$$\pi|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\cong} U_i \qquad \text{(homeomorfisme)}$$

La proposició anterior ens diu que $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ és un espai recobridor. Això és un cas particular d'aquest teorema més general:

<u>Proposició</u> Si G actua de manera propiament discontínua sobre X, aleshores $X \xrightarrow{\pi} X/G$ és un espai recobridor.

<u>Demo:</u> Sigui $y \in X/G$, $y = \pi(x)$, $x \in X$. Per definició d'acció propiament discontínua, x té un entorn obert U tal que si $g, g' \in G$

$$gU \cap g'U \neq \emptyset \implies g = g'$$

Considerem $\pi(U)$. Tenim:

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{ x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U) \} \\
&= \{ x \in X \mid G\cdot x = G \cdot z \text{ , per algun } z \in U \} \\
&= \{ x \in X \mid x = g \cdot z \text{ per alguns } z \in U, g \in G \} \\
&= \{ x \in X \mid x \in g \cdot U \text{ per algun } g \in G \} \\
&= \bigcup_{g \in G} g \cdot U
\end{aligned}$$

En particular, $\pi(U)$ és un obert de X/G i és un entorn obert de y. Aleshores, tenim expressat $\pi^{-1}(\pi(U))$ com a unió disjunta d'oberts i $\pi : g \cdot U \longrightarrow \pi(U)$ és contínua, oberta i bijectiva. (nota: π és oberta pel mateix raonament anterior.) //

<u>Exemples:</u>

1) $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ és un espai recobridor

2) $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ és un espai recobridor

3) $S^3 \longrightarrow L(p,q)$ (espais lenticulars) és un espai recobridor.

Quina relació té tot això amb el grup fonamental? Molta!

<u>Teorema</u> Sigui $\pi : Y \to X$ un espai recobridor. Aleshores:

a) Si $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ és un camí de X que comença a x i $y \in Y$ és tal que $\pi(y) = x$, aleshores σ pot pujar-se a un únic camí $\tilde{\sigma}$ de Y que comença a y.

b) Si $\sigma_1 \sim \sigma_2$ són camins <u>equivalents</u> de X i $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ són les seves elevacions a Y amb $\tilde{\sigma}_1(0) = \tilde{\sigma}_2(0)$, aleshores $\tilde{\sigma}_1$ i $\tilde{\sigma}_2$ acaben al mateix punt.

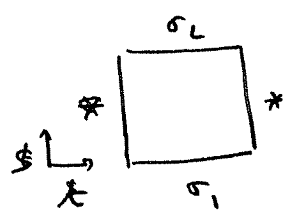
La part a és el <u>Teorema d'elevació de camins</u>. La part b és el <u>teorema de monodromia</u>.

$\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ són <u>camins equivalents</u> si existeix

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

contínua tal que

$$F(0,t) = \sigma_1(t)$$
$$F(1,t) = \sigma_2(t)$$
$$F(s,0) = \sigma_1(0)$$
$$F(s,1) = \sigma_1(1)$$



No demostrem el teorema. (De fet, si hi hauria prou temps demostrar-lo per a $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ perquè la demo general és pràcticament la mateixa. La demo de la part b és també pràcticament la mateixa de la demo de la part a.

Aquest teorema ens permet calcular alguns grups fonamentals, amb un raonament d'aquest tipus:

Suposem que $\pi : Y \longrightarrow X$ és un espai recobridor i fem la hipòtesi que Y és un espai simplement connex. Sigui x el punt base de X. Definim la fibra sobre x com

$$F_x := \pi^{-1}(x)$$

Aleshores, podem definir

$$\phi : \pi_1(X) \longrightarrow F_x$$

d'aquesta manera. Sigui y el punt base de Y. Tenim $\pi(y) = x$. Si σ és un llaç de X, considerem la seva elevació a Y que comenci a y. Sigui $\tilde{\sigma}$ aquesta elevació. És clar que $\tilde{\sigma}(1) \in F_x$. Definim

$$\phi([\sigma]) = \tilde{\sigma}(1)$$

Aleshores, el teorema de monodromia ens diu que ϕ està ben definida. ϕ té una inversa:

$$\psi : F_x \longrightarrow \pi_1 X$$

definida així. Sigui $z \in F_x$ i sigui τ un camí de Y que uneixi y amb z. Aleshores, $\pi(\tau)$ és un llaç de X. Definim

$$\psi(z) = [\pi(\tau)]$$

Hem de veure que ψ està ben definit, és a dir que no depèn de l'elecció del camí τ. Si τ' és un altre camí, com que estem suposant que Y és simplement connex, τ i τ' seran equivalents. Per tant, $[\pi(\tau)] = [\pi(\tau')]$. És clar que ϕ i ψ són inversa una de l'altra.

Corol·lari: Si X és simplement connex i G actua sobre X de manera pròpiament discontínua, aleshores, $\pi_1(X/G) \cong G$.

Demo. Sabem que $X \longrightarrow X/G$ és un espai recobridor i que tenim una bijecció

$$\phi : \pi_1(X/G) \longrightarrow F_*$$

on F_* és la fibra sobre el punt base, que és $F_* = G \cdot x$ amb x el punt base de X. Només cal veure que ϕ és homomorfisme de grups.

Siguin σ, τ llaços de X/G. Sigui $\tilde{\sigma}$ l'elevació de σ que comença a x i acaba a $\phi([\sigma]) = g_1 \cdot x$, $g \in G$. Sigui $\tilde{\tau}$ l'elevació de τ que comença a x i acaba a $\phi([\tau]) = g_2 \cdot x$, $g_2 \in G$. Aleshores, $g_1 \cdot \tilde{\tau}$ és l'elevació de τ que comença a $g_1 \cdot x$ i. I $\tilde{\sigma} * (g_1 \cdot \tilde{\tau})$ és l'elevació de $\sigma * \tau$ que comença a x. Per tant,

$$[\tilde{\sigma} * (g_1 \cdot \tilde{\tau})](1) = \phi([\sigma] \cdot [\tau])$$

$$\shortparallel$$

$$(g_1 \cdot \tilde{\tau})(1) = g_1 \cdot g_2 x$$

$\Rightarrow \phi([\sigma] \cdot [\tau]) = \phi[\sigma] \; \phi[\tau]$. //

Corol·lari

a) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

b) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/_2$ $(n > 1)$

c) $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}/_p$

Els apartats b i c necessiten que S^n sigui simplement connex si $n > 1$. Això ho veurem a l'apartat següent.

L'isomorfisme $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ té una interpretació geomètrica important.

Si σ és un llaç de S^1, definim el seu grau com

$$\phi : \pi_1(S^1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

$$\text{grau}(\sigma) = \phi([\sigma])$$

El grau ens indica el nombre de voltes que fa σ.

3. El grup fonamental de S^n

Teorema S^n és simplement connexa si $n>1$.

Això és un cas particular d'aquest teorema més general:

Teorema Sigui $X = U \cup V$ tals que

a) U, V són oberts de X

b) U, V són espais simplement connexos

c) $U \cap V$ és un espai arc-connex ($\neq \phi$)

Aleshores, X és simplement connex.

En el cas de l'esfera S^n prenem $U = S^n -$ pol nord, $V = S^n -$ pol sud, que són espais contràctils. En el cas de S^1, falla la condició c.

Demostració: La idea és simple: si σ és un llaç de X, descomposem

$$\sigma \sim \sigma_1 * \cdots * \sigma_n$$

on cada σ_i és un llaç de U o de V. Com que U i V són simplement connexos, cada σ_i és equivalent a un llaç trivial. Per tant, σ és equivalent a un llaç trivial. Els detalls de com es duu a la pràctica aquest programa es poden llegir al Kosniowski. //

4. Grup fonamental : orientació

Sigui M una varietat (connexa). Hi ha relació entre l'orientabilitat de M i el seu grup fonamental. Tenim:

Teorema Si M no és orientable, aleshores hi ha un epimorfisme

$$\pi_1 M \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$$

El recíproc no és cert: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ i en canvi S^1 és orientable.

Corol·lari Si M és simplement connexa, M és orientable.

Demostració del Teorema: Si M és una varietat, podem construir el "espai recobridor d'orientacions"

$$\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$$

que és un espai recobridor de M de dos fulls, és a dir, té una acció de $\mathbb{Z}/2$ de manera que

$$M = \tilde{M}/\mathbb{Z}/2$$

$\tilde{M}$ es defineix així:

$$\tilde{M} = \{ (x, \iota) \mid x \in M \text{ , } \iota \text{ és una orientació de } T_x M \}$$

Tenim $\pi : \tilde{M} \to M$ donat per $\pi(x, \iota) = x$. Aleshores:

a) $\tilde{M}$ és una varietat diferenciable

Això és immediat perquè una carta local de M a l'entorn de x ens dona una carta local de $\tilde{M}$ a l'entorn de (x, ι) i una carta local de $\tilde{M}$ a l'entorn de $(x, -\iota)$

b) $\tilde{M}$ té una acció de $\mathbb{Z}/2$:

$$(-1) \cdot (x, \iota) = (x, -\iota)$$

c) $M = \tilde{M}/\mathbb{Z}/_2$.

Si M és connexa, $\tilde{M}$ pot ser connexa o no. El punt important és que

$$\tilde{M} \text{ connexa} \iff M \underline{\text{no}} \text{ orientable.}$$

En efecte, si M és orientable, escollim a cada punt x una orientació ι_x. Aleshores:

$$U = \{ (x,\iota) \in \tilde{M} \mid \iota = \iota_x \}$$

$$V = \{ (x,\iota) \in \tilde{M} \mid \iota = -\iota_x \}$$

i tenim $\tilde{M}$ com a unió disjunta de dos oberts, amb la qual cosa $\tilde{M}$ no és connexa.

Recíprocament, si $\tilde{M} = U \cup V$ unió disjunta de dos oberts $\neq \emptyset$, aleshores, com que π és oberta, tenim $M = \pi U \cup \pi V$, unió de dos oberts. Com que π és també tancada, πU i πV són oberts i tancats de M. Com que M és connexa, $\pi U = \pi V = M$. Tenim, doncs, un difeomorfisme $\pi : U \cong M$.
Però és evident que $\tilde{M}$ és orientable: n'hi ha prou amb prendre a (x,ι) l'orientació ι. Aleshores, U és també orientable i M també. //

Recordem la situació

$$X \longrightarrow X/G$$

en la qual havíem construït un homomorfisme

$$\phi : \pi_1(X/G) \longrightarrow G$$

tal que, si X és simplement connex, és un isomorfisme. Si X no és simplement connex, també tenim ϕ, però ara no podem demostrar que sigui isomorfisme. Però la demo que diu que és epi es conserva.
En el nostre cas, tenim, si M és no orientable, $\pi_1 M \twoheadrightarrow G = \mathbb{Z}/_2$ //

5. π_1 i H_1

Si X és un espai, hem associat a X, de manera functorial, dos grups definits a partir de camins a X:

$$\pi_1 X \quad \text{i} \quad H_1 X$$

$\pi_1 X$: llaços de X amb origen i final al punt base, mòdul la relació d'equivalència de ser homòtops. Operació: la concatenació de llaços.

$H_1 X$: 1-cicles / 1-vores.

Aquests dos grups presenten semblances i diferències. Per exemple:

a) $\pi_1 X$ necessita un punt base. $H_1 X$ no el necessita

b) $H_1 X$ és sempre abelià. $\pi_1 X$ pot no ser-ho (no hem posat cap exemple. N'hi hauria prou amb trobar un grup no abelià que actuï de manera pròpiament discontínua sobre $\mathbb{R}^n$.... l'ampolla de Klein)

Hi ha una relació entre aquests dos grups?

<u>Teorema</u> $H_1 X$ és isomorf a l'abelianització de $\pi_1 X$.

Recordem que si G és un grup, el seu abelianitzat és

$$G_{ab} = G / \langle x y x^{-1} y^{-1} \rangle \twoheadleftarrow G$$

és a dir, el grup abelià que s'obté fent el quocient de G pel subgrup normal generat pels "commutadors" $x y x^{-1} y^{-1}$, $x, y \in G$. És a dir, per tot $x, y \in G$, <u>forcem</u> $xy = yx$.

<u>Corol·lari</u> $H_1 X$ està determinat per $\pi_1 X$.

<u>Demo del teorema</u> : Kosniowski, teorema 29.16 //