UN CURS DE GEOMETRIA LINEAL

JAUME AGUADÉ

Un curs de geometria lineal

Jaume Aguadé

ISBN: 978-84-09-12303-2

L'autor d'aquesta obra és Jaume Aguadé Bover
Jaume.Aguade@uab.cat
jaume@jaumeaguade.cat

Versió 1.2
9 de març de 2021

55è aniversari de *la Caputxinada*, reunió clandestina,
severament reprimida, de més de 450 antifranquistes (estudiants,
professors i intel·lectuals), amb motiu de l'assemblea constitutiva del
Sindicat Democràtic d'Estudiants de la Universitat de Barcelona.

Aquesta obra es pot descarregar del **Dipòsit Digital de la UAB**:
https://ddd.uab.cat

Per a la Núria, la Júlia i en Guim.

Gener benigne. Sota
molt d'aire verd, les coses
avui no es fan esquerpes
ni el lloc és àrid. Mira:
tres llimones, posades
a l'aspre de la llosa.
Perquè es mullen de sol
i pots considerar
sense dubte ni pressa
la mètrica senzilla
que les enllaça, et penses
que signifiquen res?
Mira, i ja han estat prou
per tu.

Gabriel Ferrater, *Tres llimones*

every sufficiently beautiful object
is connected to all others.

John Baez, *From the icosahedron to* E_8

in the mathematics of the universe, beauty
helps tell us whether things are false or true.

Martin Amis, *The information*

un auteur ne nuit jamais tant à ses lecteurs
que quand il dissimule une difficulté.

Évariste Galois

Índex

Pròleg

Aquest llibre vol ser un curs de geometria lineal apropiat per a ser impartit en un semestre universitari i, en conseqüència, la seva mida està acotada pel que realment es pot explicar en les quaranta o cinquanta hores que pot durar un d'aquests cursos. S'ha anat gestant lentament al llarg dels diversos i heterogenis cursos de geometria que l'autor ha impartit en els darrers trenta anys. No és un curs senzill —ja va dir Euclides que no hi ha camí reial cap a la geometria— i demana al lector una complicitat constant i una lectura reflexiva i atenta.

Com que el corpus de la multi-mil·lenària geometria és inabastable, la tasca de planejar un curs que sigui assequible i coherent, engrescador i formatiu sembla condemnada a la frustració. Aquest llibre s'hi enfronta amb una intenció clara: donar prioritat als conceptes més fonamentals, a les idees centrals; guiar el lector quan hi ha una dificultat i deixar-lo caminar segons el seu albir quan el camí es torna planer i poc perdedor.

L'autor milita entre els que creuen que quan la tecnologia avança tan de pressa com ho fa ara, només té sentit basar l'ensenyament en la creació i el desenvolupament de les estructures mentals on s'aniran emmagatzemant la informació i les capacitats que, en cada moment futur, serà necessari posseir. Dit més planerament: ensenyar Euclides seria força més útil ara que voler ensenyar —com reclamen unes veus que semblen molt segures d'elles mateixes— les «noves tecnologies», la principal característica de les quals és que s'aniran convertint en «velles tecnologies» a gran velocitat.

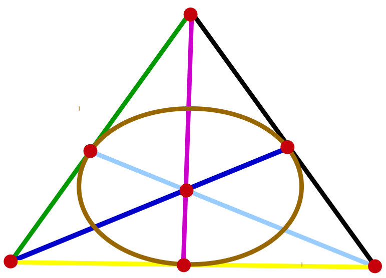
El registre de llenguatge que s'ha utilitzat no és el dels treballs d'investigació —i de massa textos docents— que es caracteritza per l'absència de contingut heurístic i per l'obsessiva numeració de totes les definicions, proposicions, lemes, teoremes, seccions, subseccions, *ad nauseam*. M'estimo més retrobar un llenguatge matemàtic que recuperi el valor dialèctic del pensament matemàtic i que, sense renunciar al rigor, utilitzi amb desimboltura els recursos que els llenguatges naturals posen al nostre abast. Es tracta, en definitiva, que l'acumulació d'informació minuciosa no ens obscureixi el coneixement.[1]

[1] Un altre instrument clàssic que l'estil actual condemna i que jo m'he esforçat en recu-

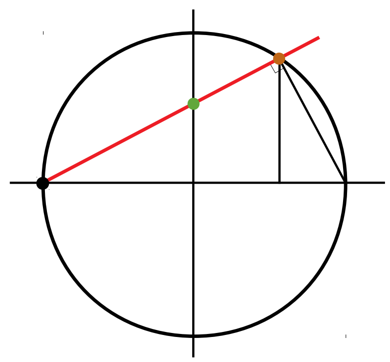
Per a molts estudiants, la geometria és una assignatura o, com a màxim, una de les diverses branques de les matemàtiques. Potser els podem explicar que és una de les branques principals, la més noble, la més antiga... El cert és que la geometria és molt més que tot això i ho podríem justificar —si fóssim prou competents— amb els arguments de grans filòsofs com Kant o Russell. En tot cas, el que no podem negar és que el nostre cervell sembla que estigui dissenyat —*hardwired*— per organitzar espacialment les sensacions que rep i, al mateix temps, és meravellosament eficient en processar informació quan està codificada de manera geomètrica. Posem dos exemples que, de fet, apareixen com a exercicis d'aquest llibre:

- Un departament universitari vol organitzar 7 màsters diferents. Cada màster ha de tenir 3 mòduls i dos màsters no poden compartir més d'un mòdul. Només hi ha professorat per impartir 7 mòduls. Com pot fer-ho?

  Com que el problema és prou senzill, es pot trobar una solució per assaig i error, però també és cert que la simple inspecció d'aquest objecte geomètric ens fa evident la solució del problema:

- Els nombres 3, 4 i 5 tenen la propietat que són primers entre ells i compleixen $3^2 + 4^2 = 5^2$, la mateixa propietat que tenen les ternes $(5, 12, 13)$ i $(8, 15, 17)$. Trobeu una altra terna amb aquesta propietat. Trobeu-les totes.
  Aquest problema sembla més difícil que l'anterior i, si bé per assaig i error potser podríem trobar alguna altra terna, sembla impossible anar gaire més enllà a no ser que, com hem fet abans, poguéssim traduir la propietat aritmètica $a^2 + b^2 = c^2$ en alguna configuració geomètrica que ens permeti *entendre* què significa aquesta propietat.

perar és el que constitueixen les notes a peu de pàgina. Aquest llibre n'és ple i crec que ens ajuden a mantenir un llenguatge més distès i àgil.

> Els detalls d'aquesta interpretació geomètrica del problema que ens condueix fàcilment a la seva solució i que, més important encara, ens genera una comprensió profunda del que hi ha al darrere de la pregunta que s'ha formulat, utilitzen la circumferència de la figura adjunta i els podeu trobar a l'últim exercici d'aquest curs.[2]

En resum, els éssers humans som, de manera natural, geòmetres i, en conseqüència, la geometria impregna profundament tota la matemàtica —i, de fet, tota la nostra manera d'entendre el món. És per això que creiem que és tant important que els estudiants de matemàtiques, sigui quin sigui el camí que segueixin, es familiaritzin amb els conceptes més fonamentals de la geometria.

Més enllà del que acabem de dir, encara hi ha un altre aspecte que cal tenir en compte a l'hora de decidir sobre la presència de la geometria en els currículums de l'ensenyament a tots els nivells: la transcendència *cultural* de la geometria i el paper que l'estudi de la geometria ha tingut en el desenvolupament del pensament a la nostra societat, al llarg dels segles.

* * *

El curs consta de quatre parts que, en total, s'estructuren en trenta «lliçons»:

- A la primera part —*«Fonaments de la geometria»*— comencem discutint preguntes essencials com «què és geometria?» o bé «hi ha diverses geometries?» i estudiem el punt de vista axiomàtic que va començar amb Euclides fa vint-i-tres segles. Donem una ràpida visió de la geometria d'Euclides —posant de manifest les seves virtuts i les seves mancances— i continuem amb la famosa axiomàtica de Hilbert. Parlem del «problema de les paral·leles» i de la seva història, de geometries no euclidianes, del naixement de la geometria hiperbòlica, del programa d'Erlangen... Tot seguit, fem un canvi radical de punt de vista amb la introducció dels «punts de l'infinit» que ens porten a la idea de l'espai projectiu. És la part del curs on el caràcter cultural i històric de la geometria es fa més evident i ens agradaria que —*mutatis mutandis*— aquests primers capítols formessin part indiscutible de qualsevol formació humanista.

[2] En aquests dos exemples **no** estem glossant la importància de la *representació gràfica* de la informació. Estem parlant d'una cosa molt més profunda: l'existència d'estructures geomètriques —tan «sòlides» com puguin ser-ho el diamant o Ceres— que podem aprehendre amb relativa facilitat en la seva globalitat i que ens donen un coneixement profund sobre altres objectes matemàtics que ens resulten abstrusos.

- La segona part del curs es dedica a un estudi —que necessàriament no pot passar de ser molt elemental— de la geometria de l'espai projectiu, l'àmbit més general de la geometria lineal. Entrem, doncs, en una àrea de coneixement vastíssima i només podem detenir-nos mínimament en mitja dotzena de punts que tenen una especial rellevància conceptual.

- A la tercera part estudiem la geometria afí des de dos punts de vista complementaris. D'una banda, entenem la geometria afí com l'acció simplement transitiva d'un espai vectorial —els «vectors»— sobre un conjunt —els «punts». D'una altra, com la part que queda de l'espai projectiu quan suprimim un hiperplà —l'hiperplà «de l'infinit». Entre altres coses, ens preocupem per les transformacions afins i també, de manera molt breu, considerem el cas «mètric» quan el cos d'escalars és el cos real i entre els vectors tenim un producte escalar definit positiu.

- A la part final del curs estudiem les còniques i les quàdriques i posem molt d'èmfasi en l'equivalència d'aquests quatre conceptes: formes bilineals simètriques, formes quadràtiques, polinomis de segon grau i quàdriques.

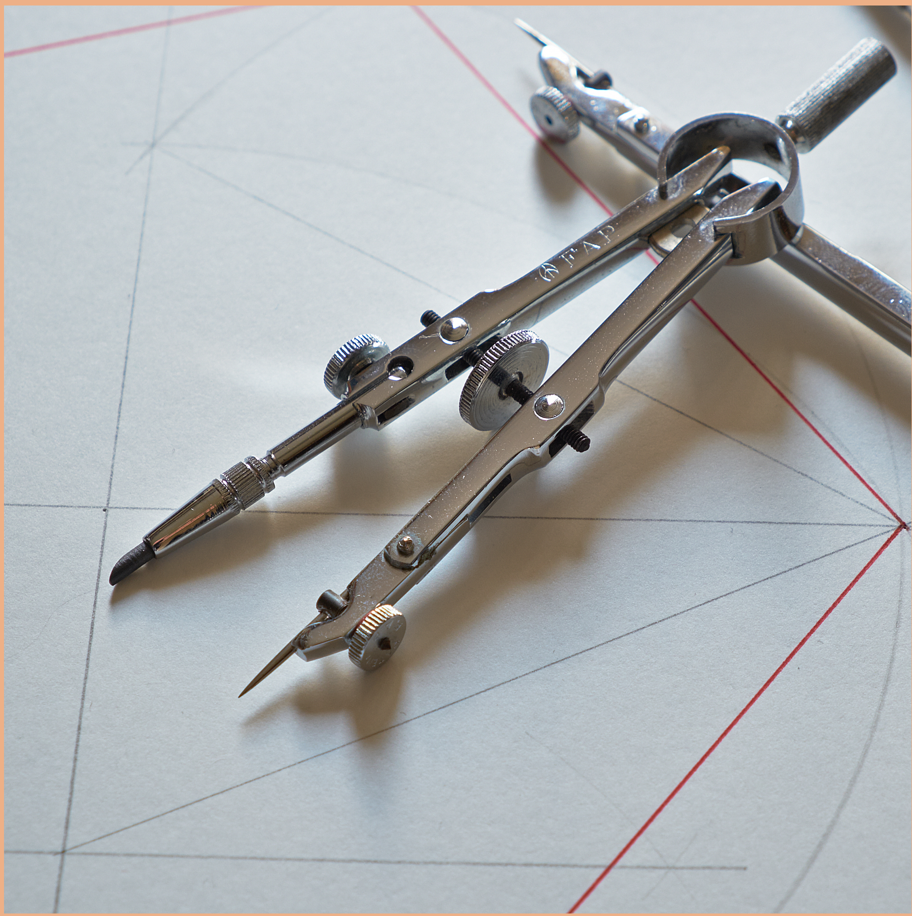
Volem que aquest curs es pugui impartir, de manera raonable, en trenta hores —complementades amb un nombre apropiat de sessions d'exercicis— i, per tant, és impossible donar demostracions dels teoremes més grans que anem trobant. Com que aquestes demostracions són importants, el llibre conté una cinquena part que du el títol de «Complements» on l'estudiant podrà satisfer la seva curiositat per les coses que hem dit i no hem pogut justificar.

Hi havia un temps no gaire allunyat quan el cos dels nombres reals ocupava un lloc privilegiat a la matemàtica —principalment la matemàtica aplicada— i també, conseqüentment, a l'ensenyament. Els cossos finits o els cossos de nombres formaven part de la «matemàtica pura» i es considerava, en aquell temps, que el seu lloc era en cursos d'especialització per a una minoria d'estudiants. La revolució digital ha capgirat les coses i ara el cos real és el menys «real» de tots els cossos i els cossos finits són tant o més «matemàtica aplicada» que el cos $\mathbb{R}$. En consonància amb aquesta situació —que encara no ha penetrat prou a les aules de matemàtiques— en aquest text considerarem que el cos d'escalars —quan hi hagi un «cos d'escalars»— és un cos qualsevol. Més encara: sempre que sigui possible i raonable preferirem el mètode «sintètic» al mètode algebraic, preferirem treballar sense coordenades a treballar amb coordenades i preferirem considerar un cos base arbitrari abans que el cos dels reals.

En aquest llibre hi ha una gran quantitat d'exercicis —força més dels que, normalment, es poden treballar a l'aula— que formen part, de manera essencial, del curs. N'hi ha de difícils, n'hi ha de senzills i n'hi ha alguns que simplement demanen que l'estudiant posi en pràctica alguns dels coneixements que s'han adquirit al llarg del curs. A l'hora de planificar un curs basat en aquest llibre el professor haurà de valorar quins exercicis són els més adequats per als seus estudiants i de quina manera els vol incloure en el seu model docent.

* * *

Són moltes les persones que m'han ensenyat geometria i que reconeixeran, en aquestes notes, idees que, en un moment o altre, m'han donat. No vull deixar de citar-ne dues de molt rellevants: en Sebastià Xambó i l'Agustí Reventós.



I

Els fonaments de la geometria

1. El concepte de geometria

El 1899 apareix el llibre *Grundlagen der Geometrie* (Fonaments de la geometria) de D. Hilbert, que havia de representar una fita essencial a la història del tractament axiomàtic de la geometria elemental. El llibre comença amb una introducció on, després d'una cita de la *Crítica de la Raó Pura*,[1] podem llegir:

> *«La geometria —i també l'aritmètica— necessita, per dur a terme la seva construcció lògica, només un petit nombre de principis senzills. Aquests principis s'anomenen axiomes de la geometria. L'enumeració dels axiomes de la geometria i la investigació de les seves relacions és una tasca que, d'ençà d'Euclides, ha quedat reflectida en un gran nombre de magnífics tractats de la bibliografia matemàtica. Aquesta tasca condueix a l'*anàlisi lògica de la nostra intuïció[2] de l'espai*. (...)»*[3]

La darrera frase pot interpretar-se com una possible *definició* de geometria. Entendrem, per tant, la geometria com l'anàlisi lògica de la nostra intuïció de l'espai. És clar que es tracta d'una definició poc precisa i clarament extra-matemàtica però aquest és el tipus de definició que ens convé en aquest

[1] Quina intenció té col·locar una frase de Kant a l'inici d'un text que havia de dur a la seva màxima plenitud la concepció «relativista» de la geometria? Kant defensava el punt de vista apriorístic de la geometria, que havia de ser entesa, per tant, com un conjunt de veritats prèvies a la intuïció. Aquest punt de vista va ser el culpable, per exemple, que Gauss no gosés publicar mai les seves recerques sobre la geometria no euclidiana, on quedava clar que l'axioma de les paral·leles, lluny de venir donat a priori, necessitava d'una confirmació experimental. Molt probablement, un millor coneixement de la filosofia kantiana i una anàlisi de la frase citada d'en Kant, podrien aclarir aquest punt. La frase diu: *«tot el coneixement humà comença amb intuïcions, passa d'aquí als conceptes i acaba en idees»*.

[2] *Anschauungen*, una paraula que juga un paper important a la filosofia de Kant i que es pot traduir per visió, contemplació, percepció, consciència, examen, observació, intuïció... Per exemple, quan estudiem que, per a Kant, el temps i l'espai són les *formes a priori de la intuïció*, aquesta paraula «intuïció» és, en la versió original, *Anschauung*.

[3] El subratllat és meu. No vull pas dir que Hilbert pretengués donar una *definició* de geometria quan escrivia aquesta frase.

moment. Cal doncs, segons Hilbert, començar a fer geometria a través d'una *contemplació* de l'espai.[4]

L'inici del «moment geomètric»[5] sembla que ha de veure's dificultat per la complexitat de la nostra intuïció de l'espai, que és múltiple, fragmentària, fins i tot contradictòria, i no sembla adaptar-se fàcilment a una anàlisi lògica. Veiem una gran quantitat d'objectes petits i grans, fixos o en moviment. La nostra (limitada) capacitat de desplaçament ens permet modificar i complementar les diverses percepcions locals. La subjectivitat de la percepció i les seves limitacions quan considerem objectes extremadament allunyats o extremadament petits, semblen obstacles insuperables que ens allunyen del «món real». Podríem encara parlar dels problemes filosòfics clàssics sobre el moviment, el canvi, la possibilitat d'un contínuum espacial, el temps... Però no és pas d'això del que es tracta. La geometria no és pas una teoria del coneixement ni una teoria de la percepció. És una anàlisi lògica de les diverses percepcions espacials i de les relacions entre elles. Les limitacions de la nostra intuïció i el nostre desconeixement essencial del «món real» (sigui quin sigui el sentit que es doni a aquestes paraules) no són impediments per fer geometria, sinó que ens mostren que:

I. Hi ha moltes geometries, com hi ha moltes intuïcions de l'espai.

II. Prèviament al desenvolupament de la geometria, cal extreure de la nostra intuïció de l'espai un petit nombre de trets fonamentals sobre els quals basarem la nostra anàlisi lògica.

Geometria elemental i axiomàtica

Tal com acabem de dir, si volem construir una geometria ens cal, en primer lloc, prendre de la nostra intuïció de l'espai un petit nombre d'objectes bàsics i un petit nombre de relacions bàsiques entre ells. La *geometria elemental* pren com a objectes bàsics els *punts*, les *rectes* i els *plans* i com a relacions bàsiques les relacions anomenades d'*incidència*, que són del tipus: el punt x és a la recta r, les rectes r i r' es tallen, etc. Més endavant, és clar, serem molt més precisos sobre aquest punt.

No ens cal dir res sobre la «naturalesa» dels objectes ni sobre el «significat» de les relacions. Preguntar-se què és un punt o bé què vol dir que un

[4] Aquí la paraula espai no s'ha d'entendre en el sentit astronòmic o cosmològic, ni com a sinònim d'univers.

[5] Aquí estem pensant en els diversos *moments* que Joan Maragall ens descriu a l'*Elogi de la Poesia*. El moment geomètric seria aquell on els diversos objectes ens interessarien d'acord amb les relacions posicionals que es podrien establir entre ells.

punt està sobre d'una recta, és no haver entès de què va el joc.[6] Es tracta d'analitzar la nostra intuïció de l'espai, la qual pot ser, en un moment donat, que a l'espai *hi ha* punts, rectes i plans, els quals poden estar en unes certes relacions entre ells. No ens importen la «realitat» o l'«existència real» de les rectes. El que sí que cal, un cop donats els objectes i les relacions, és establir el que seran les «regles del joc» que, de manera implícita, ens donaran l'únic significat vàlid que els objectes i les relacions poden tenir per a nosaltres.[7] Cal fixar els *axiomes de la geometria.*

Els axiomes seran un conjunt relativament petit de normes d'obligat compliment per als nostres objectes i les nostres relacions. Aquestes normes, tal i com ha passat amb els objectes i les relacions, seran abstraccions obtingudes a partir d'una certa intuïció de l'espai. Tampoc no ens preguntem pel seu significat ni pel motiu de la seva necessitat. Fins i tot aquesta necessitat és ben il·lusòria perquè, de la mateixa manera que les diverses facetes de la nostra intuïció ens duen a poder escollir diversos conjunts d'objectes sobre els quals basar la nostra geometria, també l'elecció dels axiomes és un acte totalment lliure. Posarem un exemple que tindrà importància més endavant. Situem-nos sobre d'un pla i considerem les diferents línies rectes que conté el pla. Donades dues rectes i movent-nos sobre el pla, podrem, en general, arribar en un punt on aquestes dues rectes es tallen. En algun cas, però, tot i que visualment veurem ben clar que les dues rectes convergeixen cap un punt comú situat a l'horitzó, no ens serà possible de desplaçar-nos fins aquest punt. A la vista d'aquesta situació, som lliures de prendre diverses opcions, com ara:

I. Bandejar del nostre discurs el punt al qual no podem arribar i postular l'existència de rectes que no es tallen.

II. Donar més importància a la nostra intuïció visual i afirmar que dues rectes d'un pla sempre es tallen.

Aquestes dues eleccions, contradictòries entre sí, són, ambdues, plenament vàlides i donen lloc a diverses geometries importants.

[6] Hilbert deia que el seu llibre seguiria essent totalment correcte (encara que ridícul) si substituíssim arreu les paraules punt, recta i pla per taula, cadira i gerra de cervesa.

[7] Algú que conegui la geometria analítica podria respondre a la pregunta «Què és un punt?» dient que un punt és una terna de nombres reals (x_0, x_1, x_2). Això és identificar l'espai amb $\mathbb{R}^3$. Segons el nostre concepte de geometria, això és plenament vàlid i significa que la nostra intuïció de l'espai ens l'assimila a $\mathbb{R}^3$. En aquest cas, però, ja no hi ha lloc per dur a terme cap anàlisi lògica! Certament, no és aquest el punt de vista que adoptarem aquí.

Un cop fixats els objectes, les relacions i els axiomes, la tasca del geòmetra serà la d'obtenir teoremes, és a dir, conseqüències lògiques dels axiomes. Aquests teoremes ens informaran sobre el comportament dels objectes i, per tant, sobre l'estructura lògica de la particular intuïció de l'espai que hem pres com a punt de partida.

Els *Elements* d'Euclides

Històricament, el primer exemple de tractament axiomàtic de la geometria que ens ha arribat va ser el d'Euclides d'Alexandria. Els *Elements de Geometria* d'Euclides, escrits cap a l'any 300 aC, són un conjunt de tretze llibres on, a partir d'una axiomàtica que ha esdevingut clàssica, s'obtenen una llarga sèrie de teoremes de geometria elemental —i d'aritmètica—, per un procés que, a partir dels axiomes, es desenvolupa d'una manera rigorosament lògica.

No estem segurs si aquesta obra monumental neix a la ment d'un únic i extraordinari geni anomenat Euclides, si és una obra col·lectiva de tota una escola de matemàtics, si és una enciclopèdia que recull el coneixement disponible en el seu temps o si Euclides va realment existir. En tot cas, els tretze llibres dels *Elements* constitueixen una de les obres magnes de la nostra cultura i la seva influència, al llarg dels segles, ha estat immensa, no només en les matemàtiques sinó també en l'educació —el llibre de text més estudiat de tota la història—, la filosofia, la ciència i, en definitiva, en el pensament —de Galileu o Spinoza a Russell o Gauss.

El que més fascina de l'obra d'Euclides és l'aplicació gairebé impecable del *mètode axiomàtic* que consisteix en que, a partir de un petit nombre d'axiomes, es van deduint, de manera encadenada, sistemàtica, lògica i elegant, els diversos resultats de la geometria clàssica sobre rectes, angles, triangles, àrees, volums i políedres i també sobre nombres primers, ternes pitagòriques, nombres irracionals, etc. etc. La idea de demostració que s'utilitza als *Elements* és exactament la mateixa que tenim nosaltres. El reconeixement que la geometria s'ha de fonamentar en uns axiomes que admetem sense demostració i que, aleshores, qualsevol proposició s'ha de demostrar a partir dels axiomes i de proposicions demostrades anteriorment, fa que ara, tants segles després, l'obra d'Euclides sigui encara perfectament «actual». Recordem alguns dels teoremes dels *Elements*, agrupats per llibres:

1. Congruència de triangles. Construcció de bisectrius, de perpendiculars, de paral·leles. Construcció de triangles. Suma dels angles d'un triangle. Àrea del rectangle i del triangle. Teorema de Pitàgores. (23

definicions, 5 axiomes, 5 «nocions comunes», 48 proposicions.)

2. Demostració geomètrica d'identitats que nosaltres expressaríem amb fórmules algebraiques com, per exemple, (vegeu l'exercici **I.2**)

$$\begin{aligned} x^2 &= xy + x(x-y) \\ (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy = 4xy + (x-y)^2 \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 &= 2(x^2+y^2) \end{aligned}$$

   El teorema del cosinus per a triangles, com a generalització del teorema de Pitàgores. (2 definicions, 14 proposicions.)

3. La circumferència: construcció del centre, de la tangent, angle inscrit. (11 definicions, 37 proposicions.)

4. Figures inscrites o circumscrites en una circumferència: segment, triangles, pentàgon regular, hexàgon regular, pentadecàgon (quinze costats) regular. (7 definicions, 16 proposicions.)

5. La teoria de les proporcions (atribuïda a Èudox de Cnidos). Per exemple: si la raó $x : y$ és la mateixa que la raó $x' : y'$ i la raó $t : y$ és la mateixa que la raó $u : y'$, aleshores la raó $(x+t) : y$ és la mateixa que la raó $(x'+u) : y'$. La definició 4 d'aquest llibre és l'axioma d'Arquimedes. (18 definicions, 25 proposicions.)

6. Aplicació geomètrica de la teoria de les proporcions. Per exemple: teorema de Tales, raó àuria, triangles amb costats proporcionals tenen els mateixos angles. (4 definicions, 33 proposicions.)

7. Inicis de la teoria de nombres: múltiples, divisors, nombre primer, nombre perfecte, algorisme d'Euclides, màxim comú divisor. (22 definicions, 39 proposicions.)

8. Teoria de les progressions geomètriques. (27 proposicions.)

9. Hi ha infinits nombres primers. Nombres perfectes: si $2^r - 1$ és primer, aleshores $(2^r - 1)\,2^{r-1}$ és un nombre perfecte. (36 proposicions.)

10. Magnituds incommensurables. Per exemple, la diagonal d'un quadrat és incommensurable amb el costat del quadrat. Construcció de les «ternes pitagòriques», és a dir, enters a, b, c tals que $a^2 + b^2 = c^2$. (16 definicions, 115 proposicions.) (Vegeu l'exercici **IV**.31.)

11. Introducció a la geometria de tres dimensions. Volum del paral·lelepípede. (28 definicions, 39 proposicions.)

12. Càlcul del volum de la piràmide, el con i el cilindre, utilitzant el *mètode d'exhaustió*. El volum de l'esfera és proporcional al cub del seu diàmetre. Àrea de la circumferència, també pel mètode d'exhaustió. (18 proposicions.)

13. Construcció dels cinc *sòlids platònics*. (18 proposicions.)

Geometria, moviment i simetria: el programa d'Erlangen

Tant la geometria d'Euclides com la de Hilbert (que estudiarem més endavant) eviten la idea de moviment. Quan parlen de segments congruents consideren aquesta relació com un concepte primitiu, que ens ha estat donat d'entrada. Com podem arribar a aquest concepte de congruència? No sembla que tota mesura ha d'implicar un desplaçament? No sembla natural i gairebé inevitable basar la congruència en la «identitat llevat d'un moviment»? Potser seria interessant fer una geometria que contemplés el moviment o que, fins i tot, estigués fonamentada en el moviment. L'anomenat *Programa d'Erlangen*, enunciat per F. Klein el 1872, fa exactament això: desplaça el focus d'atenció dels objectes als seus moviments.

Plató ens diu que la geometria estudia *allò que sempre és*. Aquesta permanència pot ser interpretada de dues maneres diferents: o bé com una situació estàtica, o bé com una persistència de l'essència malgrat el moviment. És a dir, a la base de les idees geomètriques hi ha el concepte d'invariància i podem, fins i tot, *definir* les propietats geomètriques d'un objecte com les que resten invariants quan aquest objecte es desplaça a l'espai. Si ho fem així, el concepte de moviment pren una posició central. A partir del moviment poden obtenir-se, de manera natural, els conceptes de congruència d'angles i segments, que ja no seran, per tant, conceptes primitius.

Des d'aquest punt de vista, l'elecció d'una geometria o d'una altra equival a fer una hipòtesi sobre quins són els moviments permesos. Clarament, aquests tindran una estructura de *grup* i, aleshores, escollir una geometria vol dir escollir un determinat grup de moviments. Segons el Programa d'Erlangen, la geometria és l'*«estudi de les propietats de les figures que són invariants per un cert grup de moviments fixat»*.

La generalitat del programa d'Erlangen és molt gran i el seu concepte de geometria s'adiu amb moltes disciplines geomètriques modernes, des de la topologia a la geometria algebraica.[8] Si volem, però, fer geometria

[8] Donar preeminència a les transformacions d'un objecte per sobre de l'essència del propi

elemental, caldrà que ens restringim a grups de moviments «lineals». Les diverses geometries (euclidiana, hiperbòlica,...) s'obtindran prenent subgrups apropiats del grup lineal.[9]

En aquest context, la teoria de grups i la teoria d'invariants ocuparan un lloc central a la geometria. Malgrat el seu interès, en aquest curs no aprofundirem gaire en aquesta direcció.[10]

objecte és una idea central a la matemàtica «moderna». Bourbaki hi veu el germen de la noció d'estructura. És clar que va conduir a l'interès per les *transformacions naturals* i a la teoria de categories.

[9]Per exemple, la longitud d'un segment no és una propietat geomètrica si considerem homotècies, però ho és si només considerem transformacions ortogonals (és a dir, transformacions que conservin el producte escalar de vectors). Més difícil seria explicar en poques paraules quin grup cal prendre per obtenir la geometria hiperbòlica.

[10]No hauríem d'oblidar la influència del programa d'Erlangen a la física del segle XX.

2. Els fonaments de la geometria d'Euclides

Estudiem i discutim en aquest capítol els inicis del primer llibre dels *Elements* d'Euclides, amb l'objectiu de valorar la seva transcendència i també algunes de les seves mancances.

Definicions i nocions comunes

El llibre I comença amb 23 definicions: *punt, recta, pla, angle recte, circumferència, triangle equilàter,* etc., però no totes les definicions tenen el mateix caràcter.

Per exemple, la primera definició diu que *un punt és allò que no té parts* i la quarta afirma que *una recta és una longitud sense amplada que està igualment situada respecte dels seus punts*. La presència d'aquestes definicions de punt i recta sembla contradir el que hem afirmat sobre que la noció d'un punt serà una noció bàsica, de la naturalesa de la qual no cal dir-ne res. Cal, però, fer algunes observacions. En primer lloc, potser no hem d'entendre aquestes definicions en el sentit modern de la paraula, sinó que cal situar-les en un context platònic i creure en un món on habiten els arquetipus de les coses: *el* punt, *el* cavall, etc. Aleshores, les definicions anteriors pretenien, només, fer «recordar» aquests arquetipus. D'altra banda, no totes les definicions són igualment objectables. Hi ha autèntiques definicions, com ara quan diu, per exemple, que un triangle isòsceles és el que té només dos costats iguals, o que les paral·leles són les rectes que, contingudes en un mateix pla, no es tallen. Finalment, dir que un punt és allò que no té parts, no ve a ser com dir que el concepte de punt és un concepte primitiu, que no es pot reduir a altres conceptes?

Hi ha altres definicions que, implícitament, introdueixen conceptes primitius que, per tant, queden assumits com a conceptes bàsics de la geometria. Considerem, per exemple, la definició d'*angle recte* com aquell angle que és **igual** al seu adjacent. En diversos llocs dels *Elements*, Euclides parla de *magnituds iguals* i és evident que no utilitza la paraula «igual» en el mateix sentit que ho fa la matemàtica moderna. La definició d'angle recte ens diu, doncs, que hi ha una certa relació entre angles, que Euclides anomena «igualtat» i nosaltres preferiríem anomenar «congruència», de manera que té sentit afirmar que dos angles són iguals —o, en la terminologia actual, són congruents.

Una situació similar es dóna a la definició de circumferència com una línia tal que existeix un punt anomenat centre de manera que tots els segments que uneixen el centre amb cada punt de la línia són «iguals». Aquí Euclides ens està dient que tenim una relació —podem anomenar-la «congruència»— entre segments, que també és una relació primitiva —no es defineix a partir de cap noció anterior—, i que ens permet parlar de segments congruents.[1]

En resum, a les definicions del llibre primer, Euclides presenta els tres objectes bàsics de la seva geometria —punts, rectes i plans— i les dues relacions bàsiques de congruència entre angles i congruència entre segments.

Al llibre primer també hi ha cinc «nocions comunes» que Euclides distingeix de les definicions, com si això indiqués que considera que són principis lògics amb una validesa que va més enllà de la geometria. Per exemple, la primera d'aquestes nocions comunes afirma que *«coses iguals a una cosa són iguals»*. Efectivament, sembla un principi lògic elemental, però hem de recordar que la igualtat d'Euclides no és la igualtat matemàtica, sinó que és, per exemple, la congruència d'angles o la congruència de segments. Per tant, aquesta noció comuna ens està dient que la congruència compleix la propietat transitiva. També és molt interessant llegir la noció comuna cinquena: *«el tot és més gran que la part»*.[2]

Els quatre primers axiomes

Els tres primers axiomes estan escrits en forma de «construcció» és a dir, assenyalen diverses construccions que es postula que són possibles.

- **Axioma I** *[És possible] dibuixar, de qualsevol punt a qualsevol punt,*

[1] En llibres posteriors, Euclides parla també de figures iguals quan nosaltres diríem «figures amb la mateixa àrea» o, en el cas de figures sòlides, «figures amb el mateix volum».

[2] Quan tractem amb objectes infinits, sabem que aquesta noció comuna no es compleix. Per exemple, si a un conjunt infinit li traiem un element, el que queda és «igual» al conjunt inicial. Per posar un exemple més geomètric, un angle curvilini (en algun moment Euclides considera aquests angles) de mesura zero pot estar a l'interior d'un altre angle curvilini de mesura zero, en contradicció amb la cinquena noció comuna. Pensar en la validesa de la noció comuna cinquena quan l'apliquem a l'àrea i el volum ens duria a tenir en compte situacions com la paradoxa de Banach-Tarski.

una línia recta.[3]

El primer axioma és molt clar i representa la propietat essencial del nostre concepte de recta. Entre totes les línies que uneixen dos punts, n'hi ha una i només una que es pot anomenar recta. És perfectament admissible negar-se a postular aquest fet, doncs ja hem dit que la nostra intuïció de l'espai és múltiple i complexa, però, aleshores, la geometria que obtindrem difícilment serà una *geometria elemental*. També podem entendre que amb aquest axioma postulem l'existència del regle i acceptem que el regle es pot utilitzar per traçar la recta —més exactament, el *segment*— que uneix dos punts.

- **Axioma II** *[És possible] prolongar qualsevol segment per qualsevol dels seus dos extrems.*

  En primer lloc, cal tenir present que Euclides no considera mai tota una recta completa (que, evidentment, no es pot dibuixar), sinó que considera segments de recta limitats per dos punts. En aquest context, l'axioma II admet una altra utilització «legal» del regle: Si tenim un segment amb extrems A i B, podem usar el regle per dibuixar un segment AC que contingui el segment inicial AB.[4]

  Aquest axioma sembla molt natural perquè ve a dir que una línia recta «no s'acaba mai», però si ens hi fixem una mica més, veiem que aquest axioma i l'anterior mostren que Euclides admet, implícitament, que entre els punts d'una recta hi ha una certa *relació d'ordre* que, si tenim tres punts alineats A, B, C, ens permet afirmar, per exemple, que *B està entre A i C*.[5]

- **Axioma III** *Amb centre a qualsevol punt [és possible] dibuixar una circumferència que passi per qualsevol altre punt.*

[3]Sembla com si Euclides «oblidés» dir que aquesta recta que uneix dos punts diferents és única. En tot cas, l'ús que fa d'aquest primer axioma deixa clar que el sentit de l'axioma és que *per dos punts diferents hi passa una única recta*.

[4]Com que no hi ha cap més axioma que validi cap altra utilització del regle a la geometria d'Euclides, els axiomes I i II ens diuen que el regle només el podem utilitzar per (a) unir dos punts o (b) prolongar un segment. Per exemple, una utilització fraudulenta del regle seria tenir marcats dos punts sobre el regle i fer la construcció que es coneix amb el nom de *«neusis»*: donat un punt P i dues corbes, amb el regle marcat es podria trobar una recta que passés per P i que tallés les dues corbes en punts separats per la mateixa distància que hi ha entre les dues marques del regle. Amb neusis es pot trisecar qualsevol angle (vegeu l'exercici **I.8**), una construcció que és impossible si utilitzem el regle només com indiquen els axiomes I i II d'Euclides. Possiblement, neusis era coneguda per Euclides, però els seus postulats l'exclouen.

[5]En una carta del 1832 a Farkas Bolyai (el pare de János Bolyai) Gauss ja troba a faltar que es postuli amb precisió quines són les propietats que té aquesta relació «estar entre».

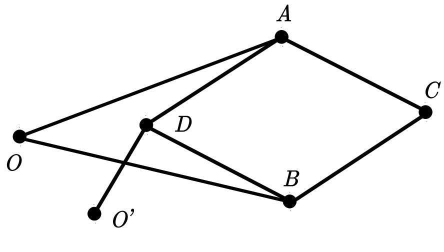
> Aquest axioma ens diu que tenim un *compàs* i que el podem utilitzar d'aquesta manera: donats dos punts A i B, podem fixar una de les puntes del compàs en el punt A, fer que l'altra punta caigui sobre el punt B i, aleshores, dibuixar la circumferència de centre A i radi AB.[6]

En resum, els tres primers axiomes ens diuen que Euclides farà la *geometria del regle i el compàs* —la geometria que es pot fer traçant rectes i circumferències amb un regle i un compàs— i ens explicita completament què podem fer amb aquests dos instruments. Amb el regle podem unir dos punts i prolongar un segment, amb el compàs podem traçar la circumferència amb centre donat que passa per un punt donat.[7]

Si analitzem la manera com Euclides utilitza aquests tres axiomes, hi trobem algunes **mancances** molt importants. Amb aquests tres axiomes dibuixem segments i circumferències però, amb quin objectiu? A les cons-

[6]Tal com passava amb l'axioma anterior, aquesta utilització del compàs és l'única que és vàlida. En particular, una utilització fraudulenta seria la que es coneix com a *«compàs bloquejable»*: preparem el compàs per traçar la circumferència de centre A i radi AB, com a l'axioma III i, aleshores, «bloquegem» el compàs i, amb la mateixa obertura, dibuixem la circumferència de centre A' i radi «igual» a AB. De totes maneres, és fàcil veure que aquesta mateixa construcció també es pot fer de manera «legal» i, en conseqüència, és vàlida a la geometria d'Euclides. Vegeu l'exercici **I.1c**.

[7]És curiós observar una asimetria entre aquests dos instruments: el regle i el compàs. Un compàs és un mecanisme físic que permet dibuixar circumferències i, en canvi, un regle permet dibuixar rectes a partir d'una recta que ja forma part de la construcció del regle. És evident que hi ha, en el regle, un cercle viciós: per construir un regle necessitem una recta i per dibuixar una recta necessitem un regle. El problema de dissenyar un mecanisme físic (com és el compàs) que, sense cap recta prèvia, dibuixi rectes no es va plantejar fins que James Watt el 1784 va necessitar convertir el moviment lineal dels pistons d'una màquina de vapor en el moviment circular d'una roda. La solució de Watt és aproximada (vegeu l'exercici **I**.21) i la primera solució exacta del problema la va obtenir el 1864 Charles-Nicolas Peaucellier d'aquesta manera: els punts O i O' estan fixos al pla, les articulacions A, B, C i D es poden moure lliurement i $OA \equiv OB$, $AC \equiv AD \equiv DB \equiv BC$, $O'D \equiv OO'$. En aquestes condicions es pot demostrar (vegeu l'exercici **I**.20) que el punt C es mou sobre una recta.

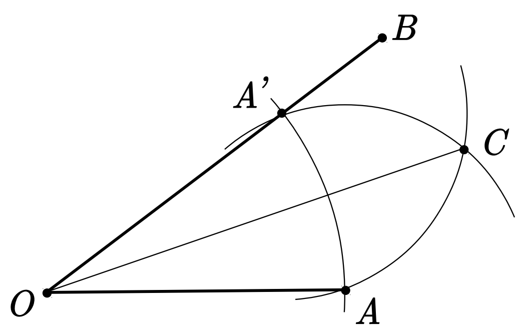


Sobre els diversos ginys que es van inventar per convertir un moviment circular en un de rectilini podeu consultar la curiosa obra *How to draw a straight line*, A. B. Kempe, 1877.

truccions que fa Euclides es dibuixen rectes i circumferències amb l'objectiu de *trobar nous punts* que apareixem com interseccions d'aquestes rectes i aquestes circumferències que hem dibuixat. El problema és que els axiomes d'Euclides diuen que podem dibuixar aquestes figures, però no ens garanteixen que els punts d'intersecció existeixin.

Un parell d'exemples ens ajudaran a entendre això que acabem de dir.

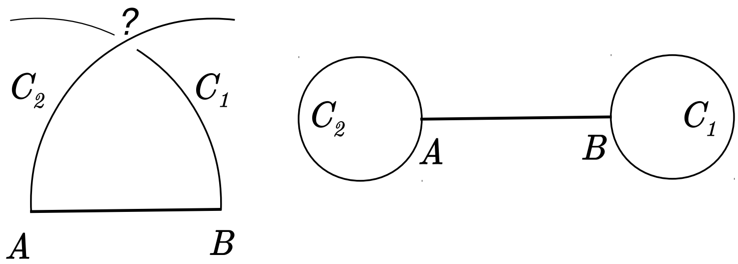
- *[Bisecció d'un angle. Proposició 9 del llibre I]* Euclides divideix un angle en dos angles iguals d'aquesta manera:



Considerem l'angle de vèrtex O format pels segments OA i OB i suposem que $OA < OB$. Tracem la circumferència de centre O i radi OA. Trobem el punt A'. Tracem la circumferència de centre A' i radi $A'A$. Tracem la circumferència de centre A i radi AA'. Trobem el punt C. Tracem el segment OC. Aleshores, es pot demostrar que els angles AOC i $A'OC$ són iguals. El problema és que l'existència dels punts A' i C no es pot inferir a partir dels axiomes.

- *[Construcció del triangle equilàter. Proposició 1 del llibre I]* Amb base un segment donat AB volem construir un triangle equilàter. Amb centre A i radi AB dibuixem una circumferència C_1 i amb centre B i radi BA en dibuixem una altra C_2. Si X és un punt on es tallen aquestes dues circumferències, aleshores el triangle ABX és equilàter. El problema és que, igual que abans, no es demostra que aquest punt X existeixi.[8]

[8] Ens podem convèncer d'això considerant la geometria analítica elemental del pla $\mathbb{Q}^2$ format per tots els punts (x, y) on x i y són nombres racionals. En aquest pla podem fer les construccions dels tres axiomes d'Euclides, però no podem construir triangles equilàters: el tercer vèrtex del triangle equilàter amb base el segment de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ hauria de ser el punt $(0, \sqrt{3})$, que no existeix a $\mathbb{Q}^2$.



Aquí tenim dos intents fallits de construir un triangle equilàter sobre AB: en el primer les circumferències es creuen sense tallar-se i en el segon les circumferències ni tan sols es creuen.

El quart axioma ja no parla de construccions sinó que afirma el següent:

- **Axioma IV** *Tots els angles rectes són iguals.*

Sobre aquest axioma hi ha dos punts de vista oposats: un punt de vista afirma que és un desencert d'Euclides perquè és una proposició senzilla de demostrar que no caldria incloure com a axioma; l'altre punt de vista diu que es tracta d'un axioma important, relacionat amb el *moviment* o, més exactament, amb la intenció d'Euclides de fer una geometria que no entri en conflicte amb els clàssics problemes filosòfics sobre el moviment.[9]

Entre els que van opinar que el quart postulat es pot demostrar hi ha el filòsof neoplatònic Procle (segle V) i també el matemàtic i astrònom persa Abu-Sahl al-Quhí (segle X). Ambdós van escriure tractats sobre els *Elements* i ambdós «demostren» el quart postulat d'una manera ben senzilla pel mètode de «superposició»: Si α i β són dos angles rectes, superposen un sobre l'altre i demostren que ni α pot ser més petit que β ni β pot ser més petit que α. On és el problema d'aquesta demostració? El problema és que cal **moure** un angle sobre l'altre. Tot sembla indicar, doncs, que Euclides va incloure aquest quart axioma perquè no volia que la seva geometria necessités el moviment: volia esquivar completament les apories de Zenó.[10]

També és cert que en el perfeccionament de l'axiomàtica d'Euclides que va fer D. Hilbert —l'estudiarem a partir del capítol següent— el quart postulat es pot demostrar. Nogensmenys, l'axiomàtica de Hilbert també necessita un axioma encara més fort per tal d'esquivar el moviment.

[9] Sobre aquest tema podeu llegir A. Reventós, *El moviment a la geometria*, Butll. Soc. Cat. Mat., 1995.

[10] Malgrat la inclusió de l'axioma IV, Euclides també utilitza la superposició en algun dels seus teoremes, per exemple a la proposició quarta del llibre primer. En parlarem més endavant.

El cinquè postulat

Després dels quatre primers postulats d'Euclides, llegir l'enunciat del cinquè postulat produeix una extraordinària sorpresa:[11]

- **Axioma V** *Si una recta, que talla dues rectes, fa amb elles uns angles interiors del mateix costat més petits que dos rectes, aquestes rectes, convenientment prolongades, es tallaran pel costat on els angles són més petits que dos rectes.*[12]

Salta a la vista que l'axioma V és molt especial! Mentre els altres axiomes són d'una «evidència» total, aquest és força complex i requereix un cert esforç de comprensió. Sorgeixen immediatament dues preguntes:

a) Respon realment l'axioma V a la nostra intuïció de l'espai?

b) No serà, potser, l'axioma V una conseqüència dels altres axiomes, és a dir, un teorema?

En primer lloc, diguem que l'axioma V es pot substituir per un altre d'equivalent,[13] però de comprensió més fàcil:

- **Axioma V'** *Per un punt que no pertany a una recta hi passa una única paral·lela a la recta.*[14]

[11] S'ha especulat molt sobre els motius que van dur Euclides a incloure aquest axioma i a fer-ho, precisament, en aquesta forma. De totes aquestes especulacions, potser una de les més interessants és la que observa que la mateixa definició de rectes paral·leles no pot ser satisfactòria sense invocar l'existència d'una recta infinita —que ja hem dit que no entra en els esquemes de la matemàtica d'Euclides. En efecte, suposem que tenim dues rectes d'un pla i que volem saber, aplicant la definició, si són paral·leles. Imaginem que ho siguin realment. Aleshores, les anirem prolongant i no es tallaran, però mai no podrem saber si, potser, prolongant una mica més es tallarien. En conclusió, mai no podem saber si són paral·leles o no ho són... a menys que apliquem l'axioma V que, vist d'aquesta manera, és com una «definició efectiva» de rectes paral·leles.

[12] Curiosament, aquí Euclides «oblida» dir que les rectes han d'estar en un mateix pla. Com que en els primers llibres només parla de geometria plana, aquesta condició l'hem de considerar implícitament assumida.

[13] Una certa proposició A direm que és equivalent a l'axioma V quan A es pot demostrar utilitzant els axiomes I, II, III, IV, V, i també l'axioma V es pot demostrar utilitzant els axiomes I, II, III, IV i la proposició A, presa com a axioma.

[14] De fet, n'hi ha prou amb un axioma més feble: *per un punt que no pertany a una recta hi passa com a màxim una paral·lela a la recta.* De vegades, aquest axioma es coneix amb el nom d'**axioma de Playfair**, en honor al matemàtic escocès John Playfair (1748–1819). Nosaltres en direm **axioma de les paral·leles**.

Veurem, doncs, que aquest axioma sí que respon a *una certa* concepció de l'espai. Quan imposem l'axioma V estem fent una elecció molt important. Mentre que els altres axiomes es limiten a dir-nos que el món és essencialment lineal o, millor dit, que volem estudiar geometria elemental, aquest axioma tria un particular model d'espai, el *model euclidià*.

El que estem dient sembla indicar que la resposta a la pregunta b) d'abans és «no». En efecte, tot i que van caldre molts segles per arribar a veure-ho clar, Euclides tenia raó quan va incloure l'axioma V a la seva llista d'axiomes de la geometria.[15] Aquest axioma és *independent* dels altres quatre (fins i tot convenientment perfeccionats) en el sentit que és impossible demostrar l'axioma V a partir dels altres quatre axiomes.

Durant segles, el «problema» del cinquè postulat d'Euclides ha preocupat a nombrosos matemàtics —i filòsofs!— i la història dels desenvolupaments de les idees que van dur a la demostració de la independència del cinquè postulat respecte dels altres és certament molt interessant, però no tenim prou temps per discutir-la aquí. Diguem només que un gran nombre de matemàtics cercaven una demostració del cinquè postulat i, en molts casos, el que obtenien era una prova del cinquè postulat que utilitzava algun nou axioma que, inadvertidament, era donat per vàlid. Aquest tipus de demostracions no estan desproveïdes d'interès perquè, si més no, han permès obtenir una bona sèrie d'axiomes força interessants, tots ells equivalents a l'axioma de les paral·leles.[16]

Sovint la demostració del cinquè postulat es volia fer per reducció a l'absurd: se suposava que el cinquè postulat era fals i s'anaven deduint conseqüències d'aquest fet, cercant una contradicció. Aquesta contradicció no es trobava mai, però totes les conseqüències de la negació del cinquè postulat que s'anaven demostrant eren teoremes vàlids a una geometria que no compleixi el cinquè postulat. Ara sabem que aquesta geometria existeix: s'anomena **geometria hiperbòlica**.[17] Per tant, els primers tractats de geo-

[15] És lògic pensar que Euclides era conscient de la singularitat del seu cinquè postulat: quan llegim els *Elements* sembla com si Euclides retardés al màxim la utilització del postulat polèmic: no l'empra fins a la proposició 29 del primer llibre.

[16] Donem exemples d'axiomes equivalents al cinquè postulat d'Euclides: La suma dels angles de qualsevol triangle val dos rectes; hi ha un triangle on els angles sumen dos rectes; hi ha un triangle on els angles sumen com a mínim dos rectes; hi ha un triangle d'àrea arbitràriament gran; hi ha dos triangles semblants diferents; tot triangle es pot inscriure en una circumferència; existeix un rectangle; una recta no pot estar continguda a l'interior d'un angle.

[17] Sembla ser que Gauss, a començaments del segle XIX, ja havia construït una bona part de la geometria hiperbòlica, però no va publicar mai els seus resultats per por al que ell va anomenar —en una famosa i enigmàtica frase— *«la cridòria dels beocis»*. Menys

metria hiperbòlica els van escriure els qui no creien en la seva existència.[18]

* * * * *

En conclusió, encara que haguem trobat alguns errors i algunes mancances als *Elements*, l'obra geomètrica d'Euclides és un monument intel·lectual de primera magnitud. Entre els seus grans mèrits podem fer esment d'aquests:

- El reconeixement de la necessitat del mètode axiomàtic com a consubstancial al concepte matemàtic de demostració i la immensa perfecció de tota l'estructura deductiva de l'obra.
- La inclusió genial del cinquè postulat.
- La superació de les mancances del nombre. Era ben sabut que els nombres —el que ara en diríem *nombres racionals*— no podien resoldre el problema de la mesura de les longituds, les àrees o els volums. Malgrat això, Euclides és capaç de desenvolupar de manera completa la seva geometria sense haver de recórrer (gairebé mai[19]) a processos infinits.
- La intel·ligent manera com esquiva les apories del moviment, de l'infinit, i altres problemes filosòfics.

coneguda és l'obra del jurista Ferdinand Karl Schweikart (1807) i del seu nebot Franz Taurinus (1825). Es considera que els creadors de la geometria hiperbòlica van ser Nikolai Ivanovich Lobachevsky i János Bolyai que van desenvolupar-la de manera independent entre el 1823 i el 1832. De tota manera, la demostració completa que la geometria hiperbòlica és igual de consistent que la geometria d'Euclides no va arribar fins el 1868 amb l'obra del geòmetra italià Eugenio Beltrami.

[18] La llista de matemàtics que van intentar demostrar el cinquè postulat comença amb Claudi Ptomeleu al segle II i Procle al segle V i acaba amb Lambert i Legendre a finals del segle XVIII. Conté noms com el del matemàtic persa Omar Khayyam que l'any 1077 publica un comentari dels *Elements* amb una demostració del cinquè postulat que utilitza que dues rectes paral·leles sempre estan a la mateixa distància (una afirmació equivalent al cinquè postulat que es pretén demostrar). Un altre exemple important és el de Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733), autor d'un llibre titulat *Euclides vindicat de tot error* on pretén vindicar Euclides veient que la negació del cinquè postulat és contradictòria. És clar que no ho aconsegueix i és estrany que no s'adoni que l'autèntica vindicació d'Euclides consisteix en demostrar que el cinquè postulat *és* un postulat i, per tant, la seva negació **no** és contradictòria!

[19] Només quan aborda l'àrea de la circumferència o el problema del volum. Tanmateix, en aquests casos és inevitable haver de considerar processos de pas al límit.

3. L'axiomàtica de Hilbert: incidència i ordre

Hem vist com els *Elements*, malgrat la seva transcendència matemàtica, històrica i filosòfica, malgrat la magnífica col·lecció de teoremes que contenen i malgrat la inclusió genial del cinquè postulat, tenen defectes lògics que neixen, principalment, de no fixar amb claredat totes les relacions que es consideren com a primitives ni tots els axiomes que aquestes relacions verifiquen. Hem trobat a faltar els axiomes que han de verificar les relacions d'*ordre* i de *congruència* i hi hem trobat a faltar uns axiomes de *continuïtat* que ens permetin afirmar, per exemple, l'existència dels punts on es tallen dues circumferències.

Hilbert, a l'acabament del segle XIX, va voler escriure un tractat on, d'una vegada per sempre, les proposicions de la geometria elemental apareguessin demostrades amb un rigor lògic total i on apareguessin explícitament totes les relacions bàsiques i tots els axiomes que aquestes han de verificar. I no només això, sinó que, a més, quedés clar quins són els axiomes que són necessaris per demostrar cadascun dels teoremes importants. Anant molt més lluny que Euclides, Hilbert es planteja també els tres problemes següents:

Independència. Es tracta de veure que els axiomes són independents entre ells, de manera que cap d'ells no és conseqüència dels altres i, en particular, cap no és superflu.[1]

Consistència. Es tracta de demostrar que els axiomes no es contradiuen entre ells.[2]

[1] La manera de veure que un axioma A és independent dels axiomes $A_1, \ldots, A_n$ és trobar un *model* on tots els axiomes $A_1, \ldots, A_n$ siguin certs, però no ho sigui l'axioma A. Donar un model vol dir donar definicions dels conceptes bàsics i de les relacions bàsiques. Per exemple, $\mathbb{R}^3$ amb les definicions usuals de punt, recta, ordre i congruència, és un model de la geometria euclidiana on es verifiquen tots els axiomes d'Euclides.

[2] El problema de la consistència va aparèixer tan bon punt es va considerar la geometria com un sistema axiomàtic abstracte on l'elecció dels axiomes es fa d'una manera lliure. Mentre es creia que la geometria euclidiana era l'única «autènticament real», aquesta su-

Completesa. Una teoria axiomàtica es diu que és completa quan, donada una proposició qualsevol, o ella o la seva negació són conseqüència dels axiomes.[3]

A la vista dels famosos resultats de Kurt Gödel dels anys 30 del segle passat sembla que els problemes de la completesa i la consistència de la geometria elemental no hagin de tenir solució.[4]

D. Hilbert va desenvolupar el seu programa a l'obra *Grundlagen der Geometrie* que ja hem citat abans. Ara estudiarem una introducció (simplificada) a l'axiomàtica de la geometria elemental, en la línia dels *Grundlagen*.

Objectes i relacions

Ja hem dit que la geometria elemental es basa en considerar tres menes d'objectes, anomenats *punts, rectes i plans*. Per tal de simplificar l'exposició de l'axiomàtica de Hilbert, ens limitarem a l'estudi de la *geometria plana*. Considerarem, per tant, que existeixen dues menes d'objectes, anomenats *punts* i *rectes*, els quals poden presentar entre ells tres tipus de relacions:[5]

posada realitat ens reduïa la seva consistència a la del món real, suposadament consistent (?). Quan eliminem el suport real i considerem la geometria com un sistema on els axiomes són escollits «arbitràriament», sentim la necessitat de demostrar que aquests axiomes no es contradiuen entre ells o, com a mínim, que una contradicció entre els axiomes implicaria una contradicció en alguna altra branca de la matemàtica com, per exemple, la teoria de conjunts, etc.

[3] Per exemple, la teoria de grups no és una teoria completa, perquè cap de les proposicions: «$a + a = 0$ per tot a», «existeix a tal que $a + a \neq 0$», no són conseqüència dels axiomes de grup: Hi ha grups que verifiquen la primera i altres on es compleix la segona.

[4] Recordem que dels resultats de Gödel es desprèn que l'aritmètica dels nombres naturals no és completa: conté proposicions indecidibles i, de fet, la seva consistència és una d'elles. Això ens fa pensar que la geometria d'Euclides ha de tenir els mateixos problemes. Efectivament, l'axiomàtica de Hilbert que ara estudiarem no pot ser una teoria completa i la seva consistència és indecidible, perquè és essencialment equivalent a la teoria dels nombres reals. Malgrat això, és interessant fer esment del fet que Alfred Tarski el 1926 va desenvolupar una nova axiomàtica de la geometria elemental que, contenint una gran part de l'obra d'Euclides, sí que és consistent i algorísmicament decidible, en el sentit que per a cada proposició hi ha un algorisme que ens permet decidir si és certa o falsa. Recentment, en els àmbits de la intel·ligència artificial i de la demostració de teoremes per ordinador, l'obra de Tarski ha adquirit una rellevància especial. Podeu consultar, per exemple, els *proceedings* del congrés biannual *«Automated Deduction in Geometry». [nota: tots aquests comentaris tenen un caràcter que en podem dir* naïf *en el sentit que, per poder tractar aquests temes d'una manera rigorosa, és imprescindible fer-ho a partir d'una sòlida base de lògica matemàtica que, evidentment, s'escapa dels objectius d'aquest curs.]*

[5] Observem que en aquesta exposició ens estem apartant del llenguatge usual de la matemàtica actual que es basa (gairebé) sempre en la teoria de conjunts. L'objectiu de fer-ho així és mantenir la geometria independent de la teoria de conjunts, en l'esperit de

a) Una relació d'*incidència* entre punts i rectes. Direm, per exemple, que un punt *és* a una recta, o que una recta *passa* per un punt.

b) Una relació d'*ordre* o, millor dit, d'*estar entre*, entre ternes de punts. Direm, per exemple, que el punt A està entre els punts B i C.

c) Una relació de *congruència* entre parelles de punts i entre *angles* (el concepte d'angle el definirem més endavant). Direm, per exemple, que AB és congruent a $A'B'$ o que l'angle α és congruent a l'angle α'.

Aquestes relacions verificaran una sèrie d'axiomes que, per tal de sistematitzar l'exposició, es divideixen en cinc grups:[6]

Axiomes d'incidència

Hi ha tres axiomes d'incidència.

I.1 Per dos punts hi passa una única recta.

I.2 Tota recta té com a mínim dos punts.

I.3 Hi ha tres punts no alineats.

D'aquests axiomes ja es dedueix que dues rectes[7] tenen com a màxim un punt en comú.[8]

Axiomes d'ordre

Hem dit que una de les relacions bàsiques és la que ens permet afirmar que un punt està entre dos altres punts. Aquesta relació ha de verificar els següents axiomes:

Hilbert. Si volguéssim utilitzar la teoria de conjunts diríem, per exemple, que tenim un conjunt X, els elements del qual s'anomenen punts i que tenim també un conjunt R, els elements del qual són subconjunts de X i s'anomenen rectes. Observem que, si ho fem d'aquesta manera, la relació d'incidència es converteix en la relació de pertinença de la teoria de conjunts. Al llarg d'aquests apunts utilitzarem els dos punts de vista —recta com a objecte primitiu o recta com a conjunt de punts— de manera indistinta.

[6] Hem alterat lleument l'ordenació que fa Hilbert dels seus axiomes.

[7] Prenem el conveni que l'expressió «dues rectes» vol dir dues rectes *diferents*. El mateix diem respecte dels punts, etc.

[8] L'axioma **I.3** ens diu que la geometria no es redueix a una única recta, és a dir, la dimensió de l'espai és més gran que 1. Com que hem dit que volem estudiar geometria plana ara hauríem d'incloure un axioma que ens digués que la dimensió és menor que 3. Un axioma apropiat seria aquest «axioma de coplanaritat»: *Si A, B, C, D són quatre punts diferents aleshores alguna d'aquestes parelles de rectes es tallen: AB i CD, AD i CB, AC i BD.* De tota manera, no incloem aquest axioma a la llista d'axiomes perquè serà una conseqüència d'altres axiomes que hem d'introduir més endavant. Vegeu l'exercici **I**.30.

II.1 Si B està entre A i C, aleshores A, B i C estan sobre una mateixa recta, són diferents, i B està entre C i A.

II.2 Donats dos punts A i B, hi ha com a mínim un punt C tal que B està entre A i C.

Observem que aquest axioma **II.2** ve a ser l'axioma **II** d'Euclides, el que afirma que tot segment es pot prolongar.

II.3 Donats tres punts d'una recta, com a màxim n'hi ha un que està entre els altres dos.

Observem que no postulem que, donats tres punts alineats, sempre n'hi ha d'haver un que estigui entre els altres dos. Això serà, més endavant, un teorema (vegeu l'exercici **I**.26).

La relació d'«estar entre» permet definir el concepte de *punts d'un segment*. Un segment serà una parella (no ordenada) de punts (diferents). Si els punts són A i B, designarem el segment per AB o, equivalentment, BA. Anomenarem *punts del segment* AB els punts que estan entre A i B. Els punts A i B s'anomenen *extrems* del segment i (opcionalment) també podem dir que formen part del segment AB.

Els axiomes que hem introduït fins ara són elementals i previsibles. En canvi, l'axioma que introduirem a continuació pot ser una autèntica sorpresa. S'anomena **axioma de Pasch**:[9]

II.4 *(Axioma de Pasch)* Siguin A, B i C tres punts no alineats i sigui r una recta que no passi per cap d'aquests punts i talli el segment AB. Aleshores r talla el segment AC o talla el segment BC.[10]

És a dir, si una recta talla un costat d'un triangle i no passa per cap vèrtex, aleshores talla també un segon costat del triangle. No cal dir que Euclides —i tots els geòmetres posteriors fins a Pasch— van utilitzar aquesta propietat sense ni demostrar-la ni incloure-la entre els axiomes.

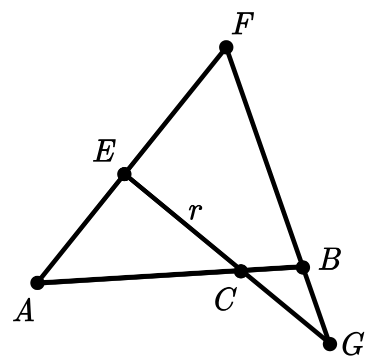
[9]Moritz Pasch va ser un matemàtic alemany que va publicar el 1882 un llibre sobre fonaments de la geometria on, per primera vegada, presenta una axiomatització de la noció d'«estar entre» per tal de fonamentar amb ple rigor l'obra d'Euclides. Hilbert es va inspirar en aquesta obra anterior que, en particular, inclou l'axioma **II.4**.

[10]Observem també que aquest axioma és clarament fals quan hi ha tres o més dimensions. De fet, es pot demostrar que els axiomes d'incidència i ordre (incloent l'axioma de Pasch) impliquen que la geometria és plana, el el sentit que es compleix l'axioma de coplanaritat que hem vist a la nota 8 (vegeu l'exercici **I**.30). El que pot ser sorprenent és que, encara que la geometria sigui plana, l'axioma de Pasch no sigui conseqüència dels altres axiomes.

Tenim ja la llista completa d'axiomes d'ordre. Com a primers resultats, podríem demostrar aquestes propietats (que no són trivials):

1. *Entre dos punts sempre n'hi ha algun altre.*
2. *Si tenim tres punts alineats, sempre n'hi ha un que està entre els altres dos.* (Exercici **I**.26.)
3. *Donats quatre punts d'una recta, sempre es poden designar amb lletres A, B, C i D, de manera que: a) B està entre A i C; b) B està entre A i D; c) C està entre A i D i d) C està entre B i D.* (Exercici **I**.27)
4. *Entre dos punts hi ha infinits punts.*

Com a exemple, demostrarem la primera d'aquestes propietats. Suposem que tenim dos punts A i B. Escollim un punt E que no pertanyi a la recta que passa per A i B. Aquest punt existeix per l'axioma **I.3**. Escollim ara un punt F tal que E estigui entre A i F. Aquest punt existeix per l'axioma **II.2**. Observem que $F \neq B$. Tonem a aplicar el mateix axioma **II.2** i trobem un punt G tal que B estigui entre F i G. Sigui r la recta que passa per E i G. Finalment, apliquem l'axioma de Pasch al triangle ABF i a la recta r que talla el segment AF. Deduïm que r talla el segment FB o el segment AB. El primer cas és impossible perquè aleshores tindríem que G està entre F i B, en contradicció amb l'axioma **II.3**. Per tant, r talla el segment AB en un punt C que estarà, per tant, entre A i B.



Semirectes, semiplans i angles

Ara podem definir els conceptes de *semirecta* i *semiplà*. Donada una recta r i un punt A sobre ella podem definir una relació d'equivalència entre els punts de r diferents de A: direm que dos punts B i C de r són «al mateix costat» si A no està entre B i C. Els axiomes que hem introduït permeten demostrar que tenim realment una relació d'equivalència i els punts de r diferents de A es distribueixen en dues classes d'equivalència, anomenats *costats* de la recta respecte de A (exercici I.28). Una *semirecta* serà, per definició, un punt A, anomenat *vèrtex* i tots els punts d'una recta que passa per A que estan a un mateix costat respecte de A. Anàlogament, si tenim una recta, els punts que no pertanyen a la recta queden classificats en dues classes d'equivalència si diem que dos punts A i B són equivalents quan el segment AB no talla la recta donada. Novament, l'axioma de Pasch i les propietats anteriors ens permeten demostrar que es tracta d'una relació d'equivalència. Un *semiplà* serà una recta i tots els punts d'una d'aquestes dues classes d'equivalència.

Un *angle* serà, per definició, una parella no ordenada de semirectes del mateix vèrtex, que pertanyin a rectes diferents. Observem que no considerem com a angles ni l'*angle nul* (cas de dues semirectes iguals) ni l'*angle pla* (cas de dues semirectes diferents, però pertanyents a una mateixa recta).[11] Les semirectes que defineixen l'angle s'anomenen *costats* de l'angle i el vèrtex comú d'ambdues és el *vèrtex* de l'angle.

Els axiomes que hem anat introduint permeten demostrar que un angle divideix els punts del pla (que no estiguin als costats de l'angle) en dues classes: els punts *interiors* i els punts *exteriors*. Amb un cert esforç podríem demostrar aquestes propietats:

a) Si els extrems d'un segment són punts interiors d'un angle, tot el segment està contingut a l'interior de l'angle.

b) Si una semirecta té el mateix vèrtex que un angle i no és costat d'aquest angle, aleshores està totalment continguda a l'interior o a l'exterior de l'angle (llevat, és clar, del vèrtex).

c) Si h i k són els costats d'un angle de vèrtex O, $H \neq O$ un punt sobre h, $K \neq O$ un punt sobre k i l una semirecta de vèrtex O que passa per un punt interior de l'angle, aleshores l talla el segment HK.

[11] Hi ha diverses maneres de definir el concepte d'angle i aquí ens hem hagut de decidir per una de concreta. Observem que no considerem que hi hagi angles «negatius» i que dues semirectes del mateix vèrtex defineixen un únic angle (i no pas dos, com succeeix en alguns contextos). Dit d'una altra manera: tots els nostres angles seran inferiors a π.

4. Congruència, continuïtat i l'axioma de les paral·leles

Axiomes de congruència

Hem dit que tenim punts i rectes i relacions d'incidència, d'ordre i de congruència. La congruència està definida entre parelles (no ordenades) de punts —o, equivalentment, entre segments— i l'escriurem $AB \equiv A'B'$. La congruència també està definida entre angles i l'escriurem $hk \equiv h'k'$. D'entrada, postulem que aquestes relacions són d'equivalència. La congruència d'angles ens permet definir l'**angle recte** que és aquell angle —d'entrada no sabem si existeix o no— que és congruent al seu adjacent. En aquest apartat enunciarem els axiomes que han de complir aquestes relacions de congruència.

Els axiomes que exigim a les relacions de congruència són.

III.1 La congruència d'angles i la congruència de segments són relacions d'equivalència.

III.2 Siguin a i b dues rectes no necessàriament diferents, A i B punts sobre la recta a, A' un punt sobre la recta b. Fixem un costat de la recta b respecte de A'. Existeix un punt B' sobre aquest costat de b tal que $AB \equiv A'B'$.[1]

Aquest axioma és el que ens permet «traslladar» un segment donat sobre qualsevol altra recta, en un sentit prefixat. En certa manera, juga un paper similar a l'axioma III d'Euclides sobre l'existència de circumferències.

El següent axioma és el que ens permetrà «sumar» segments, en el sentit de posar-ne un a continuació de l'altre:

III.3 Siguin a i a' dues rectes no necessàriament diferents. Siguin AB i BC segments sobre a que tinguin només un punt en comú. Siguin $A'B'$ i

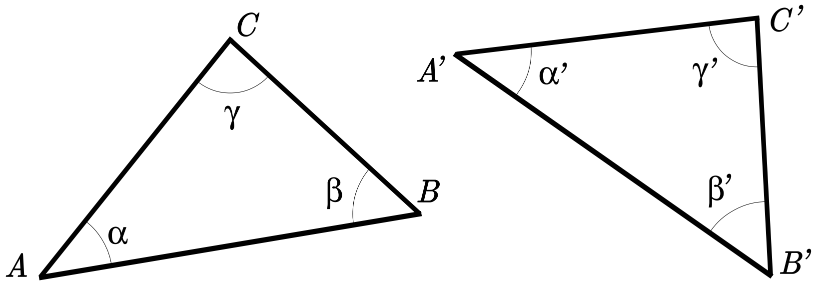
[1] Observem que no hem postulat la unicitat de B', que serà una conseqüència dels axiomes de congruència.

$B'C'$ sobre a' amb la mateixa propietat. Si $AB \equiv A'B'$ i $BC \equiv B'C'$, aleshores $AC \equiv A'C'$.

L'axioma que ve a continuació ens diu que la congruència d'angles verifica una propietat anàloga a la de l'axioma **III.2** per a segments.

III.4 Donat un angle hk i donada una semirecta k' i un semiplà H dels dos que defineix k', existeix un únic angle $h'k'$ tal que $hk \equiv h'k'$ i h' pertany al semiplà H.

El cinquè axioma de congruència, com va passar amb l'axioma de Pasch, pot resultar una mica sorprenent. Es tracta del teorema quart del llibre primer dels *Elements* d'Euclides, que és un criteri de congruència de triangles que és coneix com el «criteri costat-angle-costat» (CAC). L'axioma diu això (un triangle són tres punts no ordenats no alineats):



III.5 (Criteri CAC) Considerem dos triangles ABC i $A'B'C'$ (no necessàriament diferents). Si $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$ i $\alpha \equiv \alpha'$, aleshores $\beta \equiv \beta'$.

Més endavant veurem que aquesta propietat dels triangles no es pot demostrar a partir dels altres axiomes i, per tant, la seva inclusió com a axioma és imprescindible si volem reconstruir la geometria d'Euclides. La necessitat d'aquest axioma s'entén millor quan pensem que és l'únic axioma que relaciona la congruència de segments amb la congruència d'angles.[2]

[2]Hem dit que Euclides «demostra» aquest axioma i, en conseqüència, la seva demostració deu ser incorrecta. On és l'error? Resulta que aquest teorema dels *Elements* és un dels pocs on Euclides utilitza el mètode de «superposició» —del que ja havíem parlat quan discutíem l'axioma IV—: superposa els dos triangles i veu que, efectivament, són el mateix. Aquesta operació de superposar no està admesa en els axiomes d'Euclides i el fet que Euclides no l'usi gairebé mai sembla indicar que la seva validesa era discutible. En conclusió, aquest axioma **III.5** està relacionat amb el *moviment*: si fonamentem la geometria en el moviment, l'axioma és un teorema; si fem una geometria *sense moviment* —com Euclides, com Hilbert—, ha de ser un axioma. (Vegeu l'exercici **I**.38.)

Amb aquests axiomes és senzill definir una relació d'ordre entre els segments i també entre els angles, de manera que tingui sentit dir $AB < A'B'$ o $\alpha < \alpha'$.

Amb els tres grups d'axiomes **I**, **II**, **III** que hem introduït fins ara — incidència, ordre i congruència— ja és possible demostrar una part molt important dels teoremes que trobem als *Elements*. Una geometria que compleixi aquests axiomes es diu que és un **pla de Hilbert**[3] i l'estudi de la geometria dels plans de Hilbert es coneix com a *geometria absoluta*.

Axiomes de continuïtat

Des de la primera proposició del primer llibre dels *Elements*, Euclides utilitza, sense justificació, unes propietats que en podríem dir «de continuïtat». En efecte, quan troba el tercer vèrtex d'un triangle equilàter de base AB ho fa tallant dues circumferències de centres A i B, respectivament, i radi AB (vegeu la pàgina 13). Però l'existència d'aquest punt de tall no sembla que estigui garantida per cap dels seus axiomes.[4] Cal, doncs, incloure a la llista d'axiomes de la geometria alguns axiomes de continuïtat que permetin assegurar l'existència d'aquests punts de tall de rectes i circumferències.

Dins d'aquest grup d'axiomes també hi podem incloure alguna versió de l'axioma d'Arquimedes, que ens assegura que repetint successivament un mateix segment podrem arribar a superar qualsevol altre segment donat.[5]

L'opció que pren Hilbert és incloure aquests dos axiomes de continuïtat:

> **Axioma d'Arquimedes**. Donats dos punts N i Z d'una semirecta de vèrtex M, existeix un nombre natural n tal que, si col·loquem un a continuació de l'altre n segments congruents a MN, començant per M, Z estarà entre M i l'extrem lliure del darrer d'aquests segments.
>
> **Axioma de no-extensió**. No és possible afegir nous punts i noves rectes de manera que es conservin les relacions d'ordre i congruència i es segueixin verificant la resta d'axiomes.

[3] Un (difícil) teorema de Wolfgang Pejas de l'any 1961 dóna una classificació de tots els plans de Hilbert, és a dir, de totes les geometries que compleixen els axiomes **I**, **II**, **III**.

[4] Curiosament, la proposició primera del llibre primer dels *Elements* sí que es pot demostrar sense cap axioma de continuïtat, és a dir, n'hi ha prou amb els axiomes **I**, **II**, **III** dels plans de Hilbert i l'axioma de les paral·leles **V**. Vegeu l'exercici **I**.42.

[5] Aquest axioma apareix, en certa forma, als *Elements* quan Euclides diu, a la definició quarta del llibre cinquè, que *«dues magnituds formen raó quan cada una admet un múltiple que és més gran que l'altra»*. Euclides utilitza per primer cop el que nosaltres anomenem axioma d'Arquimedes a la proposició primera del llibre x.

Aquests axiomes[6] vénen a dir que els punts d'una recta es poden identificar al contínuum dels nombres reals perquè els nombres reals ens permeten «mesurar» segments. És a dir, si fixem un «segment unitat», podem associar a cada segment un nombre real (la seva «longitud») de manera que: a) hi ha segments de qualsevol longitud; b) dos segments són congruents si i només si tenen la mateixa longitud. Podem fer el mateix amb els angles: assignem un nombre real arbitrari a l'angle recte —per exemple, $\pi/2$— i aleshores podem assignar a cada angle un nombre real (la seva «mesura») de manera que: a) hi ha angles de qualsevol mesura $\theta \in (0, \pi)$; b) dos angles són congruents si i només si tenen la mateixa mesura.

La inclusió d'aquests dos axiomes ha estat objecte de debat. En primer lloc, salta a la vista el seu caràcter poc o gens «geomètric» que fa que contrastin fortament amb la resta d'axiomes. En segon lloc, condueixen obligatòriament als nombre reals i al pla $\mathbb{R}^2$, traint completament l'esperit de la matemàtica d'Euclides. Finalment, si el problema el trobem només en l'existència de les interseccions recta-circumferència i circumferència-recta, per què no postulem simplement l'existència d'aquests punts de tall, sense que calgui donar entrada a la (problemàtica) teoria dels nombres reals? A la vista d'això, aquests axiomes semblarien més adients:

RC Si una recta passa per algun punt interior a una circumferència, talla la circumferència en dos punts.

CC Si una circumferència passa per punts interiors i per punts exteriors a una altra, les dues circumferències es tallen en dos punts.

De fet, Julius Strommer va demostrar l'any 1973 que, en un pla de Hilbert, aquests dos axiomes són equivalents i, per tant, podem prendre com a únic axioma de continuïtat qualsevol d'ells. Tanmateix, els axiomes de continuïtat de Hilbert impliquen aquests dos axiomes de continuïtat «geomètrics».

[6] Els dos axiomes de continuïtat de Hilbert es poden resumir en un únic axioma anomenat **axioma de Dedekind**: *Si expressem els punts d'una recta com a unió disjunta de dos conjunts de manera que cap punt de cada conjunt estigui entre dos punts de l'altre conjunt, aleshores hi ha un únic punt O a la recta tal que un dels conjunts és la semirecta de vèrtex O.* Aquest axioma és, doncs, equivalent a la parella d'axiomes que Hilbert pren com a axiomes de continuïtat. D'altra banda, si es vol un axioma que sigui equivalent a l'estrany axioma de no-extensió de Hilbert (i que, en particular, no impliqui l'axioma d'Arquimedes) es pot utilitzar el que es coneix com a **axioma de Cantor**: *Si tenim una successió de segments A_nB_n on cada un conté el següent i es compleix que, donat qualsevol segment XY, existeix un n tal que $A_nB_n < XY$, aleshores existeix un punt comú a tots els segments A_nB_n.* (Vegeu l'exercici **I**.48.)

L'axioma de les paral·leles

Per tal de completar l'axiomàtica de Hilbert ens cal un últim i crucial axioma: l'axioma de les paral·leles. Recordem que, com que fem geometria plana, definim rectes paral·leles com les que no tenen cap punt en comú. De totes les formulacions equivalents de l'axioma cinquè d'Euclides, la més simple i apropiada és aquesta:

V Per un punt exterior a una recta hi passa, com a màxim, una paral·lela a la recta.

Amb els axiomes **I**, **II**, **III** es pot demostrar que per un punt exterior a una recta hi passa com a mínim una paral·lela a la recta (vegeu la pàgina 33). L'axioma **V** ens diu, per tant, que n'hi passa exactament una. En presència de tots els altres axiomes **I**, **II**, **III**, **IV**, aquest axioma **V** és equivalent a l'axioma cinquè d'Euclides.

Podem fer tota la geometria plana d'Euclides amb aquests axiomes? Recapitulem:

- Un **pla de Hilbert** és una geometria on es compleixen els axiomes **I**, **II**, **III**. Una part important de la geometria d'Euclides és vàlida a qualsevol pla de Hilbert: és la que es coneix com a *geometria absoluta* i l'estudiarem al capítol següent. En canvi, en un pla de Hilbert no es pot demostrar, en general, ni la unicitat de la paral·lela (axioma **V**) ni el teorema que afirma que la suma dels tres angles d'un triangle és igual a dos rectes.
- Un **pla pitagòric** és un pla de Hilbert on, a més, es compleix l'axioma **V**. En aquests plans es pot demostrar, per exemple, el teorema de Pitàgores, que la suma dels tres angles d'un triangle és igual a dos rectes i els teoremes d'Euclides sobre triangles semblants. Però encara hi ha teoremes d'Euclides que, en general, no es poden demostrar: per exemple, l'existència d'un triangle isòsceles de costats donats (vegeu l'exercici **I**.46b).
- Un **pla euclidià** és un pla pitagòric on, a més, es compleix l'axioma **CC**. En un pla euclidià es poden demostrar **tots** els teoremes de geometria plana (lineal) d'Euclides però hi ha plans euclidians diferents de $\mathbb{R}^2$ i podem trobar propietats de la geometria de $\mathbb{R}^2$ que siguin falses a un

pla euclidià general com, per exemple, la propietat de l'axioma d'Arquimedes o la propietat del suprem per als punts d'una recta, típiques del pla real.[7]

- Finalment, si considerem tots els axiomes de Hilbert —incloent els seus dos axiomes de continuïtat (Arquimedes i no-extensió)— només hi ha una geometria possible: la geometria cartesiana ordinària del pla real $\mathbb{R}^2$.

[7] També hi ha alguna propietat geomètrica relativa a la teoria de l'àrea que no és certa sense l'axioma d'Arquimedes. Vegeu l'exercici **I**.24. D'altra banda, quan Euclides estudia l'àrea de la circumferència o el volum de la piràmide, sí que necessita utilitzar l'axioma d'Arquimedes i, de fet, no podem reproduir els seus resultats en un pla euclidià general.

5. Geometria absoluta

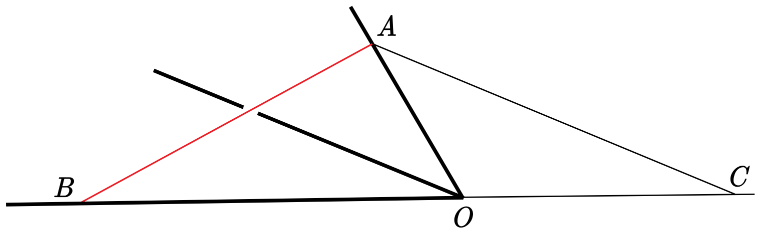
Ja hem dit que la *geometria absoluta* és aquella part de la geometria d'Euclides que només utilitza els axiomes **I**, **II**, **III** de Hilbert. És la geometria que és vàlida a tots els *plans de Hilbert* i desenvolupar-la equivaldria a decidir exactament quines proposicions dels *Elements* es poden demostrar sense dibuixar circumferències (perquè no podem aplicar els axiomes **CC** ni **RC**), sense l'axioma de les paral·leles i sense l'axioma d'Arquimedes . No tenim el temps necessari per dur a terme tot aquest programa, però sí que farem una petita llista dels principals teoremes de la geometria absoluta i donarem algunes indicacions sobre la seva demostració.[1] En molts casos, la mateixa demostració d'Euclides és vàlida, però quan Euclides utilitza els punts d'intersecció d'una circumferència i una recta o de dues circumferències, cal buscar una demostració alternativa.

- *En un triangle isòsceles, els angles oposats als costats congruents són congruents.*[2] És una conseqüència immediata de l'axioma **III.5**.
- *El criteri CAC de congruència de triangles*. És a dir, en les condicions de l'axioma **III.5**, tots els costats i tots els angles corresponents són congruents.
- *Els angles adjacents d'angles congruents són congruents*. La demostració és senzilla, aplicant tres vegades **III.5**.
- *Els angles oposats són congruents*. Conseqüència immediata del resultat anterior.
- *Si A i B estan cadascun a un costat d'un angle de vèrtex O, qualsevol semirecta de vèrtex O que passi per un punt interior de l'angle ha de tallar el segment AB.* Aquest resultat es demostra prenent un punt C

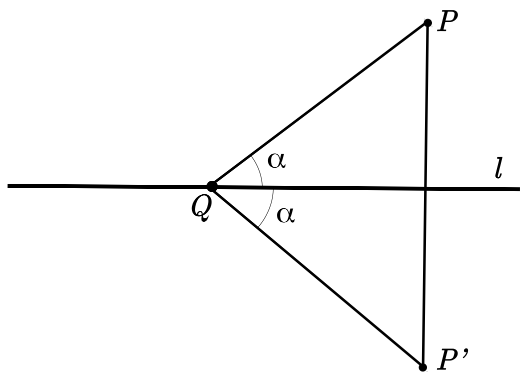
[1] Per un estudi exhaustiu d'aquest tema podeu consultar l'excel·lent tractat *Geometry: Euclid and beyond*, de Robin Hartshorne.

[2] Aquest és el cèlebre *pons asinorum*, nom amb que es coneix clàssicament la proposició 5 del llibre primer dels *Elements*. Vegeu H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, apartat 1.3. Vegeu també I. Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, capítol 2.

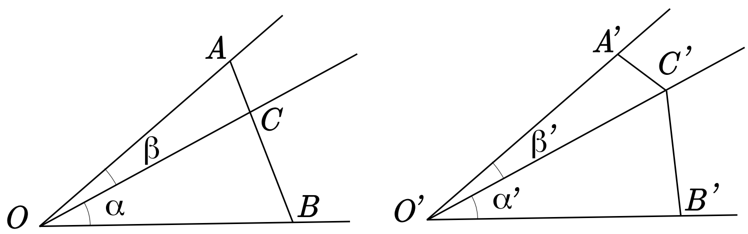
tal que O estigui entre B i C i aplicant l'axioma de Pasch al triangle ABC.



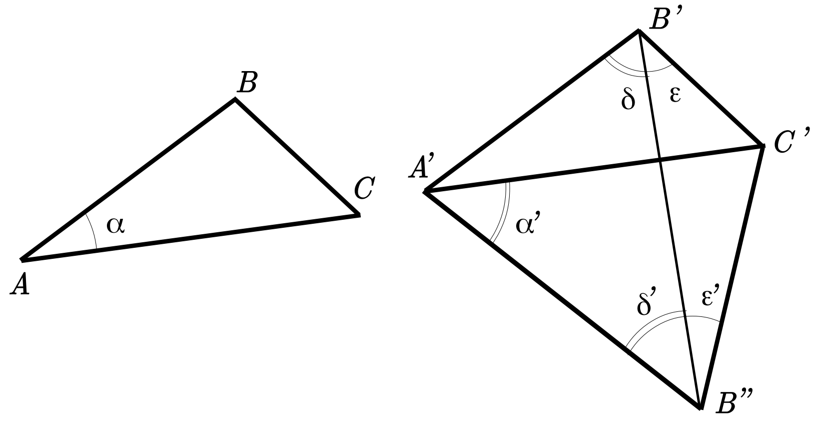
- *Existeixen angles rectes.* És més, des d'un punt exterior a una recta es pot traçar una perpendicular a la recta. Per comprovar-ho fem aquesta construcció: si volem traçar una perpendicular des de P a una recta l que no passi per P, escollim un punt Q a l, traslladem l'angle α a l'altre costat de l, prenem P' tal que $QP \equiv QP'$ i aleshores la recta PP' serà perpendicular a l.



- *La suma d'angles és compatible amb la congruència d'angles.* Si $\alpha \equiv \alpha'$ i $\beta \equiv \beta'$, aleshores $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$. Recordem que la suma de dos angles s'obté posant-ne un a continuació de l'altre, segons l'axioma **III**.4. Per demostrar-ho, prenem punts A i B tals que $OA \equiv OB$, trobem el punt C (per un resultat anterior) i prenem A', B', C' tals que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ i $OC \equiv O'C'$. Aleshores, és fàcil veure que A', B' C' estan alineats i d'aquí resulta que $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'$.



- *El criteri CCC de congruència de triangles.* Si dos triangles tenen els costats congruents, també tenen els angles congruents. Suposem, doncs, que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ i $BC \equiv B'C'$. Prenem un punt B'' a l'altre semiplà que B' respecte de $A'C'$ de manera que $\alpha \equiv \alpha'$ i $AB \equiv A'B''$. Aleshores —distingint els casos segons que $B'B''$ talli o no el segment $A'C'$ i aplicant dues vegades el teorema del triangle isòsceles— arribem a que $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$.

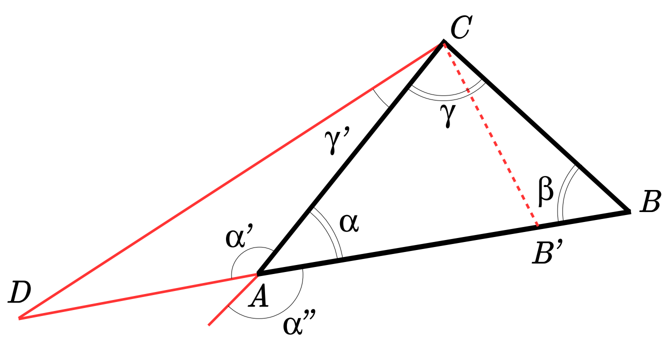


- *Tots els angles rectes són congruents.* Aquest és l'axioma quart d'Euclides, que ara admet una demostració senzilla.

- *El teorema dels angles exteriors.* És la proposició 16 del llibre I d'Euclides. Els *angles exteriors* d'un triangle es defineixen com els que són adjacents als angles del triangle.

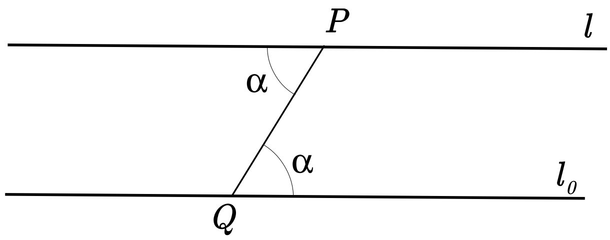
  Un angle exterior d'un triangle és més gran que qualsevol dels angles del triangle no adjacents a ell.

  N'hi ha prou amb demostrar $\alpha' > \gamma$, perquè ja sabem que $\alpha' \equiv \alpha''$ i, per tant, també tindrem $\alpha' > \beta$. Prenem un punt D sobre la recta AB tal que $AD \equiv CB$.



Veiem que $\alpha' \not\equiv \gamma$ perquè, si fossin iguals, el criteri CAC implicaria que els triangles ADC i CBA són congruents, d'on $\alpha \equiv \gamma'$. Aleshores tindríem que γ' seria adjacent a γ, cosa que no pot ser. Per tant, $\alpha' \not\equiv \gamma$. Però tampoc no és possible $\alpha' < \gamma$. En efecte, això voldria dir que, si transportem α' al vèrtex C, tindríem un triangle $AB'C$, on un angle exterior seria congruent a un angle interior, cosa que ja hem vist que no pot succeir. Resta només la possibilitat $\alpha' > \gamma$.

- *Existència de paral·leles.* Si l_0 és una recta i P és un punt que no pertany a l_0, hi ha una recta l que passa per P i no talla l_0. Ni ha prou amb fer aquesta construcció i observar que si l i l_0 es tallessin tindríem un triangle on un angle exterior seria igual a un angle interior.

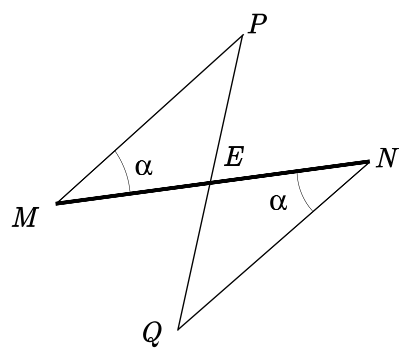


- *Els criteris ACA i CAA de congruència de triangles.* Si dos triangles tenen un costat i els dos angles d'aquest costat congruents, els triangles són congruents. Si dos triangles tenen un costat, un angle d'aquest costat i l'angle oposat al costat congruents, els triangles són congruents. Les demostracions són senzilles (la segona utilitza el teorema dels angles exteriors).

- *En un triangle, costats grans s'oposen a angles grans.* És a dir, si en el triangle ABC tenim $AB > AC$, aleshores $\widehat{C} > \widehat{B}$. És una conseqüència senzilla del teorema dels angles exteriors.

- *Si un triangle té dos angles congruents, és isòsceles.*

- *Tot segment té punt mig. Tot angle té bisectriu.* Per trobar el punt mig entre M i N escollim un punt P i col·loquem l'angle α de manera que obtenim un punt Q amb $MP \equiv NQ$. Si el punt E està entre M i N és molt fàcil demostrar que $ME \equiv NE$. La possibilitat que E no estigui entre M i N queda exclosa pel teorema dels angles exteriors. La bisectriu d'un angle $\widehat{O}$ es troba prenent un punt A sobre un costat, un punt B sobre l'altre costat tal que $OA \equiv OB$ i prenent el punt mig del segment AB. Aleshores, la recta OM és la bisectriu de l'angle $\widehat{O}$.



- *Cada segment té mediatriu.* Com que hem vist que hi ha punt mig i hi ha angles rectes, ja hem acabat.

En resum, la pràctica totalitat del llibre primer d'Euclides és vàlida a qualsevol pla de Hilbert.[3]

La suma dels angles d'un triangle

Un dels teoremes bàsics de la geometria d'Euclides és el que afirma que *la suma dels tres angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes.* És a dir, si posem els tres angles d'un triangle un a continuació de l'altre, obtenim un *angle pla.* La demostració d'aquest fet és senzilla però utilitza, inevitablement, l'axioma de les paral·leles i, per tant, no és un teorema de geometria absoluta. Ens plantegem la pregunta *«què podem afirmar de la suma dels tres angles d'un triangle si no podem utilitzar l'axioma de les paral·leles?»* La resposta la dóna un teorema de Legendre:[4]

> [Primer teorema de Legendre] *La suma dels angles de qualsevol triangle és menor o igual que dos rectes.*[5]

[3]Només fallen l'existència del triangle equilàter de costat donat (proposició primera del llibre primer) i la construcció d'un triangle amb tres costats donats (proposició 22 del llibre primer). A l'exercici **I**.46b es demostra que aquest segon resultat no forma part de la geometria absoluta. La impossibilitat de construir un triangle equilàter sobre un segment donat aplicant només els axiomes **I**, **II**, **III** és força més difícil de demostrar (vegeu l'exercici 39.31 del llibre citat de Robin Hartshorne).

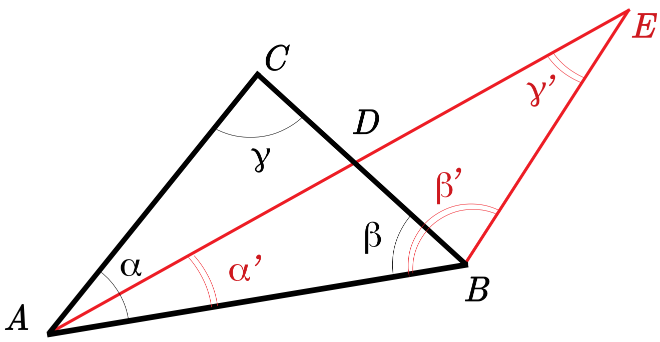
[4]Adrien-Marie Legendre va publicar el 1794 uns importants *Éléments de Géométrie*. Aquest teorema de Legendre que expliquem aquí forma part dels intents d'aquest matemàtic de demostrar el cinquè postulat (vegeu també la pàgina 240). De fet, aquest teorema ja apareix a l'obra de Saccheri (citada a la nota de la pàgina 17) i, per aquest motiu, sovint s'anomena *teorema de Saccheri-Legendre*.

[5]El fet que aquest teorema s'anomeni *primer* teorema de Legendre sembla indicar que hi ha un *segon* teorema de Legendre. En efecte, el segon teorema de Legendre diu que *«si hi ha un triangle on la suma dels angles val dos rectes, aleshores, la suma dels angles de tot triangle val dos rectes»*.

La demostració d'aquest resultat és molt bonica. En primer lloc cal una mena d'axioma d'Arquimedes per a angles:

> *Si α i ϵ són angles, existeix un nombre natural r tal que, si dividim l'angle α per la meitat r vegades, obtenim un angle més petit que ϵ.*

Aquest resultat es pot demostrar a partir de l'axioma d'Arquimedes, utilitzant el teorema dels angles exteriors (vegeu l'exercici **I.34**). Aleshores, per demostrar el teorema de Legendre, considerem un triangle ABC amb angles α, β, γ i suposem, per exemple, que $\beta \leq \gamma$. Aleshores, pel teorema de geometria absoluta que ens diu que en un triangle els angles grans s'oposen a costats grans, tenim que $AC \leq AB$.



Sigui D el punt mig del costat BC i sigui E tal que $AD \equiv DE$. Tenim un segon triangle ABE amb angles α', β', γ' i es compleix

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

En efecte, els triangles ACD i DBE són congruents, per tant, $\gamma' = \alpha - \alpha'$, $\gamma = \beta' - \beta$. D'altra banda, $AC \leq AB$ i, per tant, $\alpha' \leq \gamma' = \alpha - \alpha'$, és a dir, $\alpha' \leq \alpha/2$.

Amb aquesta construcció hem vist que, donat un triangle en el qual hem escollit un angle, podem trobar un altre triangle amb la mateixa suma d'angles, però amb un angle menor o igual a la meitat de l'angle inicial. Suposem que la suma dels angles del triangle inicial superés dos rectes en un angle ϵ. Si α és un angle del triangle i escollim un enter r tal que $\alpha/2^r < \epsilon$ (aquest r existeix pel resultat anterior), la construcció que acabem de fer ens permet construir un triangle amb la mateixa suma d'angles que el triangle inicial i amb un angle menor que ϵ. Això implicaria que els altres dos angles sumen més de dos rectes, la qual cosa està en contradicció amb el teorema dels angles exteriors.[6]

A partir dels axiomes **I**, **II**, **III** i **IV** *no* es pot deduir que la suma dels angles d'un triangle sigui *igual* a dos rectes. De fet, aquesta afirmació és equivalent —en presència de l'axioma d'Arquimedes[7]— a l'axioma de les paral·leles.

[6] La demostració del primer teorema de Legendre que acabem de donar utilitza l'axioma d'Arquimedes. Sorgeix, per tant, la pregunta de si aquest axioma és realment necessari per poder afirmar que la suma dels angles d'un triangle és, com a màxim, dos rectes. La resposta és sí: existeix una geometria que verifica els axiomes **I**, **II** i **III**, però on, en canvi, la suma dels angles d'un triangle és més gran que dos rectes. En podríem dir «geometria no legendriana». Aquesta geometria ha de ser, necessàriament, no arquimediana (vegeu la pàgina 47).

[7] En canvi, hi ha una geometria que compleix els axiomes **I**, **II** i **III**, no compleix ni l'axioma de les paral·leles ni l'axioma d'Arquimedes i on la suma dels angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes (vegeu la pàgina 47). Si afegim als axiomes **I**, **II**, **III** un axioma $\Sigma = \pi$ que digui que la suma dels angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes, obtenim una geometria que s'anomena *semi-euclidiana* i que es situa a mig camí entre els plans de Hilbert i els plans pitagòrics. Tenim una sèrie d'inclusions estrictes

$$\{\text{plans de Hilbert } (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III})\} \supsetneq \{\text{plans semi-euclidians } (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \Sigma = \pi)\} \supsetneq$$
$$\{\text{plans pitagòrics } (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{V})\} \supsetneq \{\text{plans euclidians } (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{V}, \mathbf{CC})\} \supsetneq$$
$$\{\text{plans euclidians arquimedians } (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{V}, \mathbf{CC}, \mathbf{Arq.})\} \supsetneq \{\mathbb{R}^2\} \ (\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III}, \mathbf{IV}, \mathbf{V}).$$

6. Geometria cartesiana

A l'ensenyament secundari hem après a treballar amb *coordenades cartesianes*: cada punt del pla ve donat per dues coordenades (x, y), cada recta té una *equació* $ax + by + c = 0$ i es compleixen, si més no, els axiomes d'incidència. Hem vist també que d'aquesta manera podem fer una «geometria cartesiana» que sembla la d'Euclides, i la podem fer en qualsevol dimensió si, en lloc de prendre parelles de nombres, considerem n-ples $(x_1, \dots, x_n)$. Normalment, consideràvem que les coordenades d'un punt eren nombres reals, però és clar que podem considerar que són elements d'un cos arbitrari k. Direm que és la *geometria afí ordinària* sobre el cos k i l'estudiarem amb detall a la tercera part d'aquesta obra.

Ja sabem que si $k = \mathbb{R}$ podem fer tota la geometria plana d'Euclides-Hilbert al pla k^2 de la geometria cartesiana, però la pregunta que ens fem en aquest capítol és si podem fer també aquesta geometria —o una part important d'ella— sobre alguns altres cossos $k \neq \mathbb{R}$.[1]

Axiomes d'incidència i l'axioma de les paral·leles a k^2

Com hem dit, un punt del pla k^2 és una parella ordenada (x, y) d'elements de k i una recta estarà formada per tots els punts que compleixen una certa equació lineal de primer grau $ax + by + c = 0$. Amb aquestes definicions la verificació dels axiomes d'incidència és trivial. També és trivial comprovar que es compleix l'axioma de les paral·leles. No cal fer cap hipòtesi suplementària sobre el cos k.

Axiomes d'ordre a k^2

És raonable pensar que si volem que a la geometria de k^2 puguem dir que un punt A està entre B i C cal tenir una certa *relació d'ordre* entre els elements de k. Aquesta idea ens du al concepte de *cos ordenat*: un cos amb una relació d'ordre total que compleix aquestes dues propietats:

[1] Aquesta pregunta pot tenir també implicacions computacionals. Recordem que és impossible fer càlculs *exactes* sobre el cos real i, per tant, pot ser interessant trobar un cos «computable» sobre el que puguem fer geometria lineal de manera exacta.

1. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ per tot $z \in k$.
2. $x, y \geq 0$ implica $xy \geq 0$.

Per exemple, $\mathbb{R}$ (i qualsevol subcòs seu) és un cos ordenat, però hi ha altres cossos ordenats més enllà d'aquests. En tot cas, si k és un cos ordenat, podem definir què vol dir que A estigui entre B i C d'aquesta manera:

$$(a, b) \text{ està entre } (x, y) \text{ i } (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b), (x, y), (x', y') \text{ estan alineats} \\ \qquad\qquad\qquad \text{i} \\ (x < a < x') \text{ o } (x' > a > x) \\ \text{o } (y < b < y') \text{ o } (y' > b > y) \end{cases}$$

Amb aquesta definició es pot demostrar (vegeu els exercicis **III**.23 i **III**.24) que es compleixen els axiomes d'ordre —inclòs l'axioma de Pasch— i també, recíprocament, que l'existència d'una relació d'«estar entre» als punts de k^2 implica que hi ha una estructura de cos ordenat a k.

Axiomes de congruència a k^2

Si A, B, A', B' són punts, hem de definir en quins casos $AB \equiv A'B'$. A la geometria cartesiana que vam estudiar al batxillerat, això es feia a partir del concepte de distància, però la definició clàssica de distància entre dos punts del pla real utilitza una arrel quadrada que, si k és un cos general, potser no existeix. Aquesta dificultat és fàcil de superar:

$$AB \equiv A'B' \qquad \Leftrightarrow \qquad ||A - B||^2 = ||A' - B'||^2.$$

on la resta de punts de k^2 s'entén component a component (utilitzant l'estructura canònica de k-espai vectorial de k^2) i la norma al quadrat es defineix de la manera habitual $||(x, y)||^2 := x^2 + y^2$ (que és un element ben definit de k).

La situació amb la congruència d'angles és una mica més complicada. D'entrada, recordem que la definició d'angle només té sentit quan ja tenim axiomes d'ordre (cal poder parlar de semirectes). A la geometria cartesiana real utilitzàvem aquesta fórmula per a l'angle entre dos vectors u i v:

$$\alpha = \arccos \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$$

però ni la norma d'un vector ni la funció arccos tenen sentit en un cos ordenat general k. La solució d'aquest problema passa per elevar al quadrat i prescindir de la funció arccos. Més concretament:

1. En primer lloc, direm que dues rectes concurrents, de vectors directors u, v, són perpendiculars si $u \cdot v = 0$, on el producte escalar es defineix de la manera habitual com $(x, y) \cdot (x', y') := xx' + yy'$.

2. Com que tenim ja definit què és un angle recte i com que tenim axiomes d'ordre, ja sabem què és un angle agut i què és un angle obtús.

3. Si $u, v \in k^n$ són dos vectors diferents de zero, definim
$$m(u, v) = \frac{(u \cdot v)^2}{||u||^2 \cdot ||v||^2}.$$

4. Considerem dos angles α, β. Siguin u_1, v_1 vectors directors de les rectes que formen els costats de α i siguin u_2, v_2 vectors directors de les rectes que formen els costats de β. Direm que $\alpha \equiv \beta$ si es compleix alguna d'aquestes condicions:
   (a) α i β són rectes.
   (b) α i β són aguts i $m(u_1, v_1) = m(u_2, v_2)$.
   (c) α i β són obtusos i $m(u_1, v_1) = m(u_2, v_2)$.

Amb aquestes definicions, es compleixen els axiomes de congruència? La resposta és que, en general, l'axioma **III.2** no es compleix si no afegim alguna hipòtesi addicional sobre el cos k.

Fixem-nos en aquest exemple: considerem, al pla k^2, el segment que té per extrems $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$. Considerem també la recta $y = ax$, per un $a \in k$ arbitrari. Segons l'axioma **III.2**, hi hauria d'haver un punt $B' = (x, y)$ sobre aquesta recta tal que $AB \equiv AB'$. Si calculem les coordenades d'aquest punt B', veiem que aquestes coordenades han de ser tals que
$$1 + a^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

És a dir, si volem que es compleixi l'axioma **III.2**, el cos k ha de complir aquesta propietat
$$a \in k \quad \Rightarrow \quad 1 + a^2 \text{ és un quadrat a } k.$$

Per exemple, el cos $\mathbb{Q}$ no compleix aquesta propietat i, per tant, no podem fer geometria d'Euclides-Hilbert sobre el cos racional.

Direm que un cos k és **pitagòric** si per tot $a \in k$ es compleix que $1+a^2$ és un quadrat a k. Per exemple, $\mathbb{R}$ és pitagòric i, en canvi, $\mathbb{Q}$ no ho és. Si volem que k^2 compleixi els axiomes de congruència de Hilbert és necessari que k sigui un cos pitagòric. També es compleix el recíproc, però la demostració és força més laboriosa (especialment l'axioma **III.5**). En conclusió:

> *k^2 és un pla pitagòric (és a dir, compleix els axiomes **I**, **II**, **III**, **V**) si i només si k és un cos ordenat pitagòric.*

Axiomes de continuïtat a k^2

És evident que l'axioma d'Arquimedes és vàlid a k^2 si i només si és vàlid al cos k, és a dir, k és un *cos ordenat arquimedià*. D'altra banda, els dos axiomes de continuïtat de Hilbert equivalen a l'axioma de Dedekind per a k i l'únic cos ordenat que compleix l'axioma de Dedekind és el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals.

La situació és més interessant quan considerem els axiomes de continuïtat *geomètrics* **RC** i **CC** que fan referència a l'existència dels punts d'intersecció de rectes i circumferències. No és difícil veure que aquests punts existeixen a k^2 si i només si tots els elements positius de k tenen arrel quadrada. Això suggereix adoptar aquesta definició: Un cos ordenat k es diu que és **euclidià** si per tot $a \in k$, $a > 0$, existeix $b \in k$ tal que $b^2 = a$. Aleshores:

> *k^2 és un pla euclidià (és a dir, compleix els axiomes **I**, **II**, **III**, **V**, **CC**) si i només si k és un cos ordenat euclidià.*

El cos $\overline{\mathbb{Q}}$ dels nombres reals *algebraics* és un exemple de cos ordenat euclidià i arquimedià que no compleix l'axioma de Dedekind.

Cossos pitagòrics i cossos euclidians

Hem vist que (pràcticament) tota la geometria d'Euclides es pot fer sobre k^2 quan k és un cos euclidià arbitrari i que una bona part d'aquesta geometria també es pot fer a k^2 quan k és un cos pitagòric. És clar que tot cos euclidià és pitagòric. D'altra banda, observem que un cos ordenat sempre té característica zero (exercici) i, per tant, sempre conté $\mathbb{Q}$. Però $\mathbb{Q}$ no és ni euclidià ni pitagòric, i ens podem preguntar quin és el cos euclidià més petit i quin és el cos euclidià més petit. Aquesta pregunta té interès perquè ens donarà uns models *minimals* on podem fer geometria euclidiana.

El cos pitagòric més petit que hi ha s'anomena *cos de Hilbert* —sovint es denota Ω— i es pot definir com la intersecció de tots els subcossos pitagòrics de $\mathbb{R}$. Alternativament, es pot definir com el cos format pels nombres reals que es poden obtenir a partir dels nombres racionals aplicant successivament les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i l'operació

$$a \mapsto \sqrt{1+a^2}.$$

Per exemple, per veure que $\sqrt{7+2\sqrt{5}} \in \Omega$ observem que

$$\sqrt{5} = \sqrt{1+2^2} \in \Omega$$

i, aleshores, $1+\sqrt{5} \in \Omega$ i

$$\sqrt{7+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+\left(1+\sqrt{5}\right)^2} \in \Omega.$$

El que és més difícil és demostrar que un cert nombre real *no* pertany a Ω. Evidentment, un nombre transcendent com π no pot pertànyer-hi, però si tenim un nombre algebraic, sembla difícil poder demostrar que és impossible escriure'l com una llarga successió d'operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i l'operació $a \mapsto \sqrt{1+a^2}$. Per fer-ho, necessitem uns coneixements de teoria de cossos que no formen part d'aquest curs, però la teoria que cal fer no és molt difícil i ens permet decidir si un nombre real pertany o no a Ω. Com a exemple senzill de nombre algebraic que s'expressa amb sumes, restes, multiplicacions, divisions i arrels quadrades però que, en canvi, no pertany a Ω tenim[2]

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega.$$

D'una manera anàloga, el cos euclidià més petit que hi ha s'anomena *cos construïble* —el denotarem $\mathbb{K}$— i es pot definir com la intersecció de tots els subcossos euclidians de $\mathbb{R}$. Alternativament, es pot definir com el cos format pels nombres reals que es poden obtenir a partir dels nombres racionals aplicant successivament les operacions de suma, resta, multiplicació, divisió i arrel quadrada (de nombres positius). Per exemple, $\sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{K}$ i això demostra que $\mathbb{K}$ és estrictament més gran que Ω.

El nom de cos construïble prové del fet que els punts de $\mathbb{K}^2$ són precisament els punts del pla $\mathbb{R}^2$ que es poden dibuixar fent construccions amb regle i compàs —els instruments d'Euclides— a partir dels punts $(0,0)$ i $(1,0)$.

[2]De fet, el criteri per saber si un nombre real que hem escrit a partir de sumes, restes, multiplicacions, divisions i arrels quadrades de nombres enters és un element de Ω és ben senzill (encara que la seva justificació requereixi uns coneixements de teoria de cossos que no formen part del curs): per tal que un nombre real d'aquests pertanyi a Ω cal que encara que canviem el signe d'algunes arrels quadrades sempre surtin nombres reals.

7. Geometries no euclidianes

Tradicionalment, s'anomena geometria no euclidiana la geometria que compleix tots els axiomes de Hilbert menys l'axioma de les paral·leles, que és fals. Al capítol 2 vam donar alguna petita indicació de la importància històrica d'aquesta geometria —que es coneix com a **geometria hiperbòlica**— i dels autors del seu desenvolupament. Ara, però, ampliarem aquesta noció de geometria no euclidiana a qualsevol geometria que compleixi tots els axiomes de Hilbert menys un —qualsevol d'ells— que serà fals.

L'estudi de les geometries no euclidianes té interès per quatre motius, com a mínim:

- Independència dels axiomes. Si demostrem l'existència d'una geometria que compleix tots els axiomes de Hilbert menys l'axioma x, que és fals, això ens permet afirmar que aquest axioma x no és conseqüència dels altres axiomes i que, per tant, la seva presència a la llista d'axiomes és imprescindible.

- Les geometries no euclidianes ens permeten visualitzar millor quins axiomes són realment necessaris per a demostrar cada teorema important. Per exemple, si veiem que un cert teorema de la geometria d'Euclides és fals a la geometria no euclidiana on, per exemple, l'axioma de les paral·leles és fals, deduïm que l'axioma de les paral·leles és imprescindible per demostrar aquell teorema. En canvi, si un teorema que hem demostrat amb l'axioma de les paral·leles també és cert a una geometria on l'axioma de les paral·leles és fals, això ens diu que hi ha d'haver una demostració del teorema que no utilitzi l'axioma de les paral·leles.

- Les geometries no euclidianes ens allunyen de qualsevol temptació de «pensament únic» i ens ajuden a entendre millor que «hi ha moltes geometries». També obren el camí a geometries més complexes —les geometries riemannianes— que tan importants són en molts àmbits com, per exemple, la teoria de la relativitat.

- Finalment, algunes geometries no euclidianes són realment molt importants. En particular, la geometria hiperbòlica que van descobrir Lobatxevski i Bolyai té un immens interès intrínsec.

Com que la llista d'axiomes de Hilbert és prou llarga, hi ha moltes geometries no euclidianes possibles, però ens limitarem a destacar les més significatives, sense donar demostracions completes.

Geometria hiperbòlica

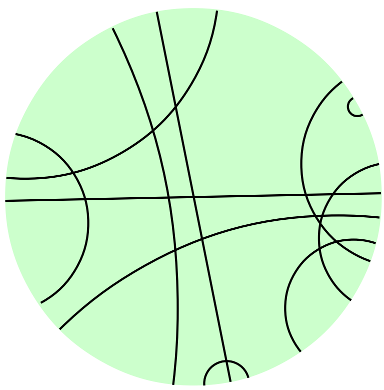
La geometria hiperbòlica és la geometria no euclidiana en la que falla l'axioma de les paral·leles. Ja hem dit que és la més important de les geometries no euclidianes.

Per donar un model de la geometria euclidiana hem de trobar definicions de «punt», «recta», «estar entre», «segments congruents» i «angles congruents» de manera que tots els axiomes de Hilbert siguin certs i, en canvi, per un punt exterior a una recta hi passi més d'una paral·lela a la recta. Ho farem per al cas del pla.

- Els punts són els punts de l'interior del disc unitat al pla real $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

- Les rectes són de dos tipus:
  1. Les rectes ordinàries de $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen.
  2. Les circumferències (ordinàries) de $\mathbb{R}^2$ que tallen ortogonalment la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.[1]

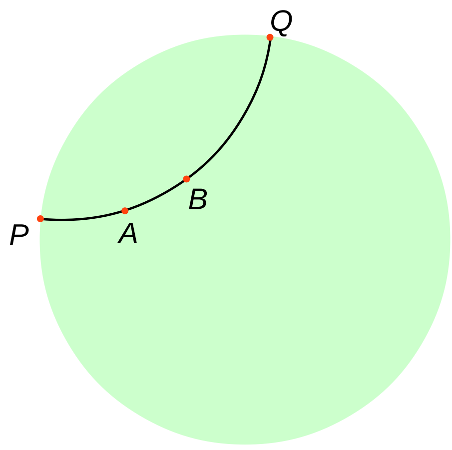


[1]Dues corbes diem que es tallen ortogonalment si les rectes tangents en cada punt de tall són perpendiculars.

- El concepte d'«estar entre» és el mateix que hi ha a la geometria ordinària de $\mathbb{R}^2$.

- La congruència d'angles és la mateixa que hi ha a la geometria ordinària de $\mathbb{R}^2$.

- La congruència de segments és el punt més difícil. Suposem que tenim dos punts A i B i sigui r la recta (hiperbòlica!) que passa per A i B. Aquesta recta tallarà la circumferència (euclidiana!) $x^2+y^2=1$ en dos punts P i Q. Suposem que aquests punts estan ordenats P, A, B, Q. Definim
$$\ell(A,B) = \frac{d(A,P)\,d(B,Q)}{d(A,Q)\,d(B,P)}.$$
Aquí $d(A,B)$ denota la distància euclidiana ordinària entre els punts del pla A i B.[2] Aleshores,
$$AB \equiv A'B' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell(A,B) = \ell(A',B').$$



Immediatament, observem que en aquesta geometria succeeixen coses que a la geometria euclidiana són impossibles —i que, fins que no coneixem la geometria hiperbòlica, ens poden sembla absurdes. Per exemple:

- Per un punt exterior a una recta hi passen infinites paral·leles a la recta.

- A l'interior de cada angle hi podem trobar rectes que no tallen els costats de l'angle.

[2]Aquesta funció $\ell(A,B)$ recorda la «raó doble» que estudiarem a geometria projectiva, més endavant.

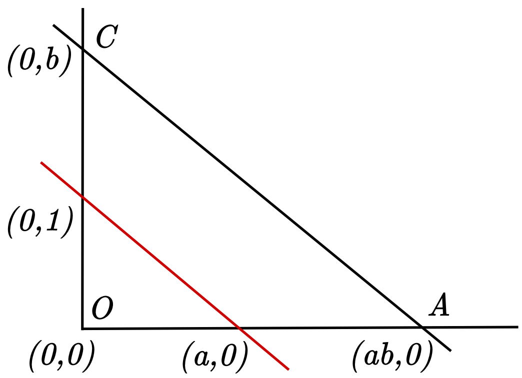
- La suma dels angles de qualsevol triangle és inferior a π. De fet, la suma no és igual per a tots els triangles: com més «gran» és el triangle, més petita és la suma dels seus angles.

És una geometria que sembla força estranya. Compleix realment tots els axiomes menys el de les paral·leles? Efectivament: la demostració no és senzilla, però la conclusió és que tots els axiomes **I**, **II**, **III**, **IV** es compleixen i, en conseqüència, tots els teoremes de la geometria absoluta segueixen sent certs a la geometria hiperbòlica.

Una mostra de la fascinació que pot despertar en nosaltres la geometria hiperbòlica, quan estudiem les seves propietats, la trobem en l'obra de Maurits Cornelis Escher, un artista que va representar, en molts dels seus gravats, el pla hiperbòlic tal com l'acabem de descriure. Per exemple, és interessant contemplar obres com *«Circle Limit III»* i *«Circle Limit IV»*.[3]

Geometria no paschiana

La relació d'ordre a la geometria afí de k^2 l'hem obtinguda a partir d'una estructura de cos ordenat a k, és a dir, a partir d'una relació d'ordre total que és compatible —en el sentit que vam explicar— amb la suma i el producte. La compatibilitat amb el producte és precisament la condició que necessitem perquè es compleixi l'axioma de Pasch. Si volem una geometria que no compleixi aquest axioma, ho podem aconseguir a partir d'una relació d'ordre a k que sigui compatible amb la suma però no ho sigui amb el producte.



Expliquem-ho amb més detall. Siguin $a, b \in k$ i considerem el triangle de k^2 de vèrtex $O = (0,0)$, $A = (ab, 0)$, $C = (0, b)$. Els tres costats d'aquest

[3]Per motius de copyright, no podem reproduir aquí les obres hiperbòliques d'Escher, però és molt senzill poder-les veure a Internet.

triangle estan sobre per les rectes $x = 0$, $y = 0$, $x + ay = ab$. Considerem la recta r d'equació $x + ay = a$ que és paral·lela a la hipotenusa del triangle i talla les altres dues rectes en els punts $(a, 0)$ i $(0, 1)$. Suposem que $b > 1$ i $a > 0$, per tant, r talla el costat OC. Si es compleix l'axioma de Pasch, r ha de tallar el costat OA i això vol dir que $0 < a < ab$. Recíprocament, si $ab < 0$, l'axioma de Pasch no es compliria.

Suposem, doncs, que hem trobat una relació d'ordre total $\trianglelefteq$ a $\mathbb{R}$ tal que:

1. $x \trianglelefteq y$ implica $x + z \trianglelefteq y + z$ per tot z.
2. Existeixen $a \trianglerighteq 0$, $b \trianglerighteq 1$ tals que $ab \trianglelefteq 0$.

Aleshores, la geometria afí ordinària de $\mathbb{R}^2$, amb aquesta nova relació d'ordre, compliria tots els axiomes de Hilbert menys l'axioma de Pasch, que seria fals.[4]

Geometria no CAC

L'axioma CAC és el que ens relaciona la congruència de segments amb la congruència d'angles. Si volem una geometria que compleixi tots els axiomes menys aquest, n'hi ha prou amb distorsionar una de les dues relacions de congruència. Per exemple, considerem aquesta geometria plana:

1. **Punts:** els del pla $x + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. És a dir, els punts de la forma $(x, y, -x) \in \mathbb{R}^3$.
2. **Rectes:** les rectes ordinàries de $\mathbb{R}^3$ contingudes en el pla anterior, amb la relació d'incidència ordinària.
3. **Ordre:** el mateix de $\mathbb{R}^3$.
4. **Congruència:** la congruència d'angles és la mateixa de la geometria ordinària de $\mathbb{R}^3$. La congruència de segments es basa en una nova distància:

$$d((x, y, -x), (x', y', -x'))^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

[4] Com podem trobar aquesta estranya relació d'ordre? Observem que $\mathbb{R}$ és un $\mathbb{Q}$-espai vectorial i que $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$. Completem el conjunt d'aquests 4 elements fins que tinguem una base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un isomorfisme $\mathbb{Q}$-lineal qualsevol que sigui la identitat sobre tots els elements d'aquesta base, excepte que $f(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}$. Aleshores, definim $a \trianglelefteq b$ si $f(a) \leq f(b)$. (Aquesta construcció utilitza l'existència de bases per a qualsevol espai vectorial i això només es pot demostrar amb l'axioma de l'elecció.)

Dit d'una altra manera: dos segments són congruents si ho són (en el sentit ordinari) les seves projeccions sobre el pla $z = 0$.

Considerem ara aquests dos triangles de la nova geometria:

$$A = (0, 0, 0), \; B = (1, 0, -1), \; C = (0, 1, 0)$$

$$A' = (0, 0, 0), \; B' = (1/\sqrt{2})\,(1, 1, -1), \; C' = (1/\sqrt{5})\,(1, -2, -1).$$

És fàcil comprovar que $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \not\equiv \widehat{B'}$.

Geometria no arquimediana

Si un cos ordenat k no compleix l'axioma d'Arquimedes, aleshores la geometria cartesiana de k^2 tampoc no complirà l'axioma d'Arquimedes **IV.1**.

L'exemple més senzill de cos ordenat no arquimedià és el cos $\mathbb{Q}(t)$ de les funcions racionals en la variable t sobre el cos $\mathbb{Q}$. Els seus elements $f \in \mathbb{Q}(t)$ es poden escriure com a quocient de dos polinomis $f = p(t)/q(t)$ amb $q(t) \neq 0$. La relació d'ordre és

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existeix } n \text{ tal que } f(t) \leq g(t) \text{ per tot } t > n.$$

Observem, en particular, que $t > n$ i $1/t < 1/n$ per tot enter n. El problema és que aquest cos $\mathbb{Q}(t)$ ni és pitagòric ni compleix l'axioma de Cantor (vegeu la nota de la pàgina 27) i, si volem una geometria no arquimediana que compleixi tots els altres axiomes de Hilbert, haurem de prendre un cos més complicat de definir.[5]

Si, a més de l'axioma d'Arquimedes, suprimim també l'axioma de les paral·leles, obtenim una família interessant de geometries no arquimedianes. Per exemple, hi ha una geometria d'aquestes en la qual la suma dels angles d'un triangle sempre és igual a dos rectes, i n'hi ha una altra en la qual la suma dels angles d'un triangle sempre és *més gran* que dos rectes.[6]

[5]Un cos que ens serveix és el cos de les sèries formals a coeficients reals

$$z = \sum_{i=n}^{\infty} a_i\, t^i, \qquad a_n \neq 0,\; n \in \mathbb{Z}$$

prenent com a positives les sèries amb primer coeficient $a_n > 0$. Trobant inductivament els coeficients de x a partir de l'equació $x^2 = 1 + z^2$, veiem que el cos és pitagòric. També es pot demostrar que compleix l'axioma de Cantor. Vegeu els exercicis **I**.48 i **I**.49.

[6]La primera d'aquestes geometries ens diu que no podem demostrar l'axioma de les paral·leles a partir de que la suma dels angles d'un triangle sigui igual a dos rectes, sense

Geometria no completa, geometria no homogènia

Si volem una geometria que compleixi tots els axiomes de Hilbert excepte l'axioma de Cantor n'hi ha prou amb considerar la geometria cartesiana de k^2 on $k \subsetneq \mathbb{R}$ és un cos pitagòric. Per exemple, $k = \Omega, \mathbb{K}, \overline{\mathbb{Q}}$.

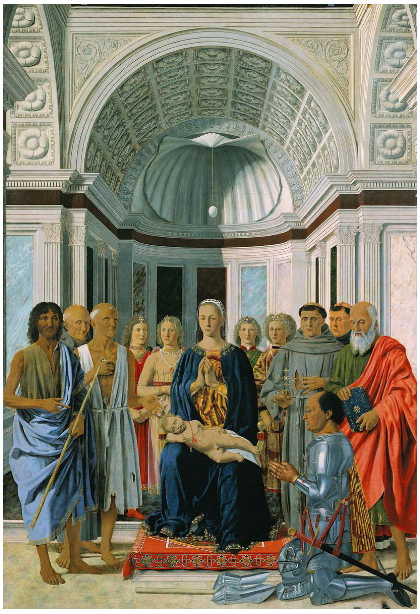
A la geometria lineal sobre el cos dels racionals falla l'axioma **III.1**, és a dir, no sempre podem traslladar un segment en una certa direcció. Ara bé, aquesta geometria no compleix els axiomes de continuïtat. Si volem una geometria que compleixi tots els axiomes llevat del **III.1**, podem prendre el següent model. Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ amb les nocions ordinàries, però modifiquem el concepte de segments congruents: diem que dos segments són congruents si ho són a la geometria ordinària de $\mathbb{R}^2$ i, a més, tenen la mateixa direcció. No és difícil comprovar que aquesta geometria compleix tots els axiomes excepte l'axioma **III.1**. Es tracta d'una geometria no homogènia, en el sentit que en ella no podem comparar segments que tinguin direccions diferents.

utilitzar l'axioma d'Arquimedes. Ja havíem parlat d'aquestes geometries *semi-euclidianes* a la pàgina 36. La segona geometria ens demostra que el teorema de Legendre sobre la suma dels angles d'un triangle a la geometria absoluta no es pot demostrar sense l'axioma d'Arquimedes. Aquestes dues geometries van ser descobertes per Hilbert i la seva construcció és complicada. Podeu consultar l'obra citada de Robin Hartshorne. En un context més global, podeu trobar una visió històrica de la matemàtica no arquimediana a l'article Philip Ehrlich: *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception*, Arch. Hist. Exact Sci. 2006.

8. El punt de vista projectiu

En aquesta lliçó farem un canvi de perspectiva —mai més ben dit!— respecte del punt de vista que hem seguit fins ara. La idea és treure'ns del damunt les farragoses «rectes parallleles», aquestes rectes que són tant importants per a Euclides però que *ningú no ha vist mai*, perquè el simple fet de mirar introdueix els «punts de fuga» i «l'horitzó» on veiem nítidament que les paral·leles es tallen. També volem entendre aquella frase tan famosa que afirma que «les paral·leles es tallen *a l'infinit*», una frase que, ara per ara, no té cap sentit perquè no sabem ni on és ni què és això de *l'infinit*.

Comencem amb una mica de motivació i repassem algunes idees que van contribuir a que, de mica en mica, es veiés la conveniència —fins i tot, la *necessitat*— d'incloure a la geometria clàssica uns nous punts on es tallessin les rectes paral·leles.



- **La teoria de la perspectiva.** És el mètode de representar un món tridimensional en una superfície plana —un quadre, una pintura— de manera que un observador que observi el quadre vegi «el mateix» que si observés directament la realitat. Quan intentem fer això, ens adonem immediatament que les rectes que a la realitat tridimensional són paral·leles, cal dibuixar-les com a rectes convergents cap a un punt de l'horitzó, un punt que, per cert, és un punt ben concret del quadre —no és cap punt «imaginari», ni està «a l'infinit»! Van ser els grans pintors i arquitectes del renaixement italià —Filippo Brunelleschi, Piero della Francesca i altres— els que van establir les bases matemàtiques d'aquest mètode i les seves obres contrasten fortament amb les obres més antigues, que s'obstinaven en representar les paral·leles de la realitat com a paral·leles al quadre, amb resultats fallits.

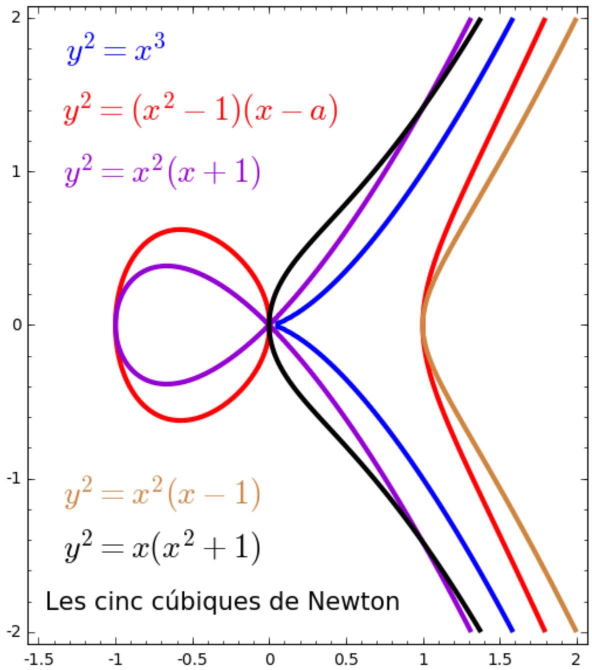
Evidentment, la teoria de la perspectiva no va en contra de la geometria d'Euclides, amb les seves famoses paral·leles, però sí que obre la porta a una certa relativització del paral·lelisme: les paral·leles, ara no es tallen i ara, amb un canvi de punt de vista, sí que es tallen.

- **La classificació de les corbes i les ombres.** Fa moltíssims segles que es coneixen els tres tipus de corbes de segon grau —les còniques—: l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola. Són ben diferents, però totes tres es poden obtenir com l'*ombra* d'una d'elles. Per exemple, si prenem una el·lipse i, fora del pla que la conté, un punt de llum, l'ombra d'aquesta el·lipse pot ser una el·lipse, una paràbola o una (branca d'una) hipèrbola.

  El que succeeix és que les tres corbes es poden obtenir com a seccions d'un únic con —per això s'anomenen *còniques*. Si comencem amb una secció el·líptica i anem movent el pla de tall, l'el·lipse s'anirà allargassant fins un moment en que es convertirà en una paràbola *com si un dels vèrtex se n'hagués anat a l'infinit*. Si seguim movent el pla de tall, un instant després, la paràbola es convertirà en una hipèrbola, amb les seves dues branques *com si el vèrtex hagués tornat de l'infinit* per l'altre costat.

  Si poguéssim imaginar l'infinit com una recta, totes aquestes estranyes metamorfosis de l'el·lipse serien molt menys misterioses. Imaginem una el·lipse que no toca la recta de l'infinit: veiem una el·lipse. L'el·lipse es va acostant a l'infinit fins que toca l'infinit en un únic punt: veiem una paràbola. Finalment, l'el·lipse és tallada per l'infinit: veiem una hipèrbola, amb una branca a cada costat de l'infinit. Són imaginacions aparentment absurdes, però si tinguessin una base matemàtica sòlida ens permetrien entendre les tres còniques com una mateixa corba, situada en tres posicions diverses respecte de l'infinit. Llàstima que això de «l'infinit» no sapiguem —de moment— què vol dir!

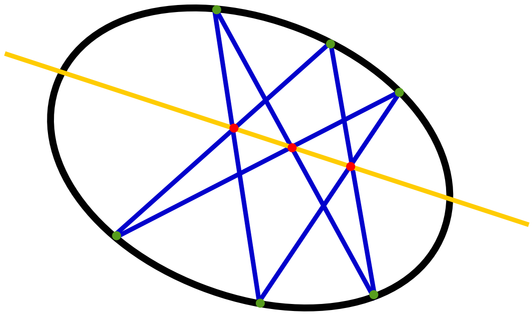
El 1704, Newton va publicar un curiós treball titulat *Enumeratio linearum tertii ordinis* on troba una classificació de les corbes de tercer grau. De la mateixa manera que hi ha tres còniques diferents, troba que de cúbiques diferents n'hi ha 72 —i encara se n'oblida 6. És a dir, n'hi ha moltes, però en un capítol del seu treball observa que totes es poden obtenir *per ombres* a partir de només cinc cúbiques. És a dir, la classificació és molt més clara i senzilla si pensem que dues corbes són «essencialment la mateixa» si una s'obté de l'altra per una projecció central.



- **Els enfadosos «casos de figura».** Moltes demostracions de la geometria clàssica eren incompletes per aquest motiu: cada vegada que, a la demostració, calia utilitzar el punt d'intersecció de dues rectes, s'hauria de discutir per separat el cas que aquestes dues rectes fossin paral·leles. Aquest mateix problema apareix en els enunciats de molts teoremes. En tots els casos s'observava que si es demostrava el teorema quan les rectes rellevants es tallaven, el teorema també resultava ser cert quan hi havia rectes paral·leles i, en certa manera, els punts de tall «se n'havien anat a l'infinit». Es parlava de «casos de figura» i eren una nosa.

  Aquesta situació recorda una mica el que passa quan estudiem les solucions de les equacions polinòmiques sense tenir en compte els nombres complexos: passem d'un enunciat clar i senzill que diu que tot polinomi de grau n té exactament n arrels, a una situació ambigua en la que el nombre d'arrels pot oscil·lar entre 0 i n.

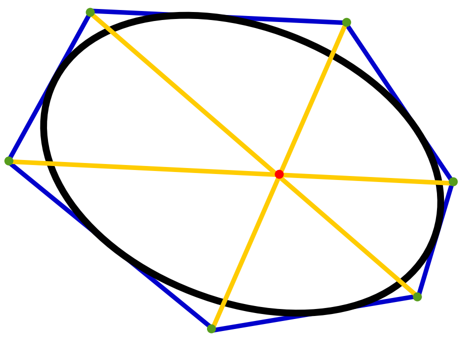
- **Les demostracions per projecció central.** Blaise Pascal va descobrir, quan tenia 16 anys, aquest teorema: *Els punts on es tallen els costats oposats d'un hexàgon inscrit en una cònica estan alineats*. Es coneix com el teorema de l'hexàgon de Pascal, o també com l'*Hexagrammum Misticum*.



Una manera de demostrar-lo consisteix en demostrar-lo primer quan la cònica és una circumferència i aleshores observar que, com que tota cònica es pot obtenir a partir d'una circumferència per projecció central, el teorema és cert per a qualsevol cònica (vegeu l'exercici **IV**.30).

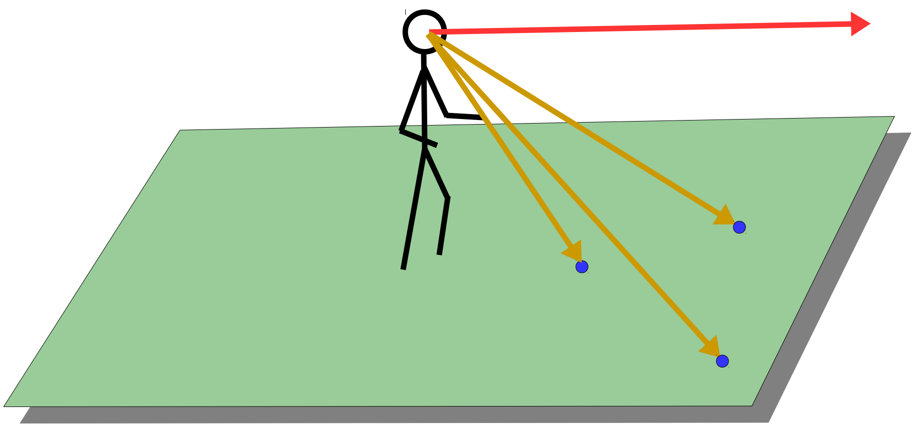
Aquest mètode de demostració basat en la projecció central és útil en molts altres casos. Un exemple divertit és aquest: *hi ha construccions amb regle i compàs que no es poden fer només amb el regle*. La demostració d'aquest teorema es fa trobant dues circumferències C_1 i C_2 tals que hi ha una projecció central π que transforma una en l'altra i, en canvi, π no transforma el centre de C_1 en el centre de C_2. En conseqüència, el centre d'una circumferència no es pot trobar traçant només rectes (vegeu l'exercici **I**.51).

- **El «principi de dualitat».** El 1810, Charles Julien Brianchon va demostrar aquest teorema: *les diagonals d'un hexàgon circumscrit a una cònica són concurrents*. S'intueix una certa relació entre aquest teorema i el teorema de Pascal, en el sentit que sembla que un d'ells s'obtingui de l'altre intercanviant punts per rectes, inscrit per circumscrit, punts alineats per rectes concurrents, etc. Aquest fenomen consistent en que a partir d'un teorema de geometria lineal se'n pugui obtenir un altre fent aquests canvis es va conèixer com a *principi de dualitat*, i va ser enunciat i explotat pels fundadors de la geometria projectiva, com Gergonne, Poncelet o Brianchon. És un principi que no pot ser vàlid a la geometria euclidiana perquè, en particular, a la geometria d'Euclides per dos punts sempre hi passa una recta, però en canvi dues rectes no sempre es tallen en un punt.



Per tot això que hem dit —i per moltes altres coses— els geòmetres del inicis del segle XIX van creure que la millor manera de fer geometria era «completar» l'espai de la geometria euclidiana ordinària afegint-hi uns punts «a l'infinit» on es tallin les rectes paral·leles, uns punts que no han de ser pas punts «especials», sinó que han de ser punts ordinaris, punts *de ple dret* de l'espai.

Com podem fer que les rectes paral·leles es tallin, sense necessitat d'invocar cap objecte místic (com l'*infinit*)? La idea és senzilla i es fonamenta en la perspectiva central.



Considerem un pla a l'espai ordinari de tres dimensions. En aquest pla hi tenim la geometria clàssica d'Euclides. Denotem aquest pla per $\mathcal{E}$. Imaginem ara que, a una certa alçada sobre aquest pla —que suposarem horitzontal— hi ha un observador que mira el pla $\mathcal{E}$ on hi regna la geometria euclidiana. En cada direcció **no horitzontal** que miri, l'observador veu exactament un punt del pla $\mathcal{E}$. Podem dir que hi ha una *correspondència bijectiva* entre

$$\left\{\begin{matrix}\text{rectes } \textbf{no horitzontals}\\ \text{que passen per l'observador}\end{matrix}\right\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \left\{\text{punts del pla } \mathcal{E}\right\}.$$

Encara més: cada pla **no horitzontal** que passa per l'observador determina, per intersecció amb el pla de la geometria euclidiana, una recta sobre aquest pla. De fet, hi ha una *correspondència bijectiva* entre

$$\left\{\begin{matrix}\text{plans } \textbf{no horitzontals}\\ \text{que passen per l'observador}\end{matrix}\right\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \left\{\text{rectes del pla } \mathcal{E}\right\}.$$

En conclusió, a l'hora de fer geometria, no hi ha diferència entre considerar els punts i les rectes de $\mathcal{E}$ o considerar les rectes i els plans no horitzontals que passen per l'observador.

Què passa amb les rectes horitzontals que passen per l'observador? No es corresponen a cap punt de $\mathcal{E}$, sinó que es correspondrien amb un hipotètic «punt de l'horitzó». Això ens suggereix «ampliar» la geometria $\mathcal{E}$ incloent **totes** les rectes que passen per l'observador i **tots** els plans que passen per l'observador:

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$$

on

$$\left\{\text{punts del pla } \mathcal{P}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{rectes}\\ \text{que passen per l'observador}\end{matrix}\right\}.$$

$$\left\{\text{rectes del pla } \mathcal{P}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{plans}\\ \text{que passen per l'observador}\end{matrix}\right\}.$$

Aquest nou espai $\mathcal{P}$ que hem obtingut a partir de $\mathcal{E}$ adjuntant uns quants punts més i **una** recta més és el **pla projectiu**, el pla de la **geometria projectiva**.

Acabem donant una formulació matemàtica de tot això.

Sigui k un cos i sigui $E \neq \{0\}$ un espai vectorial sobre k. Anomenarem **espai projectiu** associat a l'espai vectorial E al *conjunt*

$$\mathcal{P}(E) := \left\{\text{subespais vectorials de dimensió 1 de } E\right\}.$$

Els elements d'aquest conjunt $\mathcal{P}(E)$ els anomenarem **punts**. Tenim una aplicació exhaustiva

$$\pi : E - \{0\} \to \mathcal{P}(E)$$

definida per

$$\pi(e) = \langle e \rangle.$$

Anomenarem **rectes** de l'espai projectiu $\mathcal{P}(E)$ les imatges per π dels subespais de dimensió 2 de E.

L'espai projectiu $\mathcal{P}(E)$ és, en paraules de Nicolas Bourbaki, *«el marc general de tots els fenòmens geomètrics»*.[1]

[1] Això potser és una exageració, com tantes altres afirmacions del *general* Bourbaki. Sí que és cert que les diverses geometries lineals —afí, euclidiana, hiperbòlica,...— es poden veure com a «subgeometries» de la geometria projectiva que, d'altra banda, és l'àmbit del programa d'Erlangen de Klein. És interessant recordar que Klein recomanava —al segle dinou!— que els especialistes en física matemàtica estiguessin familiaritzats amb la geometria projectiva.

9. Axiomes projectius

Volem donar ara una axiomàtica de la geometria que tingui en compte el «punt de vista projectiu» que hem discutit al capítol anterior. Però ara els axiomes que posarem seran molt més senzills que els axiomes de Hilbert. En efecte, aquells axiomes pretenien recollir tota la riquesa de la geometria d'Euclides fins a l'extrem que conduïen inevitablement a la geometria cartesiana sobre el cos dels reals —o, com a mínim, sobre el cos construïble. És molt més interessant, en canvi, començar amb una axiomàtica «de mínims» —molt general, que pugui ser útil en molts àmbits— i, si cal, anar ampliant posteriorment aquest sistema per incloure-hi característiques més específiques.

Anomenarem **espai projectiu** un sistema de punts[1] i rectes amb una relació d'incidència que compleixi aquests tres únics axiomes:

EP1 Tota recta té com a mínim tres punts.[2]

EP2 Per dos punts diferents hi passa una única recta.

EP3 *(«axioma projectiu»)* Si M, N, P i Q són quatre punts diferents i les rectes MN i PQ es tallen, aleshores les rectes MP i NQ també es tallen.[3]

Recordem que al capítol anterior havíem definit l'«espai projectiu d'un espai vectorial» E, que anomenàvem $\mathcal{P}(E)$. Més endavant (pàgina 86) veurem que, efectivament, $\mathcal{P}(E)$ compleix els tres axiomes anteriors i és, per tant, un **exemple** d'espai projectiu.[4]

Si X és un espai projectiu, una **subvarietat projectiva** de X és un conjunt $Z \neq \varnothing$ de punts de X que té la propietat que si $x, y \in Z$ són dos punts diferents, aleshores tots els punts de la recta que passa per x i y pertanyen a Z. És clar que, d'aquesta manera, Z és també un espai projectiu.[5]

[1] Normalment, s'exigeix també que el conjunt de punts sigui no buit.

[2] Aquest axioma també es coneix com a axioma de Fano.

[3] Aquest axioma també es coneix com a axioma de Veblen-Young.

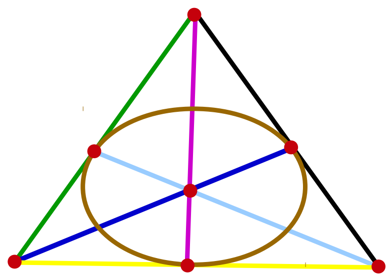
[4] No és l'únic exemple, però sí que és el més important.

[5] A partir d'ara utilitzarem amb normalitat el llenguatge de la teoria de conjunts, com es fa a la gran majoria de les matemàtiques.

Exemples

- L'espai projectiu més petit possible és el que només té un punt i cap recta. El segon més petit és el que té tres punts i una única recta que els conté. Si X és un conjunt qualsevol que tingui més de dos elements i considerem una única recta que conté tots els punts de X, tenim un espai projectiu. Aquests són exemples trivials.

- Donar exemples d'espais projectius que tinguin més d'una recta ja no és trivial. L'espai projectiu amb més d'una recta més petit possible és el que es coneix com a **pla de Fano**.[6] Consta de 7 punts i 7 rectes, i cada recta té tres punts. La relació d'incidència ve donada per aquest esquema (on els set punts estan indicats amb un petit cercle vermell i cadascuna de les set rectes s'ha dibuixat d'un color diferent):



- És evident que la intersecció (no buida) de qualsevol família de subvarietats d'un espai projectiu X és també una subvarietat de X. Aquest fet ens permet definir una altra operació important que es pot fer amb subvarietats, anomenada **suma**. Si A i B són subvarietats d'un espai projectiu X, definim la seva suma $A+B$ com la intersecció de totes les subvarietats que contenen $A \cup B$.

Convé disposar d'un concepte d'equivalència o isomorfisme entre espais projectius. En direm **col·lineacions**. Una col·lineació entre dos espais projectius X, Y és una aplicació bijectiva $f : X \to Y$ que compleix la propietat que tres punts $A, B, C \in X$ estan alineats si i només si els punts $f(A), f(B), f(C) \in Y$ estan alineats.

Ara podem definir el concepte de **dimensió** d'un espai projectiu. Si X és un espai projectiu, la dimensió de X és el màxim n tal que hi ha una cadena d'inclusions

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$$

[6] En honor de Gino Fano (1871–1952), matemàtic italià.

on cada X_i és una subvarietat (no buida) de X. Si aquest n no existeix, direm que X té *dimensió infinita*. En particular, un **pla projectiu** serà un espai projectiu de dimensió 2. En algunes circumstàncies és útil considerar el conjunt buit com un espai projectiu de dimensió -1.

Estudiem ara amb més detall el cas del **pla projectiu**. Considerem aquestes quatre propietats:

PP1 Per dos punts diferents hi passa una única recta (=EP2)

PP2 Dues rectes diferents es tallen en un únic punt.

PP3 Hi ha quatre punts, dels quals no n'hi ha tres d'alineats.

PP4 Tota recta té com a mínim tres punts. (=EP1)

Es compleix això:

> *(a) X és un espai projectiu de dimensió 2 si i només si X compleix PP1, PP2, PP3, PP4.*
>
> *(b) PP1, PP2, PP3 impliquen PP4.*

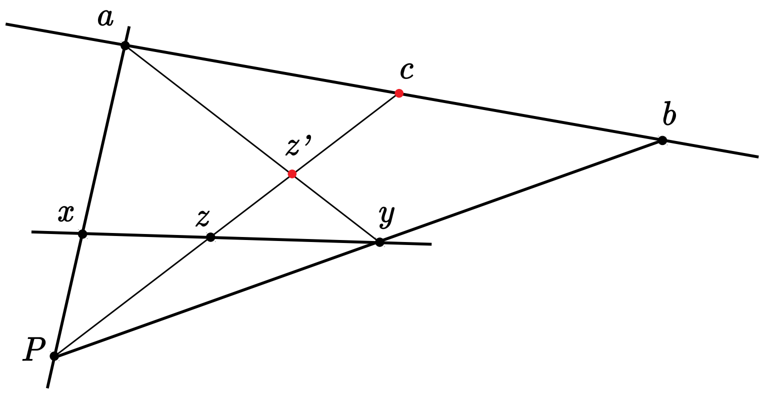
En particular, podem definir un pla projectiu com un sistema de punts i rectes on es compleixen els axiomes PP1, PP2 i PP3.

Demostració. (a) Sigui X un espai projectiu de dimensió 2. Comencem demostrant que es compleix PP2, és a dir, que dues rectes sempre es tallen. Siguin $r \neq s$ dues rectes de X, sigui P un punt de s que no pertanyi a r i sigui $Q \in r$. Sigui ara $Y := P + r$ (en el sentit de suma de subvarietats que acabem d'estudiar). Y és una subvarietat que conté el punt P i la recta r i tenim una cadena de subvarietats de X

$$\{Q\} \subsetneq r \subsetneq Y \subseteq X.$$

Com que X té dimensió 2, aquesta cadena no pot tenir quatre subvarietats diferents i, per tant, $P + r = X$. Considerem ara $V := \{P\} \cup r \cup W$ on W està format per tots els punts de $X - (\{P\} \cup r)$ que estan alineats amb P i algun punt de r. Si demostrem que V és una subvarietat, tindrem $V \supseteq P + r = X$ i haurem arribat a que les rectes r i s es tallen. Suposem que $x, y, z \in X$ són tres punts alineats de manera que $x, y \in W$. Sigui $a \in r$ tal que a, x, P estan alineats i $b \in r$ tal que b, y, P estan alineats. Suposem que els punts a, b, x, y són diferents (els altres casos són trivials). Com que les rectes aP

i yz es tallen en el punt x, l'axioma projectiu ens diu que les rectes Pz i ay es tallaran en un punt z'. També podem suposar que els punts a, b, P, z' són diferents. Com que les rectes az' i bP es tallen en el punt y, l'axioma projectiu ens diu que les rectes Pz' i ab també es tallaran en un punt $c \in r$. Aleshores, els punts c, P, z estan alineats i $z \in W$.



Demostrem ara que es compleix PP3. Com que la dimensió de X és > 0, hi ha dos punts diferents A i B. Com que la dimensió de X és > 1, hi ha un punt C que no pertany a la recta AB. Com que les rectes de X tenen com a mínim tres punts, existeix un punt D a la recta AC, diferent de A i C, i existeix un punt E a la recta BD, diferent de B i D. Tenim ja els quatre punts A, B, C, E de PP3.

Recíprocament, si X compleix PP1, PP2, PP3, PP4, és clar que X compleix els tres axiomes d'espai projectiu. Només cal comprovar que la dimensió de X és 2. Suposem que hi hagués una cadena de subvarietats

$$\{A\} \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq X.$$

Escollim punts $B \in X_1 - \{A\}$, $C \in X_2 - X_1$, $D \in X - X_2$. Sigui P el punt on es tallen les rectes AB i CD. Aleshores, la recta PC està continguda a X_2 i, per tant, $D \in X_2$, que és una contradicció.

(b) Siguin A, B, C, D els quatre punts de l'axioma PP3 i sigui r una recta qualsevol. Tallem aquesta recta r amb les sis rectes AB, AC, AD, BC, BD, CD. Obtenim sis punts de r (n'hi pot haver de repetits). Amb paciència, es comprova que com a mínim tres d'aquests sis punts són diferents. $\square$

Ara podem enunciar amb exactitud el

Principi de dualitat. *Si una proposició $\mathcal{P}$ (que només involucri punts i rectes) és certa a tots els plans projectius, aleshores, la* *proposició que s'obté de $\mathcal{P}$ intercanviant punts i rectes també és certa a tots els plans projectius.*

Això és evident perquè si en els axiomes PP1, PP2, PP3 intercanviem punts i rectes, els nous axiomes que obtenim PP1*, PP2*, PP3*, són equivalents als axiomes inicials.[7]

[7]El principi de dualitat, convenientment reformulat, és vàlid en els espai projectius de qualsevol dimensió finita. Per exemple, en dimensió n, la dualitat faria correspondre punts (dimensió zero) amb hiperplans (dimensió $n-1$) i, en general, subvarietats de dimensió r amb subvarietats de dimensió $n-r-1$. Així, en dimensió 3, el dual d'un teorema sobre punts, rectes i plans s'obtindria intercanviant punts i plans i deixant les rectes com a rectes.

10. L'espai afí i l'espai projectiu

Tenim, doncs, dos punts de vista diferents. En un d'ells —el punt de vista projectiu— no hi havia rectes paral·leles, en l'altre —que a partir d'ara anomenarem el punt de vista **afí**— sí que n'hi havia. El que farem serà veure que aquests dos mons aparentment incompatibles poden conviure perfectament en un mateix context.

Per tal de simplificar l'exposició, ens limitarem al cas de dimensió 2, és a dir, al cas del **pla**. Tenim els conceptes de pla projectiu i pla afí:

- Un pla projectiu és un conjunt de punts i un conjunt de rectes que compleix els tres axiomes PP1, PP2, PP3 del capítol anterior.
- Un **pla afí** serà un conjunt de punts i un conjunt de rectes que compleixen aquests tres axiomes:

  PA1 Per dos punts diferents hi passa una única recta (=PP1).

  PA2 Si r és una recta i $P \notin r$ és un punt, existeix una única recta s tal que $P \in s$ i r i s no es tallen. (És l'antic axioma de les paral·leles.)

  PA3 Cada recta té com a mínim dos punts. (És l'axioma **I.2** de Hilbert.)

  PA4 Hi ha com a mínim dues rectes.

En un pla afí, direm que dues rectes són paral·leles si són iguals o no es tallen. És un exercici senzill comprovar que el paral·lelisme és una relació d'equivalència en el conjunt de les rectes d'un pla afí.

Malgrat que un pla afí i un pla projectiu semblen dos objectes ben diferents, podem passar d'un a l'altre amb gran facilitat.

De projectiu a afí

Suposem que X és un pla projectiu i escollim una recta r de X. Sigui

$$A := X - r.$$

Aleshores, A és un pla afí. Diguem-ho amb més precisió. Els punts de A són tots els punts de X que no pertanyen a r; les rectes de A són totes les rectes de X excepte la recta r; la relació d'incidència a A és la mateixa que a X. Observem, doncs, que en el pas de X a A hem perdut exactament la recta r (amb tots els seus punts) i també hem perdut exactament un punt de cada recta $\neq r$.

En aquesta situació, és molt senzill comprovar que realment A compleix els axiomes de pla afí. Com han sorgit les paral·leles de A? Dues rectes (diferents) de A són paral·leles si, com a rectes de X, es tallen en un punt que pertany a r.

Dit més breument: si en un pla projectiu hi traiem una recta —qualsevol recta— el que ens queda és un pla afí.[1]

D'afí a projectiu

Suposem ara que tenim un pla afí A. Sigui $\mathcal{R}$ el conjunt de totes les rectes de A. Definim

$$L = \mathcal{R}\big/\{r \sim s \Leftrightarrow r \text{ i } s \text{ són paral·leles}\}.$$

És a dir, L és el conjunt quocient de les rectes de A per la relació d'equivalència de paral·lelisme. Podem pensar L com el conjunt de les *direccions* en el pla A.

A partir de A podem construir un pla projectiu X d'aquesta manera:

- Els punts de X són els punts de A i també els elements del conjunt L.
- Les rectes de X són les de A i una nova recta que anomenarem ℓ.
- La relació d'incidència a X ve donada així: sigui P un punt de X i sigui r una recta de X; aleshores:
  - Si $x \in A$ i r és una recta de A, aleshores $x \in r$ té el mateix significat a X i a A.
  - Si $x \in A$ i $r = \ell$, aleshores $x \notin r$.
  - Si $x \in X - A = L$, aleshores $x \in \ell$.

[1] Observem que per obtenir un pla afí a partir d'un pla projectiu cal *escollir* una recta. Això planteja la pregunta si el pla afí que obtenim depèn o no de la recta escollida. La resposta és que en general sí que depèn.

- Si $x \in X - A = L$, aleshores x és una classe d'equivalència de rectes de A i, per tant, si r és una recta de A té sentit preguntar-se si $r \in x$. Aleshores, si r és una recta de A, direm que $x \in r$ si $r \in x$.

No és difícil comprovar que X esdevé un pla projectiu, que conté el pla afí inicial A.[2]

Aquestes construccions que, per simplicitat, hem fet en dimensió dos, també són vàlides en dimensió (finita) qualsevol. És possible establir un petit nombre d'axiomes senzills que ens definirien el concepte d'espai afí. Aleshores, un espai afí de dimensió finita sempre es pot «completar», afegint-hi un hiperplà, fins obtenir un espai projectiu de la mateixa dimensió i, recíprocament, si en un espai projectiu de dimensió finita hi eliminem un hiperplà (una subvarietat projectiva pròpia de dimensió màxima), obtenim un espai afí de la mateixa dimensió.

Aquestes dues construccions ens permeten «incloure» la geometria afí dins de la geometria projectiva que esdevé com una «compleció» de la geometria afí. L'espai projectiu és, doncs, l'àmbit més natural per fer geometria, també geometria afí. La geometria projectiva és més senzilla i més general que la geometria afí.

Ara podem donar un sentit rigorós a l'expressió popular que diu que les *«rectes paral·leles són les que es tallen a l'infinit»*. Suposem que tenim un espai projectiu X (de dimensió finita). Escollim a X un hiperplà H i n'hi diem «l'hiperplà de l'infinit». $A = X - H$ és un espai afí i dues rectes d'aquest espai afí són paral·leles si, com a rectes de X, es tallen a H, és a dir, es tallen a l'infinit. Recíprocament, si A és un espai afí, podem afegir-li un nou hiperplà H —anomenat «hiperplà de l'infinit»— on es tallen les rectes que abans eren paral·leles. Tanmateix, cal remarcar que a l'espai projectiu no hi ha cap «hiperplà de l'infinit»: qualsevol hiperplà pot ser considerat com l'hiperplà de l'infinit.

El que és important és que tot això no és ni un joc de paraules ni un simple *divertimento*: la geometria afí no veu una part de la geometria —els punts de l'infinit— i, d'aquesta manera, la imatge que ens dóna la geometria afí és parcial i, generalment, més complicada que la que ens dóna la geometria projectiva, que és la que sí que veu «l'espai complet».

[2] Observem que, a diferència de la construcció anterior que passava d'un pla projectiu a un pla afí, ara no ens ha calgut fer cap elecció: **el** pla projectiu associat a un pla afí està ben definit.

Exercicis

Geometria euclidiana clàssica[1]

I.1 Feu les següents construccions (planes) utilitzant exclusivament el regle i el compàs tal com fa Euclides:

(a) Construïu la mediatriu d'un segment.

(b) Construïu, donada una recta r,

i. la perpendicular des d'un punt exterior.

ii. la perpendicular per un punt de r.

iii. la paral·lela per un punt exterior.

(c) Transporteu un segment donat AB sobre una semirecta fixada de forma que el punt A es correspongui amb l'extrem de la semirecta.[2]

(d) Transporteu un angle sobre una semirecta donada i a un costat donat.

(e) Trobeu el centre d'una circumferència donada.

(f) Construïu una recta tangent a una circumferència donada que sigui paral·lela a una recta donada.

(g) Construïu un triangle coneixent un costat i (segments congruents a) l'altura i mitjana relatives a aquest costat.

(h) Construïu un triangle rectangle coneixent el radi de la circumferència inscrita i que un catet és 3 vegades més llarg que l'altre.

(i) Construïu un octàgon regular amb un costat donat.

(j) Construïu un triangle coneixent (segments congruents a) les mitjanes (difícil).

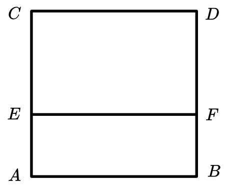
---

[1] Aquests exercicis són un breu repàs d'algunes nocions de geometria elemental. Recordem que Euclides va dir al rei Ptolemeu I que no hi havia cap «camí reial» per arribar a la geometria: calia seguir pas a pas la llarga sèrie de proposicions encadenades dels *Elements*. Com a conseqüència d'això, no és possible resoldre els exercicis d'aquesta llista utilitzant cap drecera, sinó que caldria anar reproduint tots els *Elements*. No es pretén que l'alumne ho faci d'aquesta manera. Es pot (s'ha de) «fer trampa» i resoldre els exercicis aplicant els coneixements bàsics de la geometria d'Euclides —com poden ser els casos de congruència de triangles o el càlcul de l'àrea d'un triangle— sense preocupar-se pels possibles cercles viciosos que, de ben segur, es generaran.

[2] És a dir, demostreu que, amb els axiomes d'Euclides, podem suposar que disposem d'un «compàs bloquejable».

En cada cas, justifiqueu que la construcció és correcta.

I.2 Al llibre segon dels *Elements* Euclides demostra una sèrie de propietats de la suma i el producte de segments que són propietats ben conegudes de la suma i la multiplicació dels nombres enters. La suma de segments es defineix com el segment que s'obté posant un segment a continuació de l'altre, i el producte de dos segments es defineix com el rectangle que determinen. Per exemple, la proposició 2 afirma, en el llenguatge actual $x^2 = xy + x(x - y)$ i això Euclides ho demostra agafant un quadrat $ABDC$ i descomponent-lo en dos rectangles.



$$AB^2 = AB \cdot AE + AB \cdot (AC - AE)$$

Reconstruïu aquestes proposicions del llibre segon, seguint el mateix mètode que utilitza Euclides:

(a) (Proposició 3) $xy = y(x - y) + y^2$

(b) (Proposició 4) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

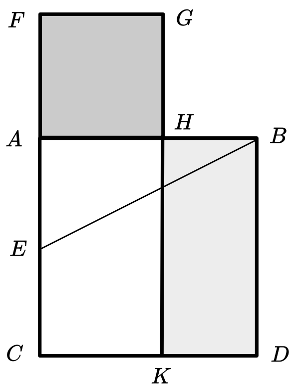
(c) (Proposició 6) $(x + y)(x - y) + y^2 = x^2$

(d) (Proposició 7) $x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2$

(e) (Proposició 8) $4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2$

(f) (Proposició 9) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

I.3 A la proposició 11 del llibre segon Euclides resol l'equació de segon grau $a(a - x) = x^2$ de la següent manera. Agafa un quadrat $ABDC$ de costat a i vol trobar un punt H entre A i B tal que el quadrat $AFGH$ sigui «igual» al rectangle $HBDK$. La solució que dóna és aquesta: Pren E que sigui el punt mig de AC i a continuació pren F tal que $EF = EB$. Demostreu que aquesta construcció és correcta. Apliqueu l'exercici **I.2** i el teorema de Pitàgores.



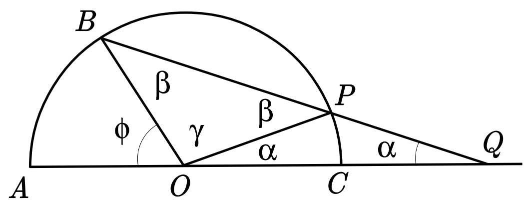
I.4 Demostreu el teorema de Viviani: *en un triangle equilàter, la suma de les distàncies de qualsevol punt interior a cada costat és igual a l'altura del triangle.*

I.5 Demostreu la proposició 3 del llibre VI dels *Elements*: *Sigui ABC un triangle i sigui D el punt on la bisectriu de l'angle A talla el costat BC. Aleshores, la raó entre els segments BD i DC és la mateixa que la raó entre els segments AB i AC.*

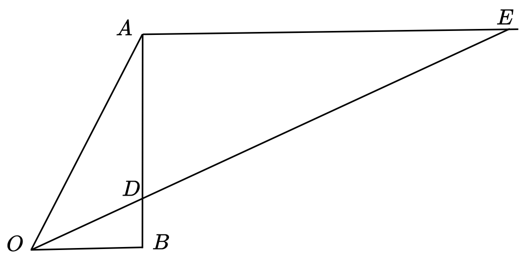
I.6 Siguin A, B i C tres punts d'una circumferència de centre O. Proveu que $2\widehat{ACB} \equiv \widehat{AOB}$.

I.7 Des d'un lloc, la situació del qual desconeixem, visualitzem 3 cims que podem reconèixer sobre un mapa. Localitzeu el punt d'observació (suposeu que l'observador i els tres cims estan en un mateix pla).

I.8 Justifiqueu el mètode d'Arquimedes per trisecar un angle (vegeu la nota 4 de la pàgina 11). Considereu un angle ϕ amb vèrtex O i preneu un regle amb dues marques. Dibuixeu la circumferència de centre O i radi igual a la distància entre les dues marques del regle. Utilitzeu el regle marcat per dibuixar la recta que passa per B i tal que les dues marques del regle coincideixen amb P i Q. Demostreu que $3\alpha = \phi$.



I.9 Una altra manera de trisecar l'angle utilitzant un regle amb marques és aquesta. Suposem que volem trisecar un angle agut qualsevol com l'angle AOB, construïm un triangle rectangle ABO i fem dues *marques* al regle separades per una distància doble de la distància AO. Aleshores, posem el regle de manera que una de les marques caigui sobre la paral·lela a OB per A, l'altra marca caigui sobre la recta AB i el regle passi pel punt O. És a dir, haurem dibuixat la recta OE de manera que $DE = 2AO$. Demostreu que, fent això, l'angle BOA és tres vegades l'angle BOD.



I.10 Proveu que en tot triangle, a major costat li correspon menor altura.

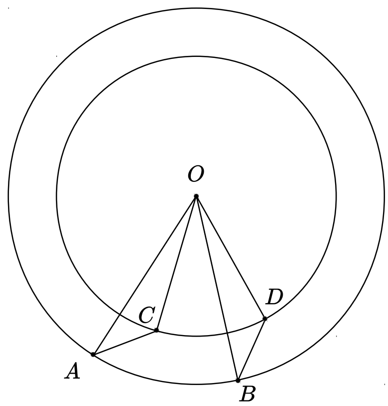
I.11 Proveu que les mediatrius d'un triangle són concurrents al circumcentre.

I.12 Proveu que les mitjanes d'un triangle es tallen a dos terços de la seva longitud. (Utilitzeu l'àrea del triangle.)

I.13 Proveu que també les altures i les bisectrius són concurrents.

I.14 Donats dos punts A i B i una recta r paral·lela al segment AB, trobeu una manera de construir el punt mig del segment AB utilitzant només el regle. (Utilitzeu el teorema de Tales[3] i l'àrea del triangle.)

I.15 Al segle XVIII, el matemàtic italià Lorenzo Mascheroni va demostrar que totes les construccions (planes) d'Euclides es podien fer utilitzant únicament el compàs. Evidentment, sense regle és impossible *dibuixar* una línia recta, però si prescindim de dibuixar les rectes, el teorema de Mascheroni[4] demostra que el regle no és realment necessari. És fàcil adonar-se que el teorema està demostrat si som capaços de trobar, només amb el compàs (que suposarem que *és bloquejable*), aquests punts: (a) el punt d'intersecció de dues rectes; (b) els punts d'intersecció d'una circumferència i una recta. Per resoldre aquests dos problemes seguirem aquests passos:[5]



[3]Hi ha dos teoremes que s'atribueixen a Tales de Milet (segle VI aC). El primer afirma que qualsevol triangle inscrit a una circumferència de manera que un dels costats passi pel centre és rectangle (proposició 31 del llibre tercer dels *Elements*). El segon, que és el que cal utilitzar en aquest exercici, diu que si dues rectes tallen dues rectes paral·leles, els segments que determinen són proporcionals. Aquest segon teorema requereix la teoria de les proporcions i no apareix fins la proposició tercera del llibre sisè dels *Elements*.

[4]De fet —seguint la *llei de Boyer* que afirma que cap resultat matemàtic du el nom de la primera persona que el va descobrir—, el teorema de Mascheroni ja havia estat demostrat per Jørgen Mohr més de cent anys abans.

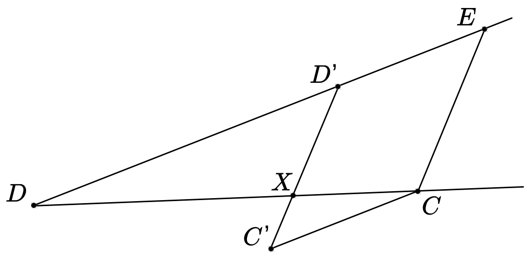
[5]La demostració completa del teorema de Mascheroni és una mica més complicada que el que fem en aquest exercici, perquè cal considerar alguns casos especials que no tenim en compte aquí.

(a) Demostreu que si els segments AC i BD són congruents es compleix

$$\frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD}$$

(b) Si els punts D i D' són simètrics respecte de la recta r i els punts C i C' també ho són, aleshores $r \cap CD = r \cap C'D'$.

(c) Si $C'D'EC$ és un paral·lelogram, aleshores $\dfrac{DE}{DD'} = \dfrac{DC}{DX}$.



(d) Donats A, B, C no alineats, trobeu (només amb el compàs) un punt D tal que $ABCD$ sigui un paral·lelogram.

(e) Donats A, B, C no alineats, trobeu (només amb el compàs) el punt C' simètric de C respecte de la recta AB.

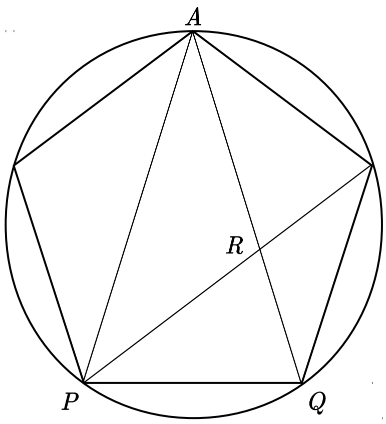
(f) Donada una circumferència i el seu centre, A un punt interior i B un punt exterior, de manera que la recta AB no passi pel centre de la circumferència, trobeu (només amb el compàs) els punts on la recta AB talla la circumferència.

(g) Donat un quadrilàter $ABCD$, trobeu (només amb el compàs) el punt d'intersecció de la recta AB amb la recta CD.

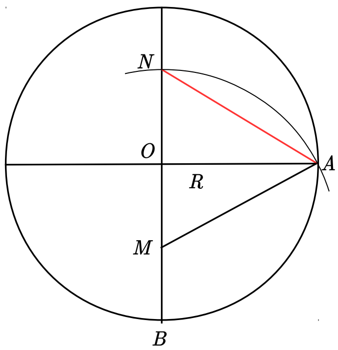
I.16 Proveu el teorema de Pitàgores. Feu-ho utilitzant semblança de triangles i després consulteu la demostració que dóna Euclides al seu llibre primer.[6]

I.17 Considereu un pentàgon regular inscrit a una circumferència. Demostreu que els triangles APQ i PRQ són semblants. Deduïu que el quocient $\phi = AP/PQ$ compleix $\phi^2 = 1 + \phi$. És a dir, la raó entre el costat i la diagonal d'un pentàgon regular és igual a la raó àuria. A partir d'aquí, suposeu que el radi de la circumferència és 1 i calculeu la longitud del costat del pentàgon regular.

[6]Euclides demostra el teorema de Pitàgores al llibre primer i la teoria dels triangles semblants no apareix fins el llibre sisè perquè aquesta teoria requereix disposar de la teoria de les proporcions del llibre cinquè. Per tant, Euclides no pot demostrar el teorema de Pitàgores utilitzant triangles semblants i necessita donar una demostració força més complicada basada en la determinació de la superfície del triangle i en una descomposició geomètrica del quadrat dibuixat sobre la hipotenusa.

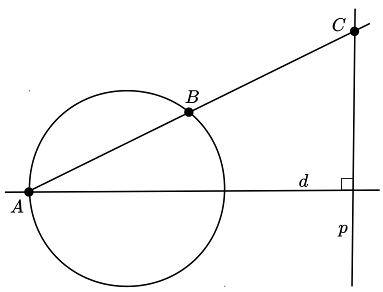


I.18 Claudi Ptolemeu (∼ 85 – ∼ 165) va donar una construcció amb regle i compàs del pentàgon regular que és molt senzilla i elegant.



Considerem la circumferència centrada a O i tracem dos diàmetres perpendiculars que passen pels punts de la circumferència A i B, respectivament. Sigui M el punt mig entre O i B. Amb centre a M tracem la circumferència que passa per A. Sigui N el punt d'intersecció d'aquesta circumferència amb el diàmetre que passa per B. Demostreu, utilitzant el teorema de Pitàgores i l'exercici anterior, que el segment AN té longitud igual al costat del pentàgon regular inscrit en la circumferència inicial.

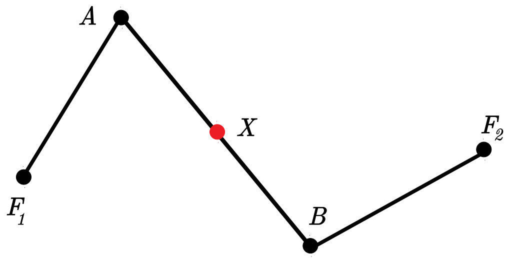
I.19 Considerem una circumferència, un diàmetre d i una recta p perpendicular al diàmetre.



Fixem el punt A i sigui $B \neq A$ un punt qualsevol de la circumferència. Definim el punt C com la intersecció de la recta AB amb la recta p. Demostreu que el producte de la longitud AB per la longitud AC és constant, és a dir, no depèn de l'elecció del punt B. Feu-ho sense utilitzar ni equacions ni coordenades.

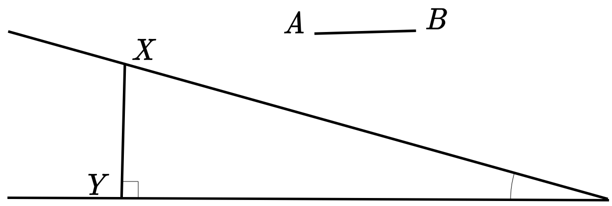
I.20 Demostreu que l'instrument de Peaucellier (vegeu la nota 7 de la pàgina 12) realment dibuixa una recta. Utilitzeu l'exercici anterior.

I.21 L'instrument que va utilitzar James Watt (vegeu la nota 7 de la pàgina 12) per transformar un moviment circular en un moviment rectilini està format per dues barres iguals $F_1A \equiv F_2B$ que poden pivotar sobre els eixos fixos F_1 i F_2, unides per una tercera barra AB. En aquesta situació, el punt mig X de la barra AB descriu, aproximadament, una recta.



Suposeu que la longitud de les barres F_1A i F_2B és 1, la longitud de la barra AB és $\sqrt{2}$ i la distància F_1F_2 és també $\sqrt{2}$. Demostreu que el punt X descriu una *lemniscata*. (La lemniscata és la corba formada pels punts tals que el producte de les distàncies a dos punts fixos és constant.)

I.22 Considerem un angle agut i un segment AB. Demostreu que existeix un punt X sobre un costat de l'angle tal que si Y és el peu de la perpendicular des de X a l'altre costat, es compleix $XY > AB$.[7]



I.23 Euclides considera que dues figures $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ tenen la mateixa àrea si existeix una figura $\mathcal{H}$ de manera que $\mathcal{A} + \mathcal{H}$ i $\mathcal{B} + \mathcal{H}$ es puguin descompondre en triangles

[7] Una afirmació que s'assembla a aquest teorema apareix a la cinquena part del llibre primer del tractat *«Sobre el cel»* —la gran obra cosmològica d'Aristòtil. Per aquest motiu, la propietat de l'enunciat de l'exercici es coneix com a **axioma d'Aristòtil** i es considera com una versió geomètrica (més feble) de l'axioma d'Arquimedes.

congruents, és a dir

$$\mathcal{A} + \mathcal{H} = T_1 + \cdots + T_n, \quad \mathcal{B} + \mathcal{H} = T'_1 + \cdots + T'_n$$

amb $T_i \equiv T'_i$. Amb aquesta definició, Euclides demostra que un quadrat i un paral·lelogram que tinguin la mateixa base i la mateixa alçada tenen la mateixa àrea. Demostreu aquest teorema.

I.24 Sembla que a la definició de figures amb la mateixa àrea de l'exercici anterior Euclides hauria pogut suprimir la figura auxiliar $\mathcal{H}$ i dir que dues figures $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ tenen la mateixa àrea si es poden descompondre en triangles congruents.[8] Demostreu que, amb aquesta nova definició, és impossible demostrar el teorema de l'exercici anterior sense utilitzar l'axioma d'Arquimedes. (Indicació: agafeu un paral·lelogram que tingui un costat «infinitament més gran» que l'altre.)

Geometria de Hilbert

I.25 Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que ni una semirecta ni un semiplà, ni l'interior ni l'exterior d'un angle no poden ser buits.

I.26 L'axioma **II.3** diu que, donats tres punts (diferents) alineats, com a màxim n'hi ha un que està entre els altres dos. Demostreu que com a mínim n'hi ha un. És a dir, siguin A, B, C tres punts alineats i demostreu, aplicant només els axiomes d'incidència i ordre, que si A no està entre B i C i C tampoc no està entre A i B, aleshores B està entre A i C.

I.27 L'objectiu és demostrar el *teorema dels quatre punts alineats* de la pàgina 22. Suposem, doncs, que X, Y, Z, T són quatre punts diferents d'una recta en un pla que compleix els axiomes **I** i **II** i admetem que ja hem demostrar que donats tres punts alineats n'hi ha exactament un que està entre els altres dos (exercici anterior).

(a) Demostreu (aplicant dues vegades l'axioma de Pasch) que és impossible que X estigui entre Y i Z, entre Y i T i entre Z i T al mateix temps.

(b) Demostreu (aplicant tres vegades l'axioma de Pasch) que si X està entre Y i Z i Y està entre X i T, aleshores X, Y estan entre Z i T.

(c) Demostreu (amb els dos resultats anteriors, sense necessitat de tornar a aplicar l'axioma de Pasch) el *teorema dels quatre punts alineats*. És a dir, demostreu que els punts X, Y, Z, T es poden designar com a A, B, C, D de manera que B està entre A i C, B està entre A i D, C està entre B i D i C està entre A i D.

[8] D'aquesta nova definició d'igual àrea se'n diu *equidescomponibilitat*. Segons un teorema demostrat entre 1807 i 1835 per William Wallace, János Bolyai i Paul Gerwien, si acceptem l'axioma d'Arquimedes (i l'axioma de les paral·leles) el concepte d'Euclides d'«igual àrea» i el concepte d'equidescomponibilitat són equivalents.

I.28 Demostreu, a partir dels axiomes d'incidència i ordre, que el concepte de semirecta està ben definit. És a dir, sigui r una recta i $O \in r$ un punt. En el conjunt $r - \{O\}$ definim la relació $A \sim B$ si O no està entre A i B; aleshores, es tracta d'una relació d'equivalència i hi ha només dues classes d'equivalència. (Utilitzeu el *teorema dels quatre punts alineats* de la pàgina 22 i l'exercici 27.)

I.29 Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, que una recta que talli els tres costats d'un triangle ha de passar per algun vèrtex.

I.30 Demostreu, a partir dels axiomes **I** i **II**, l'axioma de coplanaritat de la nota 8 de la pàgina 20: Si A, B, C, D són quatre punts diferents aleshores alguna d'aquestes parelles de rectes es tallen: AB i CD, AD i CB, AC i BD.

I.31 Completeu les demostracions dels teoremes de geometria absoluta que hi ha al capítol 5.

I.32 Demostreu, a la geometria absoluta, el criteri hipotenusa-catet de congruència de triangles rectangles (recordeu que no podem utilitzar el teorema de Pitàgores). Hi ha un criteri CCA de congruència de triangles?

I.33 El 1893, James Joseph Sylvester va plantejar com a problema demostrar aquest resultat de geometria plana: *si un conjunt finit $\mathcal{P}$ de punts del pla no estan tots alineats, aleshores n'hi ha com a mínim dos tals que la recta que els conté no conté cap més punt de $\mathcal{P}$*. Es tracta de demostrar[9] aquest resultat utilitzant només els axiomes **I** i **II**.[10] Fixem un punt $X \in \mathcal{P}$ i designem per $\mathcal{R}$ el conjunt de totes les rectes que passen per dos o més punts de $\mathcal{P}$.

(a) Demostreu que existeix un punt $A \notin \mathcal{P}$ tal que

  i. Hi ha una recta $r \in \mathcal{R}$ que passa per A.

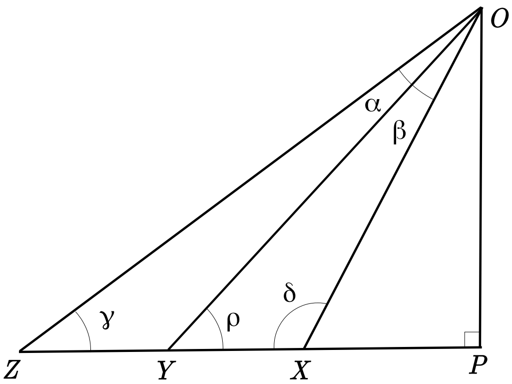
  ii. Cap recta de $\mathcal{R}$ talla el segment XA (excepte en els seus extrems).

(b) Suposeu que r tingui com a mínim tres punts $U, V, W \in \mathcal{P}$ i demostreu que alguna recta que uneix X amb algun d'aquests tres punts només conté dos punts de $\mathcal{P}$.

I.34 Considereu la construcció del dibuix, on l'angle a P és recte i $\alpha \equiv \beta$. Demostreu, només amb els axiomes **I**, **II** i **III**, que $XY < YZ$. Com a corol·lari, demostreu que si α i ϵ són angles i admetem l'axioma d'Arquimedes, existeix un nombre natural r tal que $r\epsilon > \alpha$.

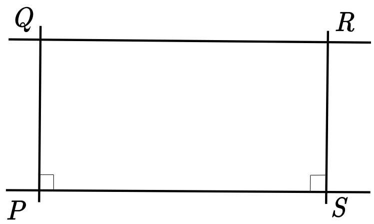
[9] La primera demostració d'aquest fet la va donar el 1944 el matemàtic hongarès Tibor Gallai. El resultat s'anomena ara teorema de Sylvester-Gallai. La demostració que s'indica en aquest exercici és deguda a H. S. M. Coxeter (1969).

[10] Els axiomes d'ordre són imprescindibles: vegeu l'exercici **II**.20.



I.35 Suposeu els axiomes **I**, **II** i **III** i un nou axioma que afirma que *per tres punts no alineats sempre hi passa una circumferència.* Demostreu l'axioma **V**.

I.36 Un *quadrilàter de Khayyam-Saccheri* està format per quatre punts P, Q, R S, no alineats tres a tres, tal que els angles $\widehat{QPS}$ i $\widehat{PSR}$ són rectes i $PQ \equiv RS$. Demostreu que, a la geometria absoluta, els angles $\widehat{PQR}$ i $\widehat{QRS}$ d'un quadrilàter de Khayyam-Saccheri són congruents.



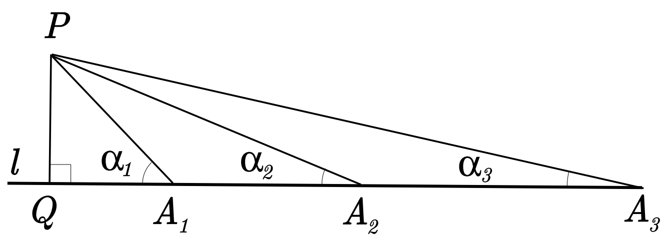
I.37 Decidiu quins d'aquests dos teoremes són certs a la geometria absoluta: a) les bisectrius d'un triangle es tallen en un punt; b) les mediatrius d'un triangle es tallen en un punt.[11]

I.38 Hem dit que l'axioma CAC de Hilbert ens el podríem estalviar si «acceptéssim el moviment». Es tracta ara de donar un significat precís a aquesta afirmació. Sigui X un pla de Hilbert (en el qual potser falli l'axioma CAC). Anomenarem *moviment rígid* qualsevol aplicació bijectiva $\phi : X \to X$ que: (a) transforma rectes en rectes; (b) si A està entre B i C, aleshores $\phi(A)$ està entre $\phi(B)$ i $\phi(C)$; (c) tot segment AB és congruent al segment $\phi(A)\phi(B)$; (d) tot angle α

[11] Què passa amb les altures i amb les mitjanes? La situació en aquests casos és més complicada. A geometria absoluta no es pot demostrar que les altures es tallin en un punt: a la geometria hiperbòlica hi ha triangles on les altures es tallen en un punt i altres triangles on no es tallen ni dos a dos (vegeu l'exercici **I**.50). A la geometria hiperbòlica les mitjanes també es tallen en un punt i, de fet, F. Bachmann va demostrar el 1959 que les mitjanes es tallen en un punt a qualsevol pla de Hilbert, però Bachmann treballa en un sistema d'axiomes diferent i és complicat adaptar la seva demostració.

és congruent a l'angle $\phi(\alpha)$. Direm que X té *prou moviments rígids* si: (a) donats A, B, existeix un moviment rígid ϕ tal que $\phi(A) = B$; (b) donats O, A, A', existeix un moviment rígid ϕ que envia la semirecta OA a la semirecta OA'; (c) donada una recta r, existeix un moviment rígid que deixa fixos els punts de r i intercanvia els dos semiplans determinats per r. Demostreu que si X té prou moviments rígids, aleshores l'axioma CAC es compleix.

I.39 Suposem els axiomes **I**, **II**, **III** i suposem també que la suma dels angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes. Sigui l una recta i $P \notin l$. Tracem la perpendicular per P a l i sigui Q el peu d'aquesta perpendicular. Agafem $A_1 \in l$ tal que $QA_1 \equiv PQ$. Agafem $A_2 \in l$ tal que $A_1A_2 \equiv PA_1$ i continuem inductivament definint punts $A_i \in l$ tals que $A_{i-1}A_i \equiv PA_{i-1}$. Calculeu els angles α_i.



I.40 Suposem els axiomes **I**, **II**, **III** i l'axioma d'Arquimedes, i suposem també que la suma dels angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes. Demostreu l'axioma **V**. (Apliqueu l'exercici anterior.)

I.41 Considerem un pla de Hilbert, és a dir, una geometria que compleix els axiomes d'incidència, ordre i congruència. Demostreu:

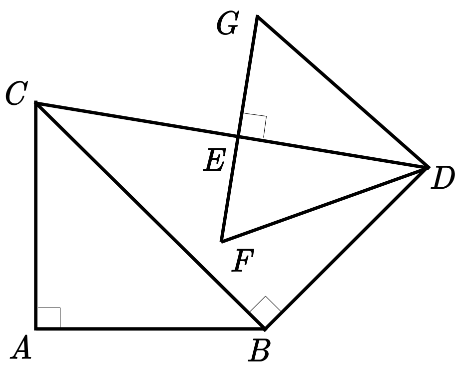
(a) Tot triangle té com a mínim dos angles aguts.

(b) Considerem un triangle ABC tal que els angles a A i C són aguts. Sigui X el peu de la perpendicular de B al costat AC. Demostreu que X està entre A i C.

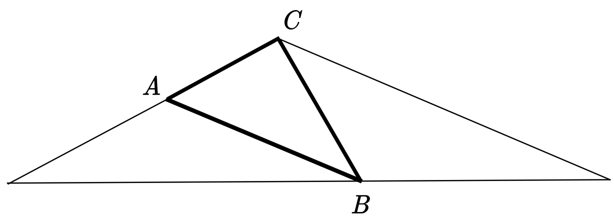
(c) Suposem ara que també es compleix l'axioma d'Arquimedes. Demostreu que si ABC és un triangle tal que la suma dels seus angles val π, existeix un triangle rectangle tal que la suma dels seus angles també val π.

I.42 Demostreu l'existència d'un triangle equilàter de costat donat (proposició primera del llibre primer dels *Elements*) utilitzant només els axiomes **I**, **II**, **III**, **V**. Per fer-ho, utilitzeu aquesta figura i el teorema de Pitàgores:[12]

[12] Recordem que Euclides demostra això utilitzant l'axioma **CC**. Aquest exercici ens demostra que no cal utilitzar cap axioma de continuïtat: n'hi ha prou amb els axiomes de la geometria absoluta i l'axioma de les paral·leles. Vegeu la nota 3 de la pàgina 34.



I.43 Suposem els axiomes **I**, **II**, **III** i l'axioma d'Arquimedes, i suposem també que donat un triangle i un segment sempre hi ha un altre triangle que té els mateixos angles que el triangle donat i que té un dels costats igual al segment donat. Demostreu que la suma dels angles de qualsevol triangle és igual a dos rectes. Per fer-ho, apliqueu el teorema de Legendre i inspireu-vos en aquest dibuix:



I.44 Sovint, es defineix un cos ordenat com un cos k en el qual s'ha fixat un subconjunt P, els elements del qual s'anomenen *positius*, que compleix:

(a) k és unió disjunta de P, $\{0\}$ i $-P$.

(b) La suma i el producte d'elements positiu dóna elements positius.

Demostreu que aquesta definició és equivalent a la definició donada en el text. Demostreu que $\mathbb{C}$ no pot ser un cos ordenat.

I.45 Suposem que k és un cos pitagòric. Demostreu: (a) $\sqrt{n} \in k$ per tot nombre natural n; (b) $\sqrt{n \pm 2\sqrt{5}} \in k$ per tot $n \geq 5$.

I.46 Considereu la geometria plana ordinària sobre el *cos de Hilbert* Ω. (Podeu utilitzar sense demostració que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \Omega$.) Demostreu que, en aquesta geometria:

(a) No es compleix l'axioma **RC** de la pàgina 27.

(b) No hi ha triangles isòsceles de costats arbitraris: trobeu segments $AB < BC$ tals que no existeix un triangle ABX amb $AX \equiv BC \equiv BX$.[13]

(c) Hi ha pentàgons regulars.

I.47 Demostreu que el cos de les funcions racionals reals és un cos ordenat no arquimedià i no pitagòric.

I.48 Una sèrie de Laurent formal és una sèrie de potències

$$f(t) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i t^i$$

amb coeficients a_i reals i amb n variant als nombres enters (també els negatius). Amb les operacions de suma i producte òbvies aquestes sèries formen un cos que es denota $\mathbb{R}((t))$.

(a) Diem que una sèrie de Laurent és *positiva* si el coeficient no nul de grau mínim és positiu. Demostreu que $\mathbb{R}((t))$ és un cos ordenat no arquimedià.

(b) Trobeu sèries de Laurent $f_0 < f_1 < \ldots$, $g_0 > g_1 > \cdots$ tals que $f_i < g_i$ per tot i i, en canvi, $\bigcap_i [f_i, g_i] = \varnothing$.

(c) En contrast amb l'apartat anterior, demostreu que el cos $\mathbb{R}((t))$ compleix l'axioma de Cantor (vegeu la nota 6 de la pàgina 27). És a dir, si tenim sèries f_i, g_i com a l'apartat anterior, amb la condició que per tot $h \in \mathbb{R}((t))$ existeix n_0 tal que $g_n - f_n < h$ per tot $n > n_0$, aleshores $\bigcap_i [f_i, g_i] \neq \varnothing$.

I.49 Considerem el cos ordenat de les sèries de Laurent formals $k := \mathbb{R}((t))$.

(a) Demostreu que k no és un cos euclidià.

(b) Demostreu que si $a_0 \neq 0$ és un quadrat, aleshores la sèrie $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ és un quadrat.

(c) Demostreu que k és un cos pitagòric.

(d) Demostreu que a la geometria de k^2 no hi ha cap triangle isòsceles amb un costat de longitud 2 i dos costats de longitud $1 + t$.

I.50 (a) Considerem el pla $\mathbb{R}^2$ de la geometria euclidiana ordinària. Demostreu, aplicant el teorema de Pitàgores, que aquestes dues circumferències

$$\mathcal{C}_1 : \quad (x+2)^2 + y^2 = 3; \qquad \mathcal{C}_2 : \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 7.$$

tallen ortogonalment la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

[13] És a dir, a Ω^2 no és certa la proposició 22 del llibre primer dels *Elements* i això, en particular, ens demostra que aquella proposició no és un teorema de la geometria absoluta, encara que adjuntem l'axioma de les paral·leles.

(b) Un dels teoremes clàssics de la geometria d'Euclides afirma que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt, anomenat l'*ortocentre* del triangle. Demostreu que aquest teorema no és vàlid a la geometria absoluta trobant un triangle al pla hiperbòlic que tingui dues altures que no es tallin.

Geometria projectiva axiomàtica

I.51 Sigui S la circumferència intersecció de l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$ amb el pla $z = x-1$ i sigui f l'aplicació del pla $z = x - 1$ en el pla $z = 0$ donada per la projecció central des del punt $(0, 0, 1)$. Demostreu que $f(S)$ és una circumferència de centre $(1/2, 0, 0)$. Deduïu que és impossible trobar el centre d'una circumferència utilitzant només el regle (és a dir, sense utilitzar el compàs).[14]

I.52 Demostreu que una geometria projectiva no pot ser unió de dues subvarietats pròpies.

I.53 Si A és una subvarietat d'un espai projectiu X i P és un punt de X, definim

$$\mathcal{C}(P, A) = \begin{cases} \{P\} \cup \{Q \in X - \{P\} : PQ \cap A \neq \varnothing\} & \text{si } P \notin A \\ A & \text{si } P \in A \end{cases}$$

Demostreu:

(a) $\mathcal{C}(P, A)$ és una subvarietat de X.

(b) $A + B = \bigcup_{P\in A} \mathcal{C}(P, B)$.

I.54 Demostreu aquesta versió feble de la propietat distributiva de la intersecció respecte de la suma de subvarietats en un espai projectiu: Siguin R, S i T tres subvarietats d'un espai projectiu i suposem que $R \subseteq S$. Demostreu

$$R + (S \cap T) = S \cap (R + T).$$

Observeu que la propietat distributiva no és vàlida en general.

I.55 Sigui $f : X \to Y$ una col·lineació entre espais projectius. Demostreu:

(a) Si $A \subseteq X$ és una subvarietat, aleshores $f(A) \subseteq Y$ també és una subvarietat.

(b) Si $A, B \subseteq X$ són subvarietats, aleshores $f(A + B) = f(A) + f(B)$.

[14] Pot semblar curiós que haguem trobat una circumferència que, per projecció central sobre un pla no paral·lel, es transformi en una altra circumferència (i no pas, per exemple, en una el·lipse). Aquest fet s'entén millor si ens adonem que estem utilitzant la *projecció estereogràfica* de l'esfera (sense el pol nord) sobre el pla de l'equador, que té la propietat de conservar les circumferències: les circumferències sobre l'esfera (que no passin pel pol nord) es transformen en circumferències del pla.

I.56 Un departament de matemàtiques vol organitzar 7 màsters diferents. Cada màster ha de tenir 3 mòduls i dos màsters no poden compartir més d'un mòdul. Només hi ha professorat per impartir 7 mòduls. Com pot fer-ho?

I.57 Sigui X un pla projectiu on hi ha una recta que té $n+1$ punts.

(a) Demostreu que totes les rectes de X tenen $n+1$ punts.

(b) Demostreu que X té n^2+n+1 punts.

(c) Demostreu que X té n^2+n+1 rectes.

(d) Demostreu que a X per cada punt hi passen exactament $n+1$ rectes.

(Direm que X és un pla projectiu finit d'ordre n.)

I.58 Trobeu tots els plans projectius que tinguin una recta amb només tres punts.

I.59 Sigui X un conjunt finit amb $k \geq 4$ elements i anomenem *punts* els seus elements. Suposem que tenim una família de subconjunts de X, anomenats *rectes*, i que tenim, per tant, una relació d'incidència entre punts i rectes donada per $\in$. Suposem que es compleixen aquestes propietats:

(a) Totes les rectes tenen exactament m punts i es compleix que $\sqrt{k} < m < k$.

(b) Per dos punts diferents hi passa una única recta.

Demostreu que X és un pla projectiu.

I.60 Una *configuració* és un conjunt de punts i un conjunt de rectes que compleixen aquests axiomes (més febles que els de geometria projectiva): (C1) Hi ha quatre punts, dels quan no n'hi ha tres d'alineats. (C2) Per dos punts diferents hi passa com a màxim una recta. Sigui C una configuració. Construïu un pla projectiu X amb una inclusió $C \subset X$ que conservi les relacions d'incidència. (Vegeu la pàgina 92.)

I.61 Sigui C una configuració que contingui tres punts x, y, z que no estiguin units per una recta. Demostreu que hi ha un pla projectiu X que conté C i tal que x, y, z no estan alineats a X.[15]

I.62 Un *quadrat llatí* d'ordre n és una matriu quadrada $n \times n$ formada per elements del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$, de manera que a cada fila i a cada columna no hi ha elements repetits.

- Si G és un grup d'ordre n, construïu, a partir de G, un quadrat llatí d'ordre n.

[15] És a dir, no hi pot haver cap teorema que digui «a tot pla projectiu es compleix que si tenim una configuració tal, aleshores els punts A, B i C estan alineats» (a menys que sigui una tautologia).

- Si X és un pla projectiu finit d'ordre n (exercici 57), construïu, a partir de X, un quadrat llatí d'ordre n. (Indicació: escolliu una recta i tres punts d'aquesta recta. Numereu de 1 a n les rectes que passen per cadascun d'aquests tres punts.)

I.63 Dos quadrats llatins $A = (a_{i,j})$ i $B = (b_{i,j})$ direm que són *ortogonals* si a la matriu $A \times B := \big((a_{i,j}, b_{i,j})\big)$ no hi ha elements repetits. Sigui X un pla projectiu finit d'ordre n. Construïu, a partir de X, $n-1$ quadrats llatins d'ordre n, ortogonals dos a dos.[16]

I.64 Feu un dibuix del pla afí sobre el cos $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$, indicant totes les seves rectes. Apliqueu el procés descrit al text i completeu aquest pla afí a un pla projectiu d'ordre 3.[17]

I.65 Un *codi*[18] de longitud n és un subconjunt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$. Cada element de $\mathcal{C}$ direm que és una *paraula del codi* (*«codeword»*) i és, evidentment, una cadena de zeros i uns de longitud n. La *mida* M d'un codi és el nombre de paraules que conté. La *distància* entre dues paraules és el nombre de posicions on la lletra d'una paraula és diferent de la lletra de l'altra paraula. Per exemple, $d(01101111, 10100110) = 4$. Es tracta, efectivament, d'una funció distància a $\mathbb{F}_2^n$. La distància d d'un codi és el mínim de les distàncies entre les seves

[16] Els quadrats llatins —i, més exactament, les parelles de quadrats llatins ortogonals— van ser considerats per Euler en un treball del 1782 en el qual va conjecturar que és impossible disposar 36 oficials en una formació de 6×6 si els oficials pertanyen a sis regiments i tenen sis rangs, i si imposem la condició que a cada fila i a cada columna no hi hagi dos oficials del mateix regiment ni del mateix rang. És a dir, va conjecturar que no hi ha dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 6. El problema clàssic de disposar les cartes A, J, Q, K d'una baralla francesa en una graella 4×4 de manera que a cada fila i a cada columna no hi hagi ni dues cartes del mateix coll ni dues cartes del mateix valor, és el problema de trobar dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 4 —que sí que té solució. Modernament, els quadrats llatins ortogonals són útils a moltes àrees com el disseny d'experiments, la codificació o les telecomunicacions.

[17] Aquest pla projectiu que construïm aquí és l'únic pla projectiu d'ordre 3. Si en lloc del cos de 3 elements agafem el cos de n elements, obtenim un pla projectiu d'ordre n. Com que hi ha un cos amb n elements si i només si n és una potència d'un primer, aquest mètode de construir plans projectius finits no ens dóna plans projectius de tots els ordres. De fet, no es coneix per a quins ordres hi ha plans projectius. El 1901 Gaston Tarry va demostrar que no hi ha cap pla projectiu d'ordre 6. Aquest resultat, en particular, va demostrar que era correcta la conjectura d'Euler que afirmava que el problema dels 36 oficials no té solució. El cas següent és el del pla projectiu d'ordre 10, que no es va resoldre (negativament) fins el 1989 (amb una gran quantitat de computació per ordinador). En aquests moments (2020), el pla projectiu més petit que no sabem si existeix o no és el d'ordre 12 i, pràcticament, l'únic teorema general que hi ha és el de Bruck–Ryser de 1949 que afirma que si existeix un pla projectiu d'ordre $n \equiv 1, 2\,(4)$, aleshores n és suma de dos quadrats.

[18] Aquest exercici i els següents presenten les beceroles de la teoria dels *«error correcting codes»*, que és una àrea de recerca amb aplicacions tècniques importants en la qual la geometria hi juga un paper significatiu.

paraules. Si un codi $\mathcal{C}$ té longitud n, mida M i distància d, direm que és un codi (n, M, d). Aquests codis s'utilitzen per transmetre missatges per un canal amb soroll, procedint d'aquesta manera:

(a) Suposem que tenim M missatges diferents que volem transmetre. Escollim un codi $\mathcal{C} = \{x_i : 1 \leq i \leq M\}$ de mida M.

(b) Per transmetre el missatge i enviem els n bits de la paraula $x_i \in \mathcal{C}$. El receptor rebrà n bits $y \in \mathbb{F}_2^n$ que, degut al soroll, poden ser diferents de x_i.

(c) El receptor busca quina és la paraula del codi $\mathcal{C}$ més propera a y. Si aquesta paraula és x_j, el receptor considera que s'ha rebut el missatge j.

Un codi direm que *detecta s errors* si el receptor pot deduir que la paraula y que ha rebut no és la que ha enviat l'emissor, encara que en la transmissió s'hagin alterat fins a s bits. Un codi direm que *corregeix t errors* quan el receptor pot deduir el missatge correcte encara que en la transmissió s'hagin alterat fins a t bits. Suposem que treballem amb un codi (n, M, d).

(a) Demostreu que la distància que hem definit a $\mathbb{F}_2^n$ compleix les propietats d'una distància en un espai mètric.

(b) Demostreu que si $d \geq s + 1$, aleshores $\mathcal{C}$ detecta s errors.

(c) Demostreu que si $d \geq 2t + 1$, aleshores $\mathcal{C}$ corregeix t errors.

(d) Suposeu $d = 3$. Demostreu $M(1 + n) \leq 2^n$.

I.66 Sigui X un pla projectiu finit d'ordre a. Numerem de 1 a $k := a^2 + a + 1$ els seus punts i les seves rectes. Definim un codi $\mathcal{C}$ d'aquesta manera:

(a) Les primeres k paraules estan formades de manera que la paraula i té un 1 a la posició j si i només si el punt j és a la recta i.

(b) Un segon bloc de k paraules s'obté prenent les mateixes paraules del primer bloc i intercanviant els dígits 0, 1.

(c) Finalment, afegim les paraules $1 \cdots 1$ i $0 \cdots 0$.

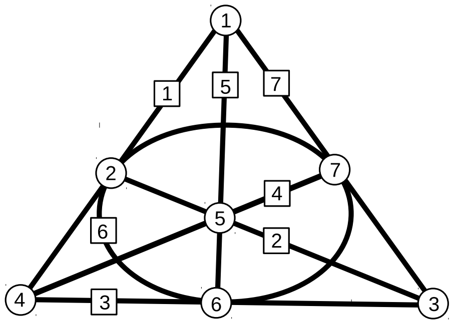
D'aquesta manera hem construït un codi de longitud k i mida $2k + 2$. Calculeu la distància d'aquest codi.

I.67 És clar que en un codi (n, M, d) ens interessa que M sigui gran (per poder transmetre molts missatges diferents), que n sigui petit (per no haver de transmetre massa bits redundants) i que d sigui gran (per poder corregir o detectar molts errors). Hem vist en un exercici anterior que aquestes tres variables estan lligades. Per exemple, si volem transmetre 4 bits (és a dir, $M = 16$ missatges) de manera que es corregeixi un error ($d = 3$) necessitem com a mínim $n = 7$

bits. És a dir, un codi $(7, 16, 3)$ seria un codi «òptim».[19] Demostreu que el pla de Fano ens dóna efectivament un codi $(7, 16, 3)$. Descodifiqueu aquest missatge (el missatge original està format per lletres A,...,P)

0110110 1001000 1011001 1101000 0111110 1000001 1100011 0001100

que s'ha codificat amb un pla de Fano en el qual els punts i les rectes s'han numerat així:



I.68 Els plans projectius finits són un cas particular d'uns objectes combinatoris importants anomenats 2-**dissenys en blocs** simètrics. Aquests objectes consisteixen en un conjunt de punts X i un conjunt B de subconjunts de X, anomenats blocs, de manera que (1) cada bloc té $k > 2$ punts; (2) cada punt pertany a k blocs; (3) cada dos punts diferents pertanyen exactament a λ blocs.

Suposeu a partir d'ara que $\lambda = 1$ i anomenem «rectes» als blocs.

(a) Compteu de dues maneres el nombre d'elements del conjunt

$$\{(P, b) \in X \times B : P \in b\}$$

i demostreu que el nombre de punts és igual al nombre de rectes.

(b) Considereu les rectes que passen per un punt fixat i demostreu que el nombre total de punts de X és $n := k^2 - k + 1$.

(c) Si hi ha dues rectes que no es tallen, demostreu que hi ha més de n rectes.

(d) Demostreu que X és un pla projectiu finit (axiomàtic).

[19] Es considera que la teoria de codis va néixer el 1950 quan Richard W. Hamming (que treballava als laboratoris Bell Telephone) va descobrir el que es coneix com a *codi de Hamming*, que és un codi $(7, 16, 3)$.

II

Geometria projectiva

11. L'espai projectiu d'un espai vectorial

Quan vam voler donar una base matemàtica a una geometria que incorporés el que en vàrem dir *«el punt de vista projectiu»* vàrem fer-ho a través de considerar com a punts de la geometria les rectes d'un espai vectorial que passen per l'origen. En aquest capítol desenvoluparem amb més detall aquest concepte i entrarem una mica en el corpus del que es coneix com a **geometria projectiva**.

L'espai projectiu

Comencem amb un espai vectorial V sobre un cos k i suposem que aquest espai vectorial és de dimensió finita $n+1>0$. Definirem l'**espai projectiu** de V de qualsevol d'aquestes dues maneres equivalents:

- $\mathcal{P}(V) := \big\{$subespais vectorials de V de dimensió 1$\big\}$.
- $\mathcal{P}(V) :=$ conjunt quocient de $V - \{\overrightarrow{0}\}$ per la relació d'equivalència
$$\overrightarrow{v} \sim \lambda\overrightarrow{v}, \quad \lambda \neq 0.$$

Un conjunt $\mathcal{P}(V)$ construït d'aquesta manera direm que és un **espai projectiu de dimensió** n.[1]

- Recordem que ja havíem donat una definició d'espai projectiu com un sistema de punts i rectes amb una relació d'incidència que complia tres axiomes EP1, EP2, EP3. Per tal d'evitar la confusió entre els dos conceptes, quan hi hagi perill de confusió del «sistema de punts amb tres axiomes» en direm un espai projectiu *axiomàtic*.

[1]Podríem generalitzar sense cap dificultat aquesta definició d'espai projectiu al cas que k no fos un cos sinó que fos un *anell de divisió*. Recordem que un anell de divisió és un anell que compleix els axiomes de cos excepte, potser, la propietat commutativa de la multiplicació. Un exemple clàssic d'anell de divisió que no és cos el proporcionen els *quaternions* $\mathbb{H}$. Sobre un anell de divisió, també podem parlar d'espais vectorials V —que ja no n'hauríem de dir espais vectorials— i també podem definir uns espais projectius $\mathcal{P}(V)$. Convé tenir present l'existència d'aquests espais projectius més generals, però els espais que considerarem, si no diem el contrari, seran sempre sobre un cos.

- Observem també que hi ha un decalatge d'una unitat entre la dimensió de l'espai vectorial V i el que anomenem «dimensió» de l'espai projectiu associat $\mathcal{P}(V)$.

- De les definicions de $\mathcal{P}(V)$ que hem donat es dedueix que l'espai projectiu és un quocient de l'espai vectorial (després d'eliminar el vector $\overrightarrow{0}$): tenim una aplicació de pas al quocient

$$\pi : V - \{\overrightarrow{0}\} \longrightarrow \mathcal{P}(V).$$

  De manera rutinària, pensarem els punts de $\mathcal{P}(V)$ com a classes d'equivalència de vectors (no nuls!) de V.

Com sempre que introduïm uns nous objectes, és important introduir el concepte d'*isomorfisme* entre aquests objectes. Ho fem així: suposem que tenim dos espais projectius $\mathcal{P}(V)$, $\mathcal{P}(W)$; aleshores, si $\phi : V \to W$ és un isomorfisme lineal d'espais vectorials, podem considerar l'aplicació

$$\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(W)$$

definida per

$$\mathcal{P}(\phi)\left([\overrightarrow{v}]\right) := [\phi(\overrightarrow{v})]$$

que és evident que està be definida i és bijectiva. Direm que $\mathcal{P}(\phi)$ és una *homografia* entre els espais projectius $\mathcal{P}(V)$ i $\mathcal{P}(W)$. Observem que una homografia té una inversa que també és una homografia.

Tanmateix, les homografies són un cas particular del concepte una mica més general d'*isomorfisme projectiu*. Considerem un espai vectorial V sobre un cos k i un espai vectorial W sobre un cos k'. Un *isomorfisme semilineal* $\phi : V \to W$. serà una aplicació bijectiva associada amb un *isomorfisme de cossos* $r : k \to k'$ tal que

$$\begin{aligned} \phi(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{v}) &= \phi(\overrightarrow{e}) + \phi(\overrightarrow{v}), \quad \overrightarrow{e}, \overrightarrow{v} \in V \\ \phi(\lambda \overrightarrow{v}) &= r(\lambda)\, \phi(\overrightarrow{v}), \quad \overrightarrow{v} \in V, \lambda \in k. \end{aligned}$$

Clarament, un isomorfisme semilineal $\phi : V \to W$ dóna lloc a una bijecció $\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ que direm que és un isomorfisme d'espais projectius i escriurem $\mathcal{P}(V) \cong \mathcal{P}(W)$.[2]

[2]Si $k = k'$ tindrem isomorfismes semilineals que no siguin lineals quan el cos base admeti algun automorfisme diferent de la identitat. Els cossos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i els cossos finits $\mathbb{F}_p$ amb p primer no tenen automorfismes no trivials. Per tant, per als espais vectorials sobre aquests cossos, semilineal és el mateix que lineal. Com a exemples de cossos amb automorfismes no trivials tenim $\mathbb{C}$ i els cossos finits d'ordre no primer.

Com a exemple trivial d'isomorfisme d'espais projectius tenim aquest: si V és un espai vectorial de dimensió $n+1$ sobre el cos k sabem que hi ha un isomorfisme lineal $V \cong k^{n+1}$; per tant, hi haurà un isomorfisme d'espais projectius —de fet, una homografia— $\mathcal{P}(V) \cong \mathcal{P}(k^{n+1})$. Utilitzarem aquesta notació

$$P_n(k) := \mathcal{P}(k^{n+1})$$

i podem dir que $P_n(k)$ és l'exemple canònic d'espai projectiu de dimensió n sobre el cos k perquè si X és un espai projectiu de dimensió n sobre k, aleshores $X \cong P_n(k)$.

Si V és un espai vectorial de dimensió $n+1$ i $E \subseteq V$ és un subespai vectorial de dimensió $m+1 > 0$, podem considerar una inclusió natural

$$\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(V).$$

Direm que E és una **subvarietat projectiva**[3] de dimensió m de l'espai projectiu $\mathcal{P}(V)$. En particular, anomenarem **recta** de $\mathcal{P}(V)$ qualsevol subvarietat projectiva de dimensió 1, i anomenarem **hiperplà** de $\mathcal{P}(V)$ qualsevol subvarietat projectiva de dimensió $n-1$.

Tenim, doncs, una correspondència bijectiva entre

- Subespais vectorials de dimensió $m+1 > 0$ de V i
- subvarietats projectives de dimensió m de $\mathcal{P}(V)$.

Relació amb els espais projectius axiomàtics

Començarem demostrant que, amb el concepte de recta que tenim a $\mathcal{P}(V)$, es compleixen els tres axiomes dels espais projectius axiomàtics. Sigui $X = \mathcal{P}(V)$.

EP1 *Tota recta té com a mínim tres punts.*

Una recta de X és $r = \mathcal{P}(E)$ amb $\dim(E) = 2$. Si $\vec{e}, \vec{v}$ és una base de E, aleshores $[\vec{e}]$, $[\vec{v}]$, $[\vec{e} + \vec{v}]$ són tres punts diferents de la recta r.

EP2 *Per dos punts diferents hi passa una única recta.*

Siguin $A = [\vec{e}]$ i $B = [\vec{v}]$ dos punts diferents de X. Com que $A \neq B$, es compleix que $\vec{e}$ i $\vec{v}$ són linealment independents. Definim $E := \langle \vec{e}, \vec{v} \rangle$. Aleshores, és clar que $\mathcal{P}(E)$ és l'única recta que passa pels punts A i B.

[3] Si el context és clar, en direm simplement «subvarietat». De fet, hauríem de dir-n'hi «subvarietat lineal» però en aquest curs de geometria lineal no cal incloure l'adjectiu «lineal».

EP3 *L'axioma projectiu.*

Siguin $M, N, P, Q \in X$ quatre punts diferents i suposem que la recta que passa per M i N talla la recta que passa per P i Q. Posem

$$M = [\overrightarrow{a}],\ N = [\overrightarrow{b}],\ P = [\overrightarrow{c}],\ Q = [\overrightarrow{d}].$$

Que la recta que passa per M i N talli la recta que passa per P i Q vol dir que els plans $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ i $\langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \rangle$ es tallen en una recta. És a dir, hi ha un vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que

$$\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b} = \tau \overrightarrow{c} + \rho \overrightarrow{d}.$$

Per tant,

$$\overrightarrow{v} := \lambda \overrightarrow{a} - \tau \overrightarrow{c} = -\mu \overrightarrow{b} + \rho \overrightarrow{d}$$

i el punt $[\overrightarrow{v}] \in X$ pertany a la recta que passa per M i P i també a la recta que passa per N i Q.

Recordem que en els espais projectius axiomàtics també teníem un concepte de *subvarietat* (vegeu la pàgina 56). És immediat comprovar que les subvarietats projectives de $\mathcal{P}(V)$ que acabem de definir són també subvarietats en el sentit axiomàtic.

Finalment, recordem (pàgina 57) que una **col·lineació** $f : X \to Y$ entre dos espais projectius axiomàtics és una aplicació bijectiva que té la propietat que $A, B, C \in X$ estan alineats si i només si $f(A), f(B), f(C) \in Y$ ho estan. És molt fàcil veure que qualsevol isomorfisme $\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ és una col·lineació.

Recapitulem: hem vist que $\mathcal{P}(V)$ és un *exemple* d'espai projectiu axiomàtic; hem vist que una subvarietat $\mathcal{P}(E)$ de $\mathcal{P}(V)$ és un *exemple* de subvarietat projectiva axiomàtica; i hem vist que un isomorfisme $\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ és un *exemple* de col·lineació entre espais projectius axiomàtics. La pregunta que, de moment, queda pendent de resposta és si aquests són els únics exemples.

12. Coordenades homogènies i fórmula de Grassmann

Coordenades homogènies

Considerem un espai projectiu $X = \mathcal{P}(V)$ de dimensió n. Ens agradaria poder assignar alguna mena de *coordenades* als punts de X de manera que també poguéssim parlar de les *equacions* de les subvarietats projectives de X. La manera de fer-ho és aquesta:

1. Escollim una base de l'espai vectorial V: $\overrightarrow{v}_0, \dots, \overrightarrow{v}_n$.
2. Si x és un punt de X, escollim un representant $x = [\overrightarrow{v}]$ i expressem el vector $\overrightarrow{v} \in V$ com a combinació lineal dels vectors de la base: $\overrightarrow{v} = \lambda_0 \overrightarrow{v}_0 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$.
3. Diem que les **coordenades homogènies** de x són $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ i escrivim
$$x = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\} .$$
Observem que X té dimensió n i els punts de X vénen donats per $n+1$ coordenades homogènies.
4. Els escalars $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ no estan unívocament determinats perquè, si $\tau \neq 0$, aleshores
$$\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\} = \{\tau\lambda_0, \dots, \tau\lambda_n\} .$$
Quan treballem amb coordenades homogènies hem de recordar que només estan determinades llevat del producte per un escalar no nul. És a dir:
$$\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\} = \{\mu_0, \dots, \mu_n\} \quad \iff \quad \begin{cases} \text{existeix } \tau \neq 0 \text{ tal que} \\ \lambda_i = \tau\mu_i, \ i = 0, \dots, n. \end{cases}$$

5. És clar que aquestes coordenades dependran de l'elecció de la base $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_n$ i que les coordenades d'un mateix punt x seran diferents si canviem la base. En tot cas, les fórmules de canvi de base de l'àlgebra lineal ens diuen exactament com canvien aquestes coordenades homogènies.

Dit això, ens agradaria poder assignar coordenades als punts de X **sense recórrer a l'espai vectorial** V del qual procedeix l'espai projectiu X. És a dir, voldríem poder assignar coordenades *de manera purament geomètrica*. Expliquem ara com ho podem fer.

Una **referència projectiva** a X és una família (ordenada) de $n+2$ punts de X

$$U_0, \ldots, U_n, U$$

que tenen la propietat que, donats $n+1$ punts qualsevol d'aquesta família, no hi ha cap hiperplà de X que els contingui. Per exemple, si X és una recta, una referència projectiva estarà formada per tres punts diferents; si X és un pla, una referència projectiva estarà formada per quatre punts de manera que no n'hi hagi tres d'alineats (és a dir, un *quadrilàter*). L'últim punt de la referència de vegades s'anomena *punt unitat* de la referència.

El resultat següent es pot demostrar fàcilment com a exercici:

Si $U_0, \ldots, U_n, U$ és una referència projectiva de $X = \mathcal{P}(V)$, existeix una base $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_n$ de V tal que

$$U_i = [\vec{v}_i],\ i = 0, \ldots, n \ i\ U = [\vec{v}_0 + \cdots + \vec{v}_n].$$

Aquesta base és única llevat del producte per un escalar diferent de zero. És a dir, si $\vec{u}_o, \ldots, \vec{u}_n$ és una altra base de V que compleix la mateixa propietat anterior, existeix un escalar $\tau \neq 0$ tal que $\vec{u}_i = \tau \vec{v}_i$, $0 \leq i \leq n$.

Per tant, si tenim una referència projectiva $U_0, \ldots, U_n, U$ de X i escollim una base de V com la que el resultat anterior ens diu que existeix, les coordenades homogènies d'un punt respecte d'aquesta base estan ben determinades i només depenen de la referència projectiva que hem escollit. En particular, les coordenades dels punts de la referència són

$U_i = \{0, \ldots, 1, \ldots, 0\}$, $i = 0, \ldots, n$ (el 1 es troba a la posició i)
$U = \{1, \ldots, 1\}$.

Equacions d'una subvarietat projectiva

Sigui $X = \mathcal{P}(V)$ un espai projectiu de dimensió n i sigui $H \subset X$ un hiperplà. Per definició, tindrem $H = \mathcal{P}(E)$ on E és un subespai vectorial de dimensió n de V. Suposem que hem escollit una base de V, ja sigui directament o a partir d'una referència de X. Aleshores, els vectors de V tindran coordenades, els punts de X tindran coordenades homogènies i un subespai vectorial de codimensió 1 com E tindrà una **equació** de la forma[1]

$$a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Direm que aquesta equació és també l'equació de l'hiperplà H perquè, efectivament

$$x = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\} \in H \quad \Longleftrightarrow \quad a_0\lambda_0 + \cdots + a_n\lambda_n = 0.$$

Observem que, encara que sempre parlem de l'equació d'un hiperplà, aquesta equació no és única perquè si $\tau \neq 0$, aleshores les equacions $\tau a_0x_0 + \cdots + \tau a_nx_n = 0$ i $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ representen el mateix hiperplà. És la mateixa situació de les coordenades homogènies.

En el cas general d'una subvarietat projectiva qualsevol de $\mathcal{P}(V)$, la situació és la mateixa que en el cas dels subespais vectorials de V: s'obtenen com a intersecció d'hiperplans i, en conseqüència, les podem descriure per una família (no única) d'equacions d'hiperplans.

Intersecció i suma de subvarietats

Sigui $X = \mathcal{P}(V)$ un espai projectiu i siguin $Y_1 = \mathcal{P}(E_1)$ i $Y_2 = \mathcal{P}(E_2)$ dues subvarietats projectives de X. A partir d'aquestes dues subvarietats en podem construir dues més:

- La intersecció $Y_1 \cap Y_2$ que està formada pels punts comuns a Y_1 i Y_2. És clar que es tracta d'una subvarietat (sempre que no sigui el conjunt buit!) perquè, evidentment,

$$Y_1 \cap Y_2 = \mathcal{P}(E_1 \cap E_2).$$

[1] Si volem incloure el cas que k no sigui un cos sinó només un anell de divisió (vegeu la nota 1 de la pàgina 84), l'equació d'un hiperplà no tindrà la forma anterior sinó que tindrà aquesta forma

$$x_0a_0 + \cdots + x_na_n = 0.$$

Per aquest motiu, seria més correcte escriure sempre les equacions dels hiperplans amb les incògnites a l'esquerra: $x_0a_0 + \cdots + x_na_n = 0$ i, de fet, si volem considerar espais projectius definits sobre un anell de divisió que no sigui un cos, aleshores és imprescindible escriure les equacions de les subvarietats amb les incògnites a l'esquerra.

- Las suma $Y_1 + Y_2$ que es pot definir de dues maneres:
    1. $Y_1 + Y_2 := \mathcal{P}(E_1 + E_2)$.
    2. $Y_1 + Y_2$ és la suma de les subvarietats Y_1 i Y_2 en el sentit dels espais projectius axiomàtics (pàgina 57). És a dir: si $\mathcal{P}(F) \supseteq \mathcal{P}(E_1) \cup \mathcal{P}(E_2)$, aleshores $\mathcal{P}(F) \supseteq \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2)$.

    No és difícil veure que les dues definicions són equivalents (exercici **II**.2). La primera ens diu que la suma de subvarietats és també una subvarietat.

    Un exemple elemental de suma de subvarietats ens el dóna la suma de dos punts diferents (entesos com a subvarietats): $A + B$ és la recta que passa per A i B.

Fórmula de Grassmann

Si $X = \mathcal{P}(V)$ és un espai projectiu i $Y_1 = \mathcal{P}(E_1)$ i $Y_2 = \mathcal{P}(E_2)$ són dues subvarietats projectives de X, la fórmula de Grassmann relaciona les dimensions de les subvarietats Y_1, Y_2, $Y_1 + Y_2$, $Y_1 \cap Y_2$. La fórmula és molt senzilla i diu això:

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2.$$

Fem aquests dos comentaris:

- Si $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, cal interpretar el significat de la fórmula perquè $\varnothing$ no és un espai projectiu. En aquest cas, la fórmula segueix essent vàlida si, per conveni, posem $\dim(\varnothing) = -1$.
- La fórmula es dedueix immediatament de la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials de V

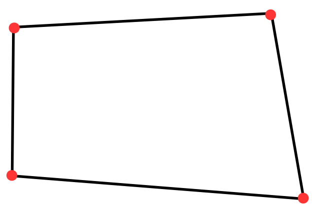
$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

  que s'estudia en els cursos d'àlgebra lineal.

13. Les configuracions de Fano i Pappos

Configuracions

Una **configuració** és un conjunt finit de punts i un conjunt finit de rectes que compleixen aquests dos axiomes (més febles que els de geometria projectiva): (C1) Hi ha quatre punts, dels quan no n'hi ha tres d'alineats. (C2) Per dos punts diferents hi passa com a màxim una recta (vegeu l'exercici **I**.60).[1] En particular, una geometria projectiva (axiomàtica) finita és una configuració, però hi ha configuracions que no compleixen els axiomes de geometria projectiva. Per exemple, una configuració molt senzilla és el *quadrilàter*: quatre punts i quatre rectes amb les incidències que es dedueixen d'aquest esquema gràfic:



Un **isomorfisme** $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre dues configuracions $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ és una aplicació bijectiva f_p entre els punts de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ i una aplicació bijectiva f_r entre les rectes de $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ de manera que $A \in s$ a $\mathcal{C}$ si i només si $f_p(A) \in f_r(s)$ a $\mathcal{D}$. Un **automorfisme** d'una configuració $\mathcal{C}$ és un isomorfisme $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Una configuració $\mathcal{C}$ direm que és **regular** si, donats dos punts $P, Q \in \mathcal{C}$, existeix un automorfisme $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $f(P) = Q$. És a dir, en una configuració regular, tots els punts són «iguals» entre ells. Per exemple, el quadrilàter de l'exemple anterior és una configuració regular.

Si $\mathcal{C}$ és una configuració i intercanviem els punts i les rectes obtenim $\mathcal{C}^*$ que té per punts les rectes de $\mathcal{C}$, té per rectes els punts de $\mathcal{C}$ i té la

[1] A la bibliografia hi podem trobar definicions diverses del concepte de configuració. Aquí prenem aquesta definició concreta que és força general i s'adiu al punt de vista que ara ens interessa.

mateixa relació d'incidència de $\mathcal{C}$. Observem que $\mathcal{C}^*$ pot ser que no sigui una configuració. Una configuració $\mathcal{C}$ direm que és **autodual** si tenim un isomorfisme $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^*$. Per exemple, el quadrilàter de l'exemple anterior és autodual.

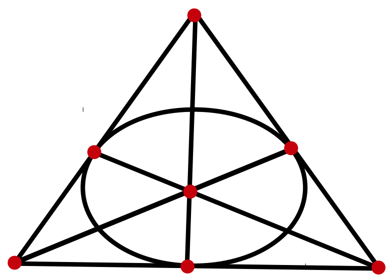
Si X és una geometria projectiva i $\mathcal{C}$ és una configuració, pot ser que tinguem una inclusió $\mathcal{C} \subseteq X$ que respecti les incidències o pot ser que sigui impossible incloure $\mathcal{C}$ a X. Veurem exemples de seguida, però siguem ara més precisos en la definició d'inclusió $\mathcal{C} \subseteq X$. Entendrem aquesta inclusió com una aplicació injectiva i_p dels punts de $\mathcal{C}$ en els punts de X i una aplicació injectiva i_r de les rectes de $\mathcal{C}$ en les rectes de X tals que si $A \in s$, aleshores $i_p(A) \in i_r(s)$.

Direm que $\mathcal{C}$ és **realitzable** a X si existeix una inclusió $\mathcal{C} \subseteq X$. Direm que $\mathcal{C}$ és un **teorema** a X si es compleix això: si r és una recta qualsevol de $\mathcal{C}$, tota inclusió $\mathcal{C} - r \subseteq X$ es pot estendre a una inclusió $\mathcal{C} \subseteq X$. És a dir, a X l'existència de la recta r es una conseqüència de la resta de la configuració. Per exemple, la configuració del quadrilàter és (trivialment) un teorema a tota geometria projectiva: Si a X tenim 4 punts A, B, C, D units per les tres rectes AB, BC i CD, segur que també tenim a X una recta AD.

La configuració de Fano

La configuració de Fano és una configuració de set punts i set rectes que es pot definir de diverses maneres.

- És la configuració descrita per aquest esquema gràfic:



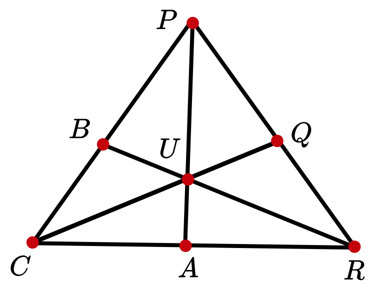
- És l'únic pla projectiu d'ordre[2] 2.
- És el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_2)$.

[2] L'ordre d'un pla projectiu finit és el nombre de punts de qualsevol recta menys u. Vegeu l'exercici **I**.57.

- És un quadrilàter amb les seves diagonals que té els punts diagonals alineats. Anomenem punts diagonals d'un quadrilàter $ABCD$ els punts $AB \cap CD$, $AC \cap BD$ i $AD \cap BC$.

És molt fàcil veure que la configuració de Fano és autodual i regular. Per veure que és regular, observem que la configuració és igual a $P_2(\mathbb{F}_2) = \mathcal{P}\left((\mathbb{F}_2)^3\right)$ i els automorfismes de l'espai vectorial $(\mathbb{F}_2)^3$ ens permeten transformar qualsevol punt en qualsevol altre punt.

Ens podem preguntar a quins espais projectius la configuració de Fano és un teorema o a quins és realitzable. Cal treure una recta de la configuració i, com que és autodual i regular, no importa quina és la recta que traiem. Suposem, doncs, que tenim aquesta configuració inclosa a un espai projectiu $P_n(k)$, $n \geq 2$:



Per la fórmula de Grassmann, aquesta configuració estarà en un pla. Per tant, no és restrictiu suposar que l'espai projectiu ambient és $P_2(k)$. Agafem una referència projectiva formada pels punts A, B, C, U i calculem les equacions de les diverses rectes de la configuració:

$$AC: y = 0; \quad BC: x = 0; \quad AU: y = z; \quad CU: x = y; \quad BU: x = z.$$

Ara podem calcular les coordenades dels punts P i R. Obtenim $P = \{0, 1, 1\}$, $R = \{1, 0, 1\}$. Per tant, la recta PR és $x + y = z$ i finalment podem determinar les coordenades del punt Q: $Q = \{1, 1, 2\}$.

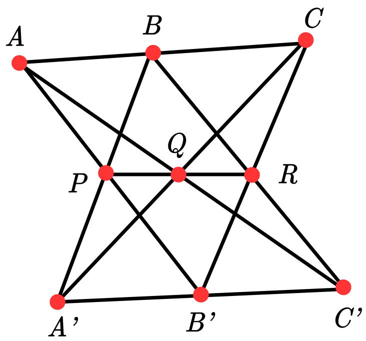
La configuració de Fano es podrà incloure a $P_2(k)$ si i només si els punts A, B, Q estan alineats a $\mathcal{P}_2(k)$. Una recta $ax+by+cz = 0$ passa per aquests tres punts si i només si $a = b = 2c = 0$. Això és possible si i només si la característica del cos k és igual a dos. Hem demostrat aquest resultat:

La configuració de Fano és un teorema (és realitzable) a $P_n(k)$ ($n \geq 2$) si i només si el cos k té característica 2.

La configuració de Pappos

Pappos d'Alexandria va ser un gran matemàtic del segle IV i entre la seva important obra científica hi trobem un teorema de geometria lineal «elemental» que té a veure amb una configuració de nou punts i nou rectes que ara es coneix com a **configuració de Pappos**. Aquesta configuració es pot definir de diverses maneres.

- És la configuració descrita per aquest esquema gràfic:



- És la configuració que té per punts els elements del grup abelià $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i que té per rectes les ternes $\{i, j, k\}$ tals que[3]

$$i + j + k = 0, \quad i, j, k \text{ diferents mod } 3.$$

  Per veure que aquesta configuració és la mateixa d'abans, fem aquestes identificacions entre els punts de l'esquema anterior i els elements de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$:

$$A = 8,\ B = 0,\ C = 1,\ A' = 5,\ B' = 6,\ C' = 7,\ P = 4,\ Q = 3,\ R = 2.$$

- És la configuració que s'obté a partir del pla afí sobre $\mathbb{F}_3$ després d'eliminar tres rectes paral·leles (vegeu l'exercici **I**.64).

- És una versió de l'*Hexagrammum Misticum* de Pascal (vegeu la pàgina 52) quan la cònica és substituïda per dues rectes.

La descripció de la configuració a partir del pla afí sobre el cos $\mathbb{F}_3$ ens permet demostrar que la configuració és regular. En efecte, en un pla afí podem passar de qualsevol punt a qualsevol altre punt a través d'una *translació*.[4] Com que les translacions envien rectes paral·leles a rectes paral·leles,

[3] Aquesta descripció de la configuració de Pappos apareix a H. S. M. Coxeter, *The Pappus Configuration and the Self-inscribed Octagon*, Indag. Math. 1977, que l'atribueix a una resposta d'un estudiant de grau en un examen.

[4] Estudiarem tot això amb més detall a la part **III** dedicada a la geometria afí.

les translacions també són automorfismes de la configuració de Pappos.

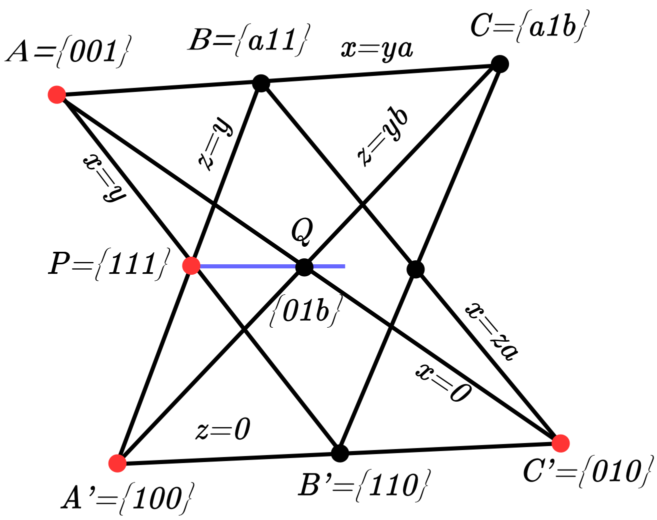
La configuració de Pappos també és autodual. Per exemple, un isomorfisme entre la configuració i la configuració dual pot ser aquest:

$$A \mapsto \{CB'R\},\ B \mapsto \{ABC\},\ C \mapsto \{CQA'\},$$

$$P \mapsto \{APB'\},\ Q \mapsto \{PQR\},\ R \mapsto \{BPA'\},$$

$$A' \mapsto \{AQC'\},\ B' \mapsto \{A'B'C'\},\ C' \mapsto \{BC'R\}.$$

Ens podem preguntar quines geometries projectives la configuració de Pappos és un teorema. Cal treure una recta de la configuració i, com que és autodual i regular, no importa quina és la recta que traiem. Suposem, doncs, que traiem la recta que uneix els punts P, Q, R i que tenim la configuració que resta inclosa a un espai projectiu $P_n(k)$. Observem que la configuració està necessàriament inclosa en un pla i, per tant, podem suposar $n = 2$. Prenem una referència projectiva formada pels punts A', C', A, P i anem calculant les coordenades dels diversos punts i les equacions de les diverses rectes. L'objectiu és veure si els punts P, Q, R estan sempre alineats. De fet, el teorema que va demostrar Pappos al segle IV diu que sí. Per motius que quedaran clars més endavant, no volem utilitzar la propietat commutativa de la multiplicació i, per tant, cal ser molt curosos amb distingir entre ab i ba i també cal escriure «correctament» les equacions de les rectes amb les incògnites a l'esquerra (vegeu la nota 1 de la pàgina 90). Tindrem



on $a \neq 1$ i $b \neq 0, 1$ són elements arbitraris del cos base k. Finalment, la recta PQ serà la recta $x(b-1) - yb + z = 0$ i la recta CB' serà la recta

$x - y + zb^{-1}(1-a) = 0$. Aleshores,

$$R = \{a, a + b^{-1}(1-a), 1\}$$

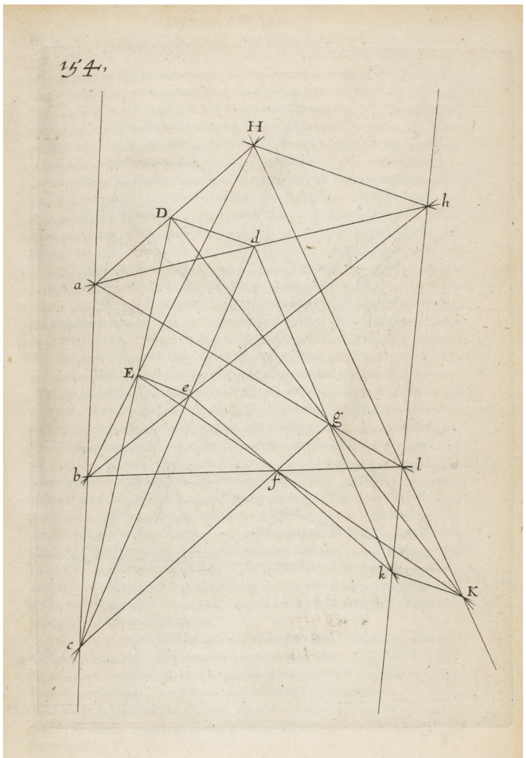
i quan volem comprovar si aquest punt R pertany a la recta PQ veiem que això és cert si i només si $ba = ab$. Com que k és un cos, la multiplicació és commutativa i deduïm que P, Q, R estan alineats. Recordem, però, que havíem dit que els espais projectius $P_n(k)$ es poden definir també si k és un *anell de divisió* (vegeu la nota 1 de la pàgina 84), encara que no sigui un cos. En aquest cas, els punts P, Q, R poden no estar alineats. Hem demostrat això:

> *Sigui k un anell de divisió. La configuració de Pappos és un teorema a $P_n(k)$ si i només si k és un cos, és a dir, si i només si la multiplicació de k és commutativa.*

En particular, si $k = \mathbb{H}$ —el «cos no commutatiu» dels quaternions—, el *teorema de Pappos* és fals.[5]

[5] En aquesta configuració es veu clara la distinció entre «ser realitzable a $P_n(k)$» i «ser un teorema a $P_n(k)$»: si k no és commutatiu, podrem trobar punts A, B, C, A', B', C' de manera que els punts P, Q, R no estiguin alineats però sí que podem incloure la configuració de Pappos a $P_n(k)$ escollint els punts B i C de manera que $ab = ba$.

14. La configuració de Desargues i el teorema de coordinació



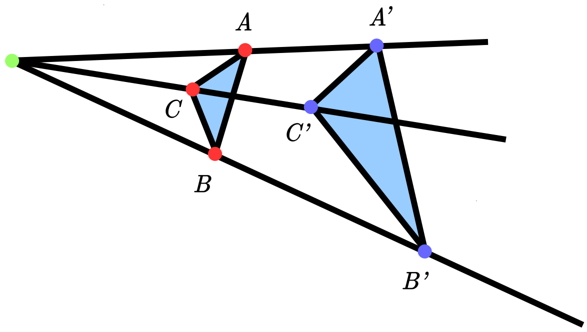
L'any 1648 Abraham Bosse, deixeble del matemàtic francès Girard Desargues (1591–1661), va publicar un tractat de perspectiva titulat *Maniere Universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le Geometral*,[1] al final del

[1] És interessant analitzar una mica el gravat que hi ha a l'inici del llibre. Hi apareixen dues figures femenines. La de l'esquerra —que es veu clarament que té una posició de preeminència— representa la *geometria* i es recolza en una sòlida columna. A la mà dreta hi duu el compàs i al seu costat hi ha el regle i l'escaire i també una quadrícula cartesiana. Mira amb atenció —i una certa condescendència— el dibuix que li mostra la figura de la dreta. Aquesta segona figura podríem dir que representa la teoria de la perspectiva i es recolza clarament en la geometria mentre li mostra, com una deixebla a la seva mestra, els seus resultats sobre la perspectiva.

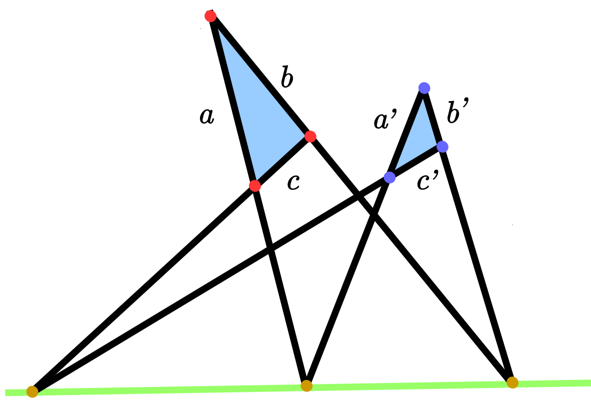
qual va incloure un curiós teorema de geometria lineal. Va ser Hilbert qui va adonar-se que aquest *teorema de Desargues* —juntament amb el teorema de Pappos, íntimament relacionats—- era la pedra angular de la *coordinació* —és a dir, la introducció de coordenades— de la geometria.

Per tal d'explicar el contingut del teorema de Desargues, comencem introduint dos conceptes de **triangles en perspectiva**. Suposem que tenim dos triangles i que hem donat noms A, B, C i A', B', C' als seus vèrtex i noms a, b, c i a', b', c' als seus costats, de manera que el costat a sigui oposat al vèrtex A, etc. No cal que els triangles estiguin en un mateix pla.

- Direm que els dos triangles estan en **perspectiva respecte d'un punt** si les rectes AA', BB' i CC' són concurrents.



- Direm que els dos triangles estan en **perspectiva respecte d'una recta** si els punts $a \cap a'$, $b \cap b'$ i $c \cap c'$ estan alineats.

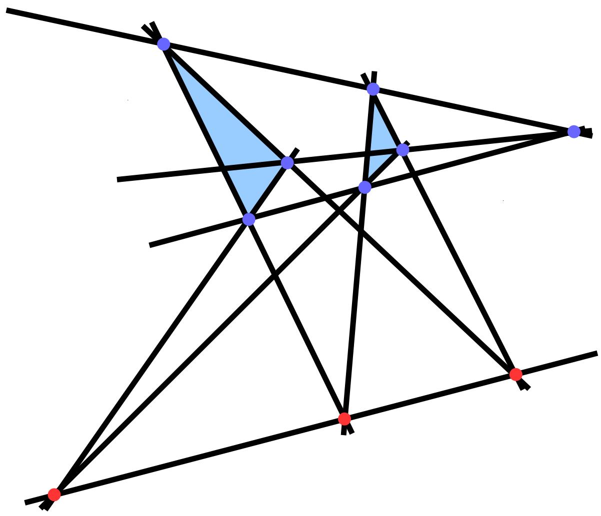


Observem que, si estem en un pla projectiu, aquests dos conceptes són duals un de l'altre. En el primer cas, parlarem del *centre de perspectiva* i en el segon cas parlarem de l'*eix de perspectiva*. Per exemple, al dibuix original del llibre de Bosse els triangles bEf i aDg estan en perspectiva respecte del punt c i també estan en perspectiva respecte de la recta HIK. Això no és cap coincidència perquè el teorema de Desargues afirma:

> *Si dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt, també estan en perspectiva respecte d'una recta.*[2]

També podem entendre aquest teorema en el context de les **configuracions** que hem introduït en el capítol anterior. La **configuració de Desargues** és una configuració de 10 punts i 10 rectes que es pot definir de diverses maneres:

- És la configuració descrita per aquest esquema gràfic (l'ombrejat dels triangles i els colors dels punts només tenen un caràcter mnemotècnic):



- És la configuració que té com a punts tots els subconjunts de dos elements del conjunt $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, té com a rectes tots els subconjunts de tres elements de S i té com a relació d'incidència la pertinença. La comprovació que aquesta configuració és la mateixa de l'apartat anterior és trivial.

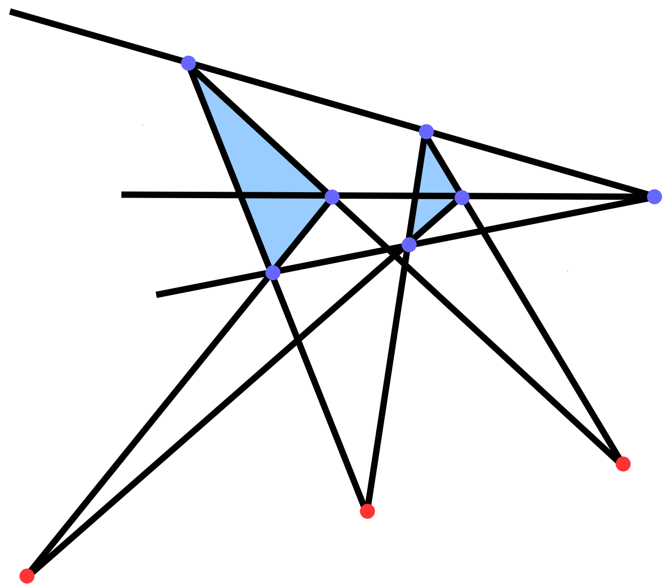
- És la configuració formada per dos triangles que estan simultàniament en perspectiva respecte d'un punt i en perspectiva respecte d'una recta.

[2]És molt fàcil veure que el teorema de Desargues implica el seu recíproc. En conclusió, podem afirmar que *dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt si i només si ho estan respecte d'una recta*.

La segona definició té l'avantatge que ens permet veure que la configuració de Desargues és autodual i regular. En efecte, qualsevol permutació del conjunt $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dóna un automorfisme de la configuració i, per tant, la configuració és regular. D'altra banda, hi ha una correspondència bijectiva entre els subconjunts de dos elements i els subconjunts de tres elements de S que inverteix les inclusions i això ens diu que la configuració és autodual.

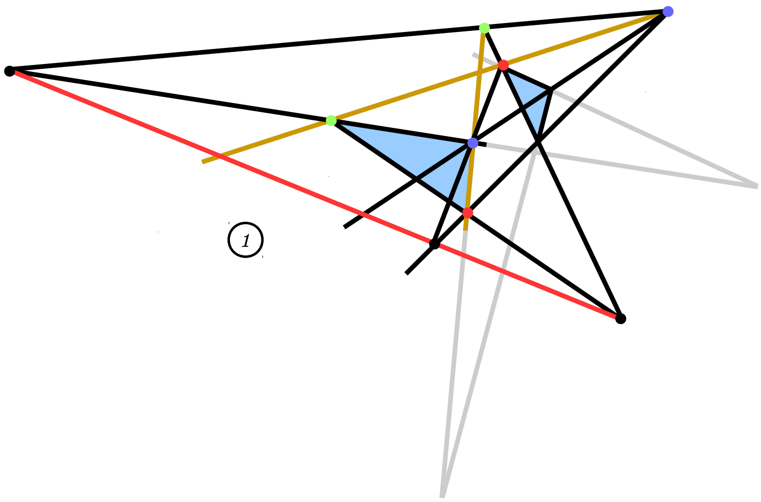
Volem demostrar ara el teorema de Desargues o, més en general, volem determinar a quins espais projectius $P_n(k)$ la configuració de Desargues és un teorema. El resultat és aquest:

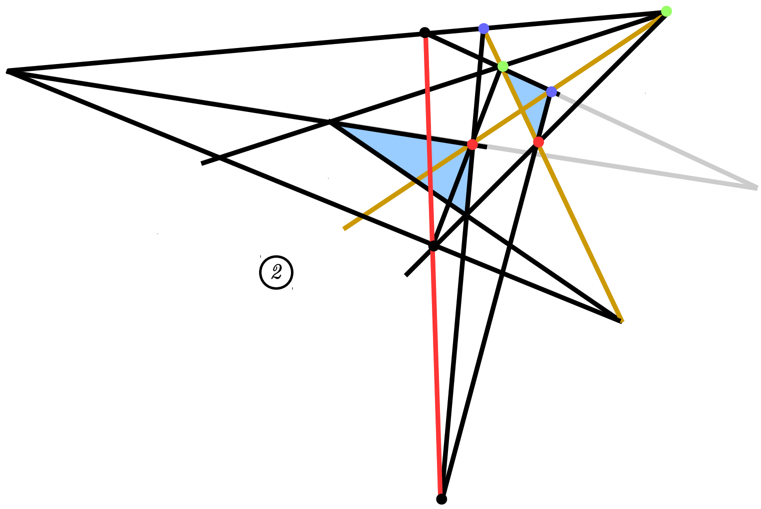
> *La configuració de Desargues és un teorema a tots els espais projectius $P_n(k)$ (fins i tot si k és un anell de divisió).*

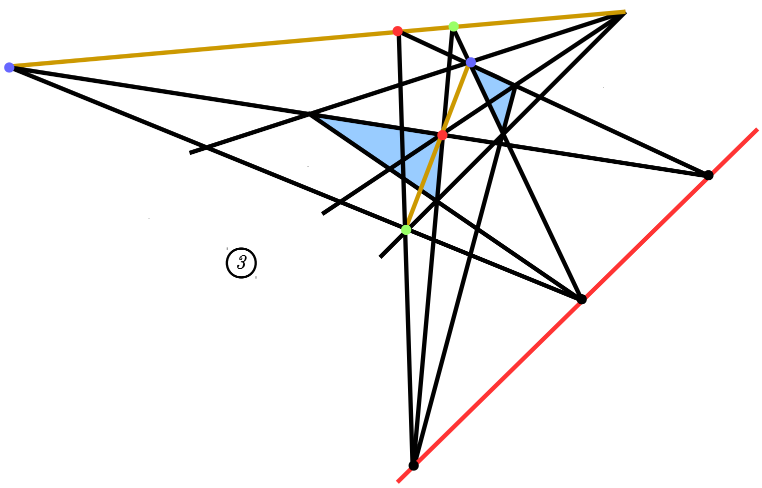


Per motius que quedaran clars més endavant, donarem **tres** demostracions d'aquest teorema. Com que la configuració és regular i autodual, n'hi ha prou amb demostrar que els tres punts vermells estan alineats.

[**Primera demostració: aplicant Pappos**] Hi ha una manera enginyosa de demostrar el teorema de Desargues aplicant tres vegades el teorema de Pappos. En cada pas apliquem el teorema de Pappos a les dues rectes de color groc fosc del dibuix següent i deduïm l'existència de la recta de color vermell.

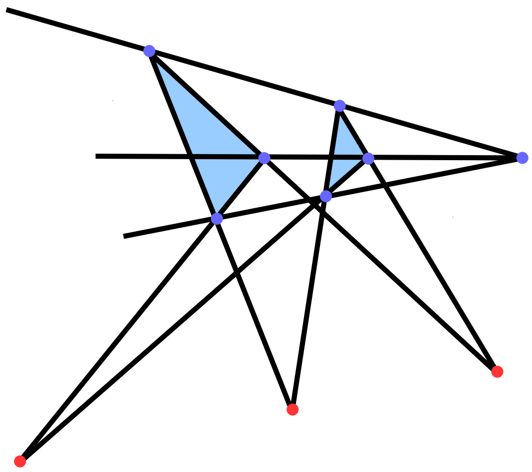

1


2


3

Aquesta demostració té només dos petits problemes. En primer lloc, només és vàlida en el pla. Observem que, al contrari del que passa amb la configuració de Pappos, la configuració de Desargues pot ser no plana: n'hi ha prou que els dos triangles inicials no estiguin en un mateix pla. En aquest cas, el teorema de Desargues segueix essent cert, però no es pot demostrar amb Pappos perquè la configuració de Pappos sí que està sempre continguda en un pla. En segon lloc, pel teorema que hem vist al capítol anterior, només podem aplicar Pappos si som a $P_2(k)$ quan k és un cos i, per tant, no cobrim el cas general d'un espai projectiu sobre un anell de divisió.

[**Segona demostració: utilitzant la tercera dimensió**] Si suposem que els dos triangles **no** estan en un mateix pla, la demostració del teorema de Desargues és trivial! Vegem-ho.

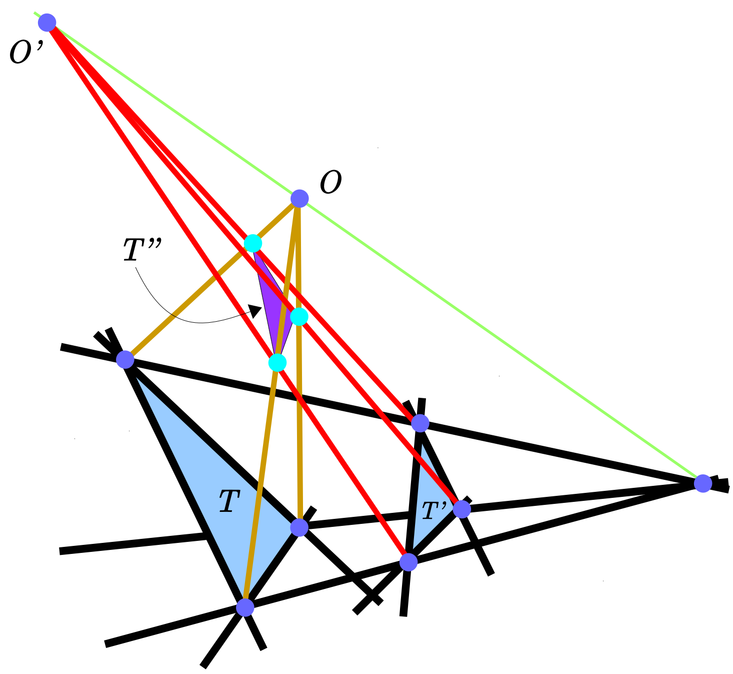


Comencem observant que aquesta configuració sempre està continguda en una subvarietat de dimensió 3 (i que els punts de color vermell existeixen necessàriament com a conseqüència de l'axioma projectiu). Aleshores, si els dos triangles estan en plans diferents, el punts de color vermell estan a la intersecció d'aquests dos plans. Per la fórmula de Grassmann, la intersecció de dos plans diferents de $P_3(k)$ és una recta i... *equiliquà!* Els tres punts estan alineats. Absolutament trivial, sense utilitzar ni coordenades ni res més que no siguin les propietats geomètriques que es dedueixen dels tres axiomes de la geometria projectiva![3]

[3]Sí que estem utilitzant la fórmula de Grassmann que només hem demostrat a $P_n(k)$ i no pas a un espai projectiu axiomàtic general. Aquest problema no és greu perquè és possible (i no gaire difícil) desenvolupar una teoria de la dimensió per a espais projectius axiomàtics i demostrar que la fórmula de Grassmann també és vàlida en general.

Per tant, la part no trivial del teorema de Desargues és demostrar-lo en el pla. Suposem, doncs, que els dos triangles estan en un mateix pla i, en conseqüència, tota la configuració (sense l'eix de perspectiva) està continguda en un pla.

Agafem ara **un punt O que estigui fora d'aquest pla** i l'unim amb cada vèrtex del primer triangle T. Escollim un nou punt O' alineat amb O i amb el centre de perspectiva dels triangles. Unim O' amb cada vèrtex del segon triangle T'. Fent intersecció d'aquestes rectes que hem dibuixat (els punts d'intersecció existeixen per l'axioma projectiu), trobarem un tercer triangle T'' que tindrà aquestes propietats:



1. T'' està en perspectiva amb T respecte de O.
2. T'' està en perspectiva amb T' respecte de O'.
3. T'' està en un pla diferent del pla on són T i T'
4. Tota la configuració que tenim ara està continguda en una subvarietat de dimensió tres.

Per tant, podem aplicar el trivial cas tridimensional del teorema de Desargues als triangles T i T'' i també als triangles T' i T''. La conclusió és que

T i T' estan en perspectiva respecte d'una recta i hem demostrat el teorema de Desargues.

Aquesta demostració té dues característiques molt interessants:

- Només utilitza els conceptes fonamentals d'incidència i, per tant, és vàlida a qualsevol geometria projectiva axiomàtica, no només a $P_n(k)$.[4]
- Utilitza la tercera dimensió. Observem que, encara que només vulguem demostrar el teorema en un pla projectiu, necessitem utilitzar punts fora del pla. El teorema queda demostrat a $P_n(k)$, per $n \geq 3$ i també a qualsevol geometria projectiva axiomàtica de dimensió ≥ 3. En el cas d'un pla projectiu, com que $P_2(k) \subset P_3(k)$, el teorema també està demostrat per a $P_2(k)$. Finalment, si X és un pla projectiu axiomàtic que pugui incloure's com a subvarietat en un espai projectiu axiomàtic de dimensió 3, el teorema també serà cert a X.

En resum:

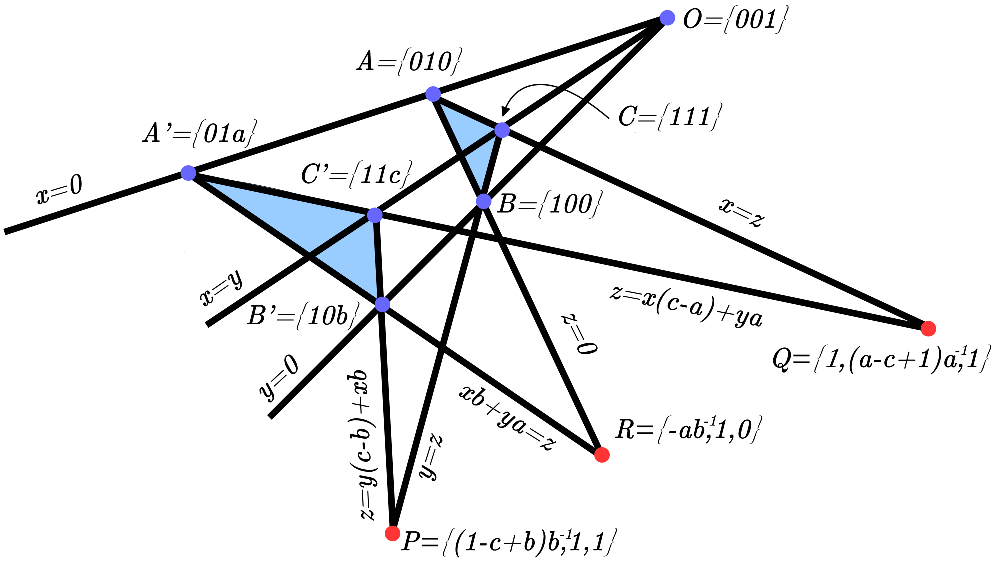
> *El teorema de Desargues és vàlid a qualsevol espai projectiu axiomàtic de dimensió ≥ 3 i, més en general, a qualsevol espai projectiu axiomàtic que sigui subvarietat d'un espai projectiu axiomàtic de dimensió ≥ 3. En particular, és vàlid a $P_n(k)$ per tot anell de divisió k i tot $n \geq 2$.*

Com a conseqüència, els únics espais projectius axiomàtics on podria fallar el teorema de Desargues són els plans projectius axiomàtics. L'exercici **I**.60 ens diu que, efectivament, hi ha plans projectius on no es compleix el teorema de Desargues: s'anomenen **plans no desarguesians**. Necessàriament, un pla no desarguesià no pot ser isomorf a cap $P_2(k)$ ni tampoc es pot incloure a cap espai projectiu de dimensió 3.

[**Tercera demostració: a** $P_2(k)$] Si volem demostrar el teorema de Desargues a un pla projectiu $P_2(k)$ sense recórrer a la tercera dimensió, ja hem vist que no podrem evitar haver d'utilitzar coordenades. La demostració és relativament senzilla i s'assembla a la demostració del teorema de Pappos amb coordenades que vam fer al capítol anterior: es tracta de prendre un sistema de referència, calcular les coordenades dels punts P, Q, R on es tallen els costats respectius dels dos triangles i veure que estan alineats. Per tal que la demostració sigui també vàlida sobre un anell de divisió que

[4] Vegeu també la nota 3.

no sigui cos, evitem aplicar la propietat commutativa de la multiplicació. Observem que la recta $xb + ya + z(c - b - a - 1) = 0$ passa per P, Q, R.



El teorema de coordinació

Hem vist que el teorema de Desargues es compleix sempre als espais projectius $P_n(k)$ però pot fallar en alguns plans projectius axiomàtics. En particular, la validesa del teorema de Desargues és una condició necessària perquè un espai projectiu axiomàtic X pugui ser isomorf a un espai projectiu $P_n(k)$ per algun anell de divisió k. És a dir, és una condició necessària perquè puguem introduir **coordenades** a X. Recordem que un espai projectiu axiomàtic és un concepte geomètric basat únicament en tres axiomes senzills, mentre que $P_n(k)$ és un concepte que neix al món de l'àlgebra i que involucra la teoria de cossos i la teoria d'espais vectorials.

El **teorema de coordinació** —que no podem demostrar aquí— afirma que la validesa del teorema de Desargues és suficient per poder afirmar que un espai projectiu axiomàtic X és isomorf a algun $P_n(k)$.

> *Sigui X un espai projectiu axiomàtic de dimensió finita $n > 1$ on es verifiqui el teorema de Pappos. Existeix un cos k i un isomorfisme $X \cong P_n(k)$. Si no es verifica el teorema de Pappos però sí que es verifica el teorema de Desargues, també tenim $X \cong P_n(k)$ per algun anell de divisió k.*

Ja es veu que aquest teorema té una importància conceptual enorme: podríem dir, d'alguna manera, que justifica el pas de la geometria a l'àlgebra.

Si iniciem el nostre estudi de la geometria només amb els conceptes de punt i recta, si acceptem tres axiomes elementals —les rectes tenen com a mínim tres punts, per dos punts hi passa una única recta, si dos costats d'un quadrilàter es tallen, també es tallen els altres dos costats— i si, finalment, es verifica la configuració de Desargues, aleshores aquesta geometria que estem estudiant és la geometria $\mathcal{P}(V)$ que neix a un espai vectorial V sobre un anell de divisió k, els seus punts vénen determinats per coordenades homogènies a valors a k i les seves rectes vénen donades per equacions amb coeficients a k. Si la dimensió és ≥ 3, ni tan sols cal exigir la configuració de Desargues. Si es compleix Pappos, k és un cos.

15. El teorema fonamental i la raó doble

Hem vist que els espais projectius $P_n(k)$ són exemples d'espais projectius axiomàtics de dimensió finita. El teorema de coordinació afirma que, exceptuant els plans projectius no desarguesians, són els *únics* exemples. D'altra banda, si $\phi : V \to W$ és un isomorfisme semilineal entre dos espais vectorials de dimensió finita, aleshores l'homografia $\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ és un exemple de *col·lineació*. El teorema que estudiarem ara afirma que, en dimensió > 1, aquestes col·lineacions $\mathcal{P}(\phi)$ són els únics exemples possibles. Aquest teorema es coneix tradicionalment com a **teorema fonamental de la geometria projectiva** però alguns autors prefereixen dir-ne, d'una manera més descriptiva, **teorema de representació** perquè, efectivament, ens diu que tota col·lineació pot *representar-se* per una aplicació semi-lineal.

> *[T. de representació] Sigui $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ una col·lineació entre espais projectius de dimensió finita > 1. Aleshores, existeix un isomorfisme semilineal $\phi : V \to W$ tal que $f = \mathcal{P}(\phi)$.*

Si el teorema de coordinació ens porta dels punts i les rectes als espais vectorials i a les coordenades, aquest «teorema de representació» ens porta de les col·lineacions —aplicacions bijectives que conserven les rectes— a les aplicacions lineals i a les matrius.

La demostració d'aquest teorema és massa llarga per poder-la incloure aquí. Fem aquestes observacions:

- La restricció a dimensió > 1 és clarament necessària perquè *qualsevol* bijecció $f : P_1(k) \to P_1(k)$ és una col·lineació, però no tota bijecció procedeix d'una aplicació semilineal. Discutirem amb més profunditat aquest problema més endavant.
- Considerem el cas d'una col·lineació $f : P_n(k) \to P_n(k)$ on k és un cos que —com passa amb $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{F}_p$— no té cap automorfisme diferent de la identitat. El teorema fonamental ens diu que f ha de ser una

homografia i, per tant, es pot descriure per una matriu invertible de mida $(n+1) \times (n+1)$.

- En la situació anterior, la matriu que representa f no és única perquè és clar que si $\lambda \neq 0$ és un escalar, aleshores les col·lineacions $\mathcal{P}(\phi)$ i $\mathcal{P}(\lambda\phi)$ són la mateixa. Aquest és l'únic problema possible: dues matrius donen lloc a la mateixa col·lineació si i només si difereixen en un escalar no nul (exercici **II**.5).

- Les col·lineacions $f : P_n(k) \to P_n(k)$ on k és un cos sense automorfismes no trivials formen un grup amb l'operació de composició. En direm el **grup projectiu** $PGL_{n+1}(k)$. El teorema fonamental ens diu que aquest grup és igual al quocient del grup lineal $GL_{n+1}(k)$ pel subgrup normal de les matrius escalars.[1]

$$PGL_{n+1}(k) \cong GL_{n+1}(k)\big/k^*.$$

La raó doble

Siguin $A, B, C, D \in \mathcal{P}(V)$ quatre punts alineats en un espai projectiu i suposem que A, B, C són diferents. Podem associar a aquests quatre punts un escalar (A, B, C, D) que té propietats interessants i que pot definir-se d'aquestes dues maneres equivalents:

1. Sigui $A = [\vec{v}_1]$, $B = [\vec{v}_2]$, $C = [\vec{v}_3]$, $D = [\vec{v}_4]$, amb la qual cosa $L = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ serà la recta que conté els quatre punts. Escrivim

$$\vec{v}_3 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$$
$$\vec{v}_4 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$$

   Aleshores, definim
$$(A, B, C, D) := \frac{\lambda_2\, \mu_1}{\lambda_1\, \mu_2}.$$
   Observem que això està ben definit, és a dir, no depèn dels representants escollits per als punts A, B, C, D. Si $D = A$ (i només en aquest cas), el denominador de la fracció anterior seria 0. Aleshores, posem $(A, B, C, D) = \infty$.

2. La recta que conté els quatre punts A, B, C, D és un espai projectiu de dimensió 1 i A, B, C formen una referència projectiva. Respecte

[1] Les *matrius escalars* són les matrius diagonals amb tots els elements de la diagonal iguals. Aquest subgrup és isomorf al grup multiplicatiu del cos base.

d'aquesta referència projectiva, el punt D té unes coordenades homogènies $D = \{a, b\}$. Definim

$$(A, B, C, D) := \frac{a}{b} \in k \cup \{\infty\}.$$

Entre les propietats de la raó doble volem fer esment d'aquestes:

- $(A, B, C, A) = \infty$, $(A, B, C, B) = 0$, $(A, B, C, C) = 1$.
- $(A, B, C, -)$ dóna una bijecció entre els punts de la recta AB i el conjunt $k \cup \{\infty\}$. En el cas particular que $(A, B, C, D) = -1$ es diu que els punts A, B, C, D formen una **quaterna harmònica**.
- Si σ és una permutació qualsevol dels punts A, B, C, D, la raó doble $\rho = (A, B, C, D)$ determina la raó doble $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D))$. Per exemple, tenim aquestes fórmules:

  $$(A, B, D, C) = \rho^{-1}; \ (A, C, B, D) = 1 - \rho; \ (A, D, B, C) = 1 - \rho^{-1}; \ \text{etc.}$$

- L'origen del nom «raó doble» s'entén millor si considerem que, en un cert sistema de referència, els punts tenen coordenades $A = \{1, a\}$, $B = \{1, b\}$, $C = \{1, c\}$, $D = \{1, d\}$. En aquesta situació, un càlcul senzill ens diu que la raó doble (A, B, C, D) val

  $$(A, B, C, D) = \frac{(b - d)/(b - c)}{(a - d)/(a - c)}.$$

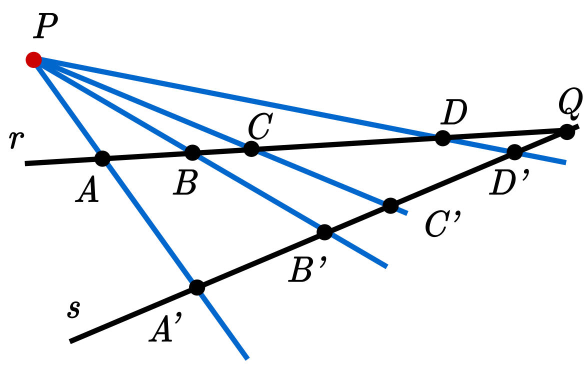
  És a dir, si pensem els punts A, B, C, D com elements del cos base k, podem entendre la raó doble com una raó entre les raons de les «distàncies» entre aquests punts:

  $$|(A, B, C, D)| = \frac{|BD|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|AC|}.$$

- Si un dels punts està «infinitament lluny» dels altres tres, la raó doble es converteix en una *«raó simple»*. Més concretament, si en un cert sistema de referència tenim $A = \{1, a\}$, $B = \{1, b\}$, $C = \{1, c\}$, $D = \{0, 1\}$, aleshores

  $$|(A, B, C, D)| = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

- Pel *principi de dualitat*, aquest concepte de raó doble de quatre punts alineats ha de tenir un concepte dual que serà el de *raó doble de quatre rectes concurrents* en un pla projectiu. Aquest concepte es pot definir així: siguin a, b, c, d quatre rectes d'un pla concurrents en un punt P; suposem que a, b, c són diferents; escollim una recta r que no passi per P i siguin $A := a \cap r$, $B := b \cap r$, $C := c \cap r$, $D := d \cap r$; definim
$$(a, b, c, d) := (A, B, C, D) \in k \cup \{\infty\}.$$
Cal veure que està ben definit, és a dir, que no depèn de la recta r que haguem escollit. Suposem que escollim una altra recta s que ens dóna els quatre punts A', B', C', D'. Cal veure que $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.



Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que A, Q, P, B' és un sistema de referència, on Q és el punt on es tallen les rectes r i s. En aquest sistema de referència tenim
$$A = \{1, 0, 0\},\ B = \{1, 1, 0\},\ C = \{a, 1, 0\},\ D = \{b, c, 0\},$$
$$A' = \{1, 0, 1\},\ B' = \{1, 1, 1\},\ C' = \{a, 1, a\},\ D' = \{b, c, b\}$$
per uns certs a, b, c amb $a \neq 1$. Aplicant la definició de la raó doble obtenim
$$(A, B, C, D) = \frac{b - c}{c(a - 1)} = (A', B', C', D').$$

- **És un invariant projectiu**. Expliquem què volem dir amb això. Suposem que tenim dues rectes concurrents L_1, L_2 dins d'un espai projectiu de dimensió ≥ 2. Suposem que des d'un punt P, exterior a L_1 i L_2 —el «centre de perspectiva»—, *projectem* la recta L_1 sobre l'altra recta L_2. Tenim una aplicació $f : L_1 \to L_2$ tal que $f(A)$ és el punt $L_2 \cap PA$. Direm que f és una **perspectivitat**. La composició de perspectivitats

$L_1 \to L_2 \to \cdots \to L_k$ (els centres de perspectiva poden anar variant) direm que és una **projectivitat**.

> *Si $f : L_1 \to L_2$ és una projectivitat, aleshores, f conserva la raó doble: $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (A, B, C, D)$.*

Evidentment, per demostrar aquest teorema n'hi ha prou amb veure que una perspectivitat conserva la raó doble i la demostració d'això és exactament el càlcul que hem fet a l'ítem anterior.

Si, com hem fet abans, pensem la raó doble com una raó entre les raons de les respectives distàncies, podrem entendre millor això que acabem de dir. Una projecció pot alterar les distàncies entre dos punts, pot alterar raó entre les distàncies d'un punt a dos altres punts però, en canvi, no altera la raó entre les raons de les distàncies entre quatre punts: la «raó doble».

Aquesta propietat de la raó doble d'invariància per projecció és la base de la *fotogrametria*, la tècnica de mesurar distàncies a partir d'una fotografia de l'objecte a mesurar. Ho estudiarem amb més detall en un capítol posterior.

- **Caracteritza les projectivitats**. Volem dir que si tenim dues rectes L_1 i L_2 en un espai projectiu de dimensió ≥ 2, i una aplicació bijectiva $f : L_1 \to L_2$ que conserva la raó doble, aleshores f és una projectivitat, és a dir, es pot expressar com a composició de perspectivitats. (Vegeu l'exercici **II**.39.)

- **Permet generalitzar el teorema fonamental a dimensió 1**. Ja hem dit que el teorema fonamental no pot ser vàlid en dimensió 1, perquè tota bijecció entre dues rectes és una col·lineació. Això deixa oberta la pregunta de quines aplicacions $f : P_1(k) \to P_1(k)$ són projectivització d'una aplicació semilineal. La resposta és aquesta:

  > *Sigui V un espai vectorial de dimensió 2 i sigui $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ una bijecció. Existeix una aplicació lineal $\phi : V \to V$ tal que $f = \mathcal{P}(\phi)$ si i només si f conserva la raó doble.*

  La demostració d'aquest resultat és senzilla.[2] (Exercici **II**.30.)

[2]Aquest teorema no respon exactament la pregunta que hem formulat, que demanava caracteritzar les projectivitzacions de les aplicacions *semilineals* i no pas les de les aplicacions *lineals*. Les projectivitzacions de les aplicacions semilineals són les bijeccions que conserven les quaternes harmòniques. S'anomenen *aplicacions de von Staudt*. Vegeu l'exercici **II**.43.

16. Coordenades de Plücker i geometria epipolar

La geometria projectiva és una eina molt útil en diverses àrees de la visió per ordinador, la robòtica i la fotogrametria. Reproducció d'objectes 3D, mesures a partir de fotografies, realitat virtual, creació d'imatges fotorealistes, codificació dels moviments d'un robot, són alguns dels camps on les eines centenàries de la geometria poden ser perfectament adients. En aquest capítol estudiarem alguns conceptes que, més enllà del seu interès teòric, formen part de la «caixa d'eines» de la tecnologia que s'ha anat desenvolupant en aquestes àrees que viuen un creixement tan accelerat.

Coordenades de Plücker

No cal insistir en la utilitat de les *coordenades*: si diem que considerem el punt $P = \{1, -1, 3, -4\}$ estem utilitzant una manera unívoca de determinar un punt de l'espai 3D, i és una determinació que es pot emmagatzemar en un ordinador de manera elemental. La pregunta és: podríem fer el mateix amb les rectes de l'espai tridimensional? Podem determinar una recta donant, per exemple, dos punts pels quals passi —és a dir, 8 paràmetres— o dos plans que la continguin, però parelles diferents de punts o de plans poden determinar la mateixa recta. Fóra molt interessant tenir *coordenades* per a les rectes i poder parlar, per exemple, de la recta $\{1, 0, 1, 2, -3, -2\}$ i emmagatzemar-la en un ordinador d'aquesta manera tan compacta. És possible? Quants paràmetres calen? Les **coordenades de Plücker**[1] donen resposta a aquestes preguntes.[2]

Comencem, doncs, amb un espai tridimensional $P_3(k)$ i una recta r d'aquest espai. Siguin A, B dos punts diferents d'aquesta recta, amb coordenades homogènies $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$. És clar que A i

[1] Julius Plücker va ser un matemàtic i físic alemany del segle XIX. Va definir les coordenades que estudiem aquí en un treball del 1865.

[2] La resposta a aquestes preguntes no té només un interès pràctic. També pot entendre's com la primera aproximació a l'estudi de les *varietats de Grassmann* i fins i tot, en un sentit més general, a l'estudi dels *espais de moduli*.

B determinen r, però moltes parelles de punts A, B donen la mateixa recta. Considerem aquesta matriu

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

i considerem els seus menors 2×2. N'hi ha essencialment 6, que designem $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$:

$$p_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_{02} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad p_{03} = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad p_{31} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Aleshores:

> *Les coordenades homogènies* $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$ *no depenen dels punts A i B que hem escollit sobre la recta r. Dues rectes són iguals si i només si tenen les mateixes coordenades.*[3]

Aquestes coordenades $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$ s'anomenen *coordenades de Plücker* de r. Estudiem les propietats d'aquestes coordenades.

- Estan ben definides. En efecte, suposem que $A' = \{a'_0, a'_1, a'_2, a'_3\}$ i $B' = \{b'_0, b'_1, b'_2, b'_3\}$ són dos punts diferents de la mateixa recta r. Això vol dir que entre els vectors $(a'_0, a'_1, a'_2, a'_3), (b'_0, b'_1, b'_2, b'_3)$ i els vectors $(a_0, a_1, a_2, a_3), (b_0, b_1, b_2, b_3)$ hi ha un canvi de base donat per una matriu invertible 2×2 M. Per tant, els menors que donen les coordenades de Plücker diferiran en l'escalar $\det(M) \neq 0$. En conseqüència, les coordenades de Plücker són les mateixes —perquè hem dit que són coordenades *homogènies*. També observem que les coordenades de Plücker no poden ser totes zero perquè aleshores els dos vectors que defineixen A i B serien linealment dependents i $A = B$.
- Si dues rectes r i r' tenen les mateixes coordenades de Plücker, aleshores $r = r'$. Observem que els punts de la recta que passa per A i B

[3] Si podem escriure les coordenades dels dos punts de manera que $a_0 = b_0 = 1$, la fórmula de les cordenades de Plücker adquireix una forma (la «forma afí») més fàcil de recordar i que també ens dóna una idea heurística de l'origen d'aquestes coordenades. Si $\overrightarrow{x} = (a_1, a_2, a_3)$ és un punt de la recta i $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ és un vector director, aleshores les coordenades de Plücker de la recta són $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{v}\}$.

són els punts $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ tals que la matriu

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

té rang 2. Igualant a zero els menors 3×3 i desenvolupant per la fila de les x's obtenim un sistema lineal homogeni amb matriu (de rang 2)

$$\begin{pmatrix} p_{12} & -p_{02} & p_{01} & 0 \\ -p_{31} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ p_{23} & 0 & -p_{03} & p_{02} \\ 0 & p_{23} & p_{31} & p_{12} \end{pmatrix}.$$

La solució d'aquest sistema són els punts de la recta i aquest sistema només depèn de les coordenades de Plücker. Per tant, si dues rectes tenen les mateixes coordenades de Plücker han de ser la mateixa recta.

- Les coordenades de Plücker associen a cada recta de $P_3(k)$ 6 coordenades homogènies, és a dir, un *punt* de l'espai projectiu $P_5(k)$. Tenim, doncs, una *inclusió*

$$\{\text{rectes de } P_3(k)\} \longrightarrow P_5(k).$$ [4]

Aquesta inclusió —coneguda com a *aplicació de Plücker*— no és exhaustiva perquè hi ha punts de $P_5(k)$ que no són les coordenades de Plücker de cap recta. És interessant descriure la imatge de l'aplicació anterior. Considerem la igualtat trivial

$$0 = a_0 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Si ara desenvolupem el primer determinant per l'última columna i el segon determinant per la primera columna obtenim l'equació[5]

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$$

que han de complir necessàriament les coordenades de Plücker d'una recta. És una equació de segon grau que determina una quàdrica[6] de $P_5(k)$. Es pot demostrar que aquesta quàdrica —que es coneix com a *«quàdrica de Klein»*— és realment la imatge de l'aplicació de Plücker.

[4] El conjunt de les rectes de $P_3(k)$ és el mateix que el conjunt dels subespais de dimensió 2 de k^4. Aquest conjunt es designa $G_{2,4}$ i s'anomena *la varietat de Grassmann* 2,4.

[5] Aquesta equació és fàcil de recordar perquè ens diu que el producte escalar de les tres primeres coordenades per les tres últimes coordenades és zero.

[6] Estudiarem les quàdriques a la part final d'aquests apunts.

Mesures sobre una fotografia

Essencialment, una fotografia del món real és la projecció d'aquest món real 3D sobre un pla —el pla on hi ha el sensor fotogràfic— des d'un punt exterior al pla —el centre òptic de l'objectiu fotogràfic. Aquesta projecció altera les longituds, el paral·lelisme, els angles, però sabem que no ha d'alterar la raó doble de quatre punts alineats qualsevol i aquest fet ens permet, en alguns casos, mesurar distàncies en el món real a partir de les distàncies que podem mesurar a la fotografia. En aquest apartat volem donar unes primeres idees bàsiques de com funciona tot això.

- En primer lloc, encara que imaginem el «món real» que estem fotografiant com un espai afí $\mathbb{R}^3$, a la fotografia hi apareixeran punts que no es corresponen amb cap punt de $\mathbb{R}^3$ (els «punts de fuga»). Per tant, és natural i imprescindible pensar el món real com l'espai projectiu $P_3(\mathbb{R})$.

- Situem, doncs, un objectiu fotogràfic en un punt $O \in P_3(\mathbb{R})$ i un sensor fotogràfic en un pla $\Pi \cong P_2(\mathbb{R})$ que no passa per O. Cada punt $A \in P_3(\mathbb{R}) - \{O\}$, per projecció central des de O, donarà un punt imatge $i(A) \in \Pi$. Sabem que aquesta aplicació
$$i : P_3(\mathbb{R}) - \{O\} \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$$
transforma rectes en rectes i conserva la raó doble.[7]

- Per poder mesurar distàncies sobre una fotografia necessitem que els objectes fotografiats tinguin una certa estructura geomètrica: hi hem de poder reconèixer rectes i plans i també hem de saber que alguns d'aquests objectes són paral·lels al món real (és a dir, es tallen al «pla de l'infinit» de $P_3(\mathbb{R})$.

Tot això ho entendem més fàcilment si ho desenvolupem a partir d'un exemple concret. Suposem que a la fotografia següent coneixem l'amplada i l'alçada de la taula i volem calcular, per exemple, l'amplada de l'*obi* que hi ha al damunt de la taula i l'alçada del gerro cilíndric de vidre. Procedim d'aquesta manera.

[7] Evidentment, els objectius fotogràfics presenten distorsions òptiques que fan que l'aplicació i no transformi exactament rectes en rectes. De tota manera, si volem utilitzar la fotografia per a mesurar distàncies, podem corregir digitalment aquestes aberracions per aconseguir una imatge que, amb prou aproximació, es pugui considerar que és una perspectivitat.

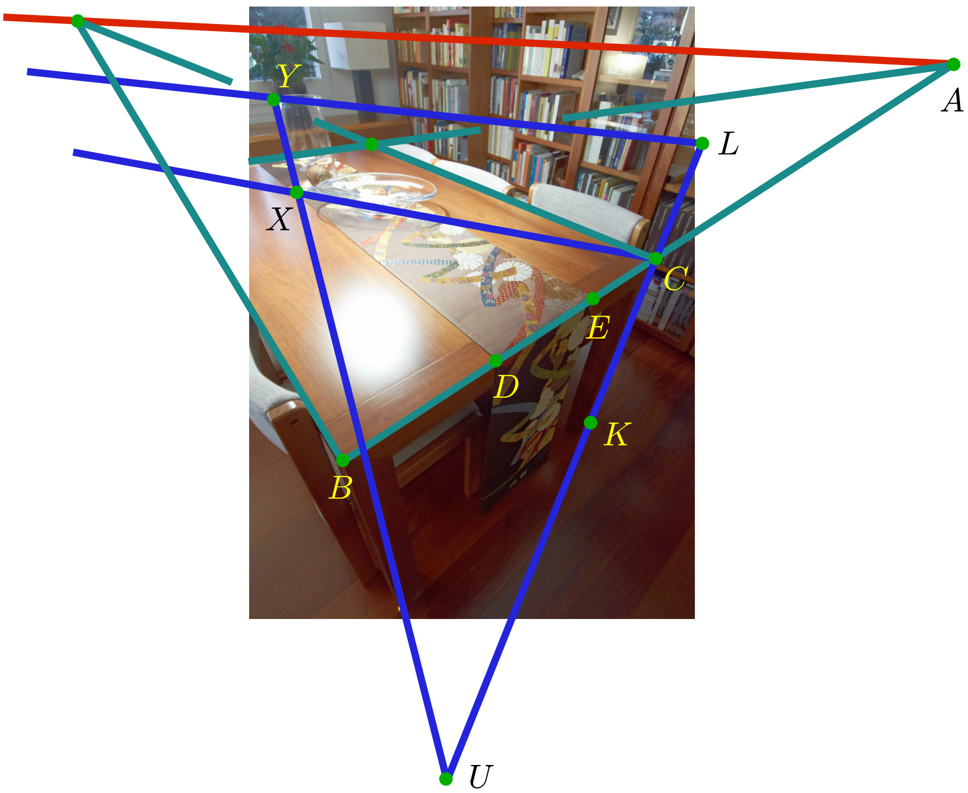
- Prenem el pla de la taula com a «pla de referència». Acceptem que els costats de la taula són línies rectes paral·leles i que també ho són la generatriu del gerro i les arestes de les potes. Aleshores, els punts d'intersecció (a la foto) dels costats paral·lels de la taula ens determinaran la intersecció del pla de referència amb el pla de l'infinit de $P_3(\mathbb{R})$. Sobre la fotografia, tindrem una recta (de color vermell) que serà aquesta intersecció.

- Comencem calculant l'amplada de l'*obi*. Sobre la recta que determina el cantell anterior de la taula hi tenim cinc punts ben determinats: els dos extrems de la taula, els dos extrems de l'obi i el «punt de fuga» d'aquesta recta, és a dir, el punt on la recta talla la recta de l'infinit del pla de referència. Sabem que la raó doble de quatre d'aquests punts serà mateixa a la fotografia (on la podem mesurar) que al món real (on la desconeixem). A la fotografia tindrem[8]

$$|(A, B, C, D)| = \frac{|BD| \cdot |AC|}{|AD| \cdot |BC|} = 0.31958.$$

$$|(A, B, C, E)| = \frac{|BE| \cdot |AC|}{|AE| \cdot |BC|} = 0.65888.$$

D'altra banda, a la realitat, com que el punt A està infinitament lluny, si prenem l'amplada de la taula com a unitat de mesura, tindrem que $|(A, B, C, D)|$ serà la distància (real) entre els punts B i D i $|(A, B, C, E)|$ serà la distància (real) entre els punts B i E. En conclusió, l'amplada de l'obi és 0.3393 vegades l'amplada de la taula. Si la taula fa 90 cm d'amplada, l'obi fa 30.5 cm.



- Mesurem ara l'alçada del gerro de vidre. Dibuixem la recta XY que forma una generatriu del cilindre. Observem que, en contraposició

[8]Aquí hem utilitzat un programa d'edició gràfica per mesurar distàncies (en píxels) a la fotografia.

al que passava abans, ara no tenim cap mesura de referència sobre aquesta recta, perquè la mesura de referència vertical que tenim és KC i està sobre una recta diferent: la que determina el cantell d'una pota de la taula.

Unim la base del gerro X amb la cantonada de la taula C per una recta XC que estarà sobre el pla de referència que hem de recordar que és el pla de la taula. Com que tenim determinada la recta de fuga del pla de referència, podem dibuixar una recta que passi per l'extrem superior del gerro Y i que sigui paral·lela (al món real) a la recta XC. Aquesta recta ens determinarà un punt L sobre la recta KC. L'alçada del gerro serà igual a la distància (en el món real) entre els punts C i L. Hem reduït el problema a una situació com la de l'apartat anterior.

Utilitzant la recta XY —paral·lela, en el món real, a la recta KC— podem determinar el punt de fuga U de la recta KC. Calculem ara la raó doble (U, C, K, L) a la fotografia i al món real. A la fotografia tenim

$$|(U, C, K, L)| = \frac{|CL| \cdot |UK|}{|UL| \cdot |KC|} = 0.3942.$$

Al món real, com que el punt U és infinitament llunyà, aquesta raó doble serà igual a la relació entre l'alçada del gerro i l'alçada de la taula. En conclusió, si l'alçada de la taula és de 77 cm, el gerro té una alçada de 30.4 cm.

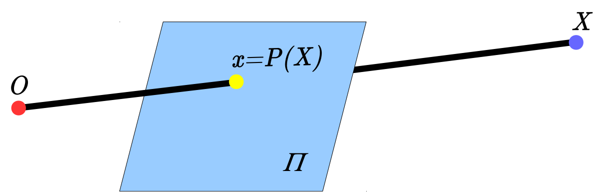
Geometria epipolar

S'anomena *geometria epipolar* l'estudi de les relacions geomètriques entre les imatges d'un mateix objecte obtingudes des de llocs diferents. És un camp d'estudi fonamental a la visió per ordinador, tant per a problemes «directes» —generació d'imatges estereoscòpiques a partir d'un objecte virtual 3D— com en problemes «inversos» —reconstrucció d'objectes 3D a partir de diverses imatges. En aquest apartat introduirem els conceptes bàsics d'aquesta teoria (d'una manera força superficial).

Suposem, doncs, que en un punt de l'espai tridimensional tenim una càmera fotogràfica que projecta els objectes de la realitat sobre un sensor. Ja hem dit abans que és important considerar «la realitat» com l'espai projectiu $P_3(\mathbb{R})$. El sensor fotogràfic estarà en un pla Π de $P_3(\mathbb{R})$, isomorf a $P_2(\mathbb{R})$ i el centre òptic de la càmera estarà en un punt $O \in P_3(\mathbb{R})$, un punt que no pertany al pla Π. La relació geomètrica entre la realitat i la imatge vindrà donada per una projecció

$$P : P_3(\mathbb{R}) - O \longrightarrow \Pi \cong P_2(\mathbb{R}).$$

Podem il·lustrar la situació amb un dibuix com aquest:[9]



L'aplicació P és una homografia singular (vegeu l'exercici **II**.3): si prenem coordenades a $P_3(\mathbb{R})$ i a Π, vindrà donada per una matriu 3×4 de rang 3 que també denotarem per P. Si coneixem aquesta matriu coneixem la relació entre els punts de la realitat X i les seves imatges $x = PX$. La situació de la càmera ve donada per $PO = 0$. Recíprocament, si $x \in \Pi$ és un punt de la fotografia, tots els punts que es projecten sobre x formaran una recta que passa per O i per qualsevol solució del sistema lineal $PX = x$.

Una manera d'expressar $P^{-1}(x)$ és aquesta. Com que la matriu P té rang tres, podem trobar una «inversa per la dreta» de P, és a dir, una matriu $\overline{P}$ tal que $P\overline{P} = I$, on I denota la matriu identitat 3×3.[10] Aleshores, un punt de l'antiimatge de x seria $\overline{P}x$ i l'antiimatge seria la recta que passa per O i $\overline{P}x$.

$$P^{-1}(x) = \{\text{recta per } O \text{ i } \overline{P}x\}.$$

La matriu P conté tota la informació sobre la situació que estem descrivint, incloent la posició de la càmera, donada pel punt O. Com podem calcular aquesta matriu? És una matriu 3×4 i conté, per tant, 12 paràmetres. De fet, P està determinada llevat d'un factor no nul (vegeu l'exercici **II**.4). Per tant, tenim només 11 paràmetres a determinar. Cada parella (x, X) ens dóna un sistema de quatre equacions $Px = X$, però com que les coordenades que utilitzem són homogènies, només rebaixem els graus de llibertat en tres unitats. En conclusió, podem determinar P, en general, si coneixem *quatre* parelles (x, X).

Suposem ara que tenim *dues* càmeres amb centres diferents O i O' que projecten la realitat sobre dos plans Π i Π'. Introduïm aquests conceptes:

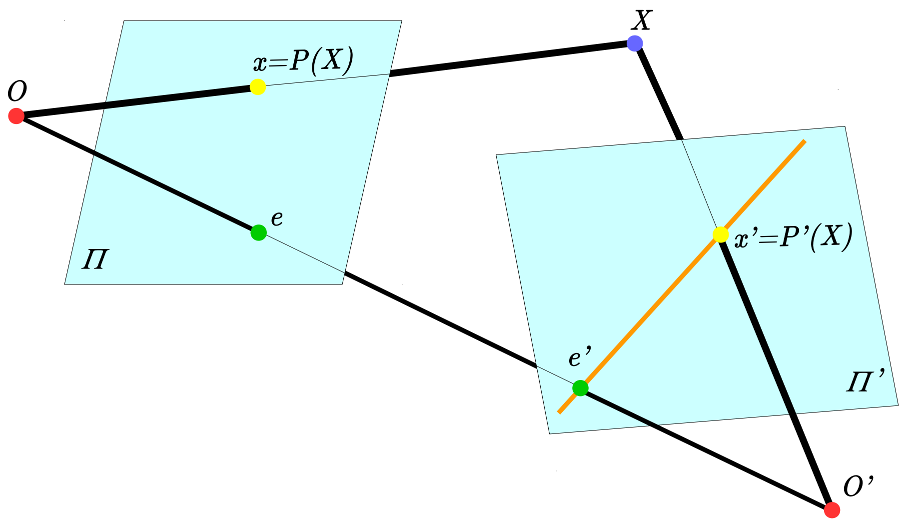
- Un punt $X \neq O$ de la realitat es projectarà sobre un punt $x = PX$ del pla Π i en un punt $x' = P'X$ del pla Π'.

[9] En una càmera, el sensor està darrere el centre òptic però, geomètricament, no hi ha cap diferència entre col·locar-lo darrere o davant.

[10] L'existència d'infinites inverses per la dreta $\overline{P}$ és evident si pensem P com la matriu d'una aplicació lineal exhaustiva $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Un mètode que s'utilitza per trobar una inversa concreta és el de Moore-Penrose $\overline{P} := P^T(PP^T)^{-1}$ (vegeu l'exercici **II**.48).

- La recta OO' tallarà el pla Π en un punt e i el pla Π' en un punt e'. Aquests punts s'anomenen els *epipols* i, evidentment, estan alineats amb els centres òptics de les dues càmeres.

- Els punts O, O', e, e', X, x, x' estan en un mateix pla. Diem que és un *pla epipolar*. Si variem X, tots els plans epipolars contindran la recta OO'.



Volem ara estudiar quina és la relació que podem establir entre x i x'. En primer lloc, és clar que no podem parlar d'una *aplicació* $x \mapsto x'$. En efecte, la recta Ox es projecta sobre la recta $e'x'$ i tots els punts de la recta Ox es projecten sobre el mateix punt $x \in \Pi$. Dit d'una altra manera, tots els punts X de la realitat que la càmera O veu com a punt x de la foto, la càmera O' els veu com a punts de la recta $e'x'$.

En canvi, sí que tenim una aplicació ben definida $x \mapsto e'x'$. És a dir, tenim una aplicació

$$\Phi : \Pi - \{e\} \longrightarrow \{\text{rectes de } \Pi' \text{ que passen per } e'\}\,.$$

Vegem ara que Φ és una homografia singular. En primer lloc, pel principi de dualitat, el conjunt de la dreta és un subconjunt de

$$\{\text{rectes de } \Pi' = P_2(\mathbb{R})\} \cong P_2(\mathbb{R}).$$

Encara més, les rectes d'un pla que passen per un punt formen una *recta projectiva* $P_1(\mathbb{R})$. En definitiva, l'aplicació Φ la podem entendre com

$$\Phi : P_2(\mathbb{R}) - \{e\} \longrightarrow P_1(\mathbb{R}) \subset P_2(\mathbb{R})$$

i té sentit dir que és una homografia singular. Per veure-ho, calculem la matriu de Φ a partir de les matrius P, P'. Això és senzill de fer:

- Comencem amb un punt $x \in \Pi - \{e\}$. Sigui $\overline{P}$ com abans i sigui $X = \overline{P}x$.
- La recta $r := Ox$ hem vist abans que passa pels punts O i $\overline{P}x$.
- Projectem ara r sobre el pla Π' i obtenim la recta r' que es la recta que passa per e' i per $x' = P'X = P'\overline{P}x$. Per tant, si utilitzem la notació de l'exercici **II**.7, podem escriure $r' = [e']_\times P'\overline{P}x$.
- En conclusió, l'aplicació $x \mapsto r'$ ve donada per $r' = [e']_\times P'\overline{P}x$ i és una homografia —possiblement singular— donada per la matriu
$$F := [e']_\times P'\overline{P}.$$

Aquesta matriu F s'anomena la *matriu fonamental* de la geometria epipolar de les dues càmeres que estem considerant i ens descriu la relació entre les imatges que obtenim a Π i a Π'. Observem:

- F és una matriu 3×3 i està determinada llevat d'un factor no nul.
- F té rang 2 i, per tant, Φ és efectivament una homografia singular. En efecte, sabem que la imatge de Φ és una recta projectiva $P_1(\mathbb{R})$.
- Donat $x \in \Pi$, l'única cosa que podem afirmar de x' és que x' pertany a la recta $\Phi(x) = Fx$. És a dir, la relació entre x i x' ve donada per
$$(x')^T F x = 0.$$
- Els epipols e i e' estan determinats per F perquè $Fe = 0$ i $(e')^T F = 0$.
- Com que F és una matriu 3×3 de rang 2, definida llevat d'un factor no nul, té 7 graus de llibertat i la podrem determinar resolent un sistema lineal si coneixem 7 parelles (x, x').[11]

[11] A la pràctica cal prendre un mínim de 8 parelles de punts i aplicar tècniques de càlcul numèric que s'escapen del contingut d'aquest curs. El mètode de càlcul de F que més s'aproxima al punt de vista teòric que hem explicat es coneix com a «l'algorisme dels 8 punts» (Longuet-Higgins 1981, Hartley 1997) i funciona d'aquesta manera. Partim d'un mínim de 8 parelles de punts (X, Y) dels quals tenim les seves coordenades homogènies. En primer lloc, normalitzem aquestes coordenades (restant la mitjana i dividint per la desviació) i plantegem el sistema lineal homogeni $X^T F Y = 0$ on les incògnites són els

Un cas diferent i més senzill es dóna quan $O = O'$, és a dir, les dues càmeres estan situades en un mateix punt i, per tant, l'anàlisi anterior no és vàlida. Aquesta situació és la que tenim, per exemple, quan fem una *fotografia panoràmica*:[12] fem dues fotos d'un mateix objecte des d'un mateix punt, apuntant en direccions diferents, i després volem «enganxar» aquestes dues fotos de manera que obtinguem una única imatge que cobreixi un camp visual superior al de cada imatge per separat.

En aquest cas, tenim un únic centre de projecció O i dos plans diferents Π, Π'. Cada punt X de la realitat ens dóna per projecció una imatge x al pla Π i una imatge x' al pla Π'. Ara, però, la correspondència $x \mapsto x'$ sí que és una aplicació: és una perspectivitat $\Pi \to \Pi'$ des del punt $O \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Aquesta aplicació és una homografia i vindrà donada per una matriu 3×3 de rang 3. Si determinem aquesta matriu, haurem trobat una aplicació projectiva que, aplicada a una de les fotografies, ens la farà correspondre amb l'altra.[13] Com que sabem que una homografia del pla queda determinada per la imatge d'una referència projectiva, per determinar aquesta matriu en tindrem prou amb trobar les equivalències de 4 punts (que no n'hi hagi tres d'alineats).[14]

nou coeficients de la matriu 3×3 F. Per resoldre aquest sistema utilitzarem un mètode de mínims quadrats (per exemple, la descomposició SVD) per tal de trobar una matriu F de norma 1 tal que X^TFY tingui norma mínima. Aquesta serà la millor aproximació de la matriu fonamental F però, en principi, no tindrà determinant zero. L'aproximarem per una matriu de determinant zero (la matriu fonamental ha de tenir determinant zero) utilitzant novament la descomposició SVD i substituint per zero el valor propi més petit. Finalment, caldrà desfer la normalització de coordenades que hem fet al principi per tenir (una aproximació de) la matriu fonamental en les coordenades originals del punts. Aquest mètode és molt senzill de programar però en molts casos és massa sensible als (inevitables) errors de mesura i, en conseqüència, s'han dissenyat altres algorismes més robustos.

[12]La majoria de càmeres actuals permeten fer fotografies panoràmiques de manera automàtica. Això vol dir que duen implementat el procediment matemàtic que descrivim aquí.

[13]Podeu trobar els detalls a l'article d'en Gregori Guasp *«Enganxant fotografies»*, Mat^2 2007, treball no. 9.

[14]Fem un comentari final: hem estudiat els principis geomètrics on es fonamenta la geometria epipolar, com a primer pas de tota la ingent quantitat de tecnologia que cal utilitzar a l'àrea de la *visió per ordinador*. Hem de ser conscients de la gran distància que hi ha entre els conceptes elementals de geometria projectiva que hem exposat i les dificultats de tota mena que cal resoldre per implementar aquests principis en un sistema prou «intel·ligent».

Exercicis

II.1 Demostreu que si E és un subespai no nul d'un espai vectorial V, aleshores $\mathcal{P}(E)$ és una subvarietat de $\mathcal{P}(V)$ el el sentit axiomàtic (pàgina 56).

II.2 Demostreu l'equivalència entre les dues definicions de suma de subvarietats que apareixen a la pàgina 91.

II.3 Sigui $\phi : V \to W$ una aplicació lineal entre k-espais vectorials. Generalitzeu el concepte d'homografia a $\mathcal{P}(\phi) : X \to \mathcal{P}(W)$ on X és el complement d'una subvarietat a $\mathcal{P}(V)$. Comproveu que la projecció des d'un punt sobre un hiperplà és un exemple d'això. Si ϕ té un nucli no trivial, direm que $\mathcal{P}(\phi)$ és una *homografia singular*.

II.4 Sigui O un punt d'un pla projectiu $\mathcal{P}(V)$ i sigui $f : \mathcal{P}(V) - O \to \mathcal{P}(V)$ una homografia singular $f = \mathcal{P}(\phi)$. Demostreu que l'aplicació lineal $\phi : V \to V$ està unívocament determinada per f llevat d'un factor $\lambda \neq 0$.

II.5 Demostreu que si $\phi, \psi : V \to V$ són dos isomorfismes tals que $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}(\psi)$, existeix $\lambda \neq 0$ tal que $\phi = \lambda\psi$.

II.6 Demostreu que dues rectes de $P_n(k)$, $n \geq 3$, sempre estan contingudes en una subvarietat de dimensió 3.

II.7 Siguin $A = \{a_0.a_1, a_2\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2\} \in P_2(k)$. Definim la matriu 3×3

$$[A]_\times := \begin{pmatrix} 0 & a_2 & -a_1 \\ -a_2 & 0 & a_0 \\ a_1 & -a_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que, si identifiquem $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ amb la recta $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$, aleshores la recta que passa per A i B és la recta $[A]_\times B$. Aquesta recta també es pot calcular com $A \times B$ (producte vectorial).

II.8 Escriviu les coordenades de tots els punts de $P_2(\mathbb{F}_3)$ i les equacions de totes les rectes de $P_2(\mathbb{F}_3)$. Indiqueu, en una taula de doble entrada, quins punts hi ha a cada recta.

II.9 El cos de quatre elements $\mathbb{F}_4$ és un cos de característica 2 format pels elements $\{0, 1, \alpha, \beta\}$, amb la taula de sumar que es dedueix de $1 + \alpha = \beta$ i la taula de multiplicar que es dedueix de l'equació $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Escriviu les taules de sumar i de multiplicar de $\mathbb{F}_4$. Quants punts i quantes rectes té el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$?

II.10 Tenim les quatre figures (**A**, **J**, **Q**, **K**) dels quatre colls (♣, ♠, ♡, ♢) d'una baralla. Setze cartes en total. Volem col·locar-les en un quadrat 4×4 de manera que a cada fila i a cada columna no hi hagi ni dues cartes del mateix valor ni dues cartes del mateix coll. Utilitzeu el pla projectiu $P_2(\mathbb{F}_4)$ per resoldre aquest problema, aplicant els exercicis **I**.62 i **I**.63.

A més, tenim 16 gots amb quatre tipus de beguda (α, β, γ, δ), quatre gots per cada beguda, i volem col·locar un got sobre cada carta de manera que a cada fila i columna no hi hagi dos gots amb la mateixa beguda i, a més, que sobre la taula no hi hagi dues combinacions valor–beguda ni coll–beguda repetides. És possible?

II.11 Els quadrats llatins ortogonals s'utilitzen per construir *codis* (vegeu els exercicis **I**.65, **I**.66, **I**.67) especialment eficients. Ara considerarem codis q-*aris* de longitud n, és a dir, conjunts de paraules de longitud n formades amb elements del conjunt $\{0, 1, \dots, q-1\}$. Si $n = 4$ i volem que el codi corregeixi un error, es pot demostrar que com a màxim el codi pot tenir q^2 paraules.

Utilitzeu els dos quadrats llatins ortogonals de l'exercici anterior per construir un codi amb $n = 4$, $q = 4$, que codifiqui 4 bits i que corregeixi un error. La idea és que cada paraula estigui formada pel número de fila, el número de columna, el valor del primer quadrat llatí i el valor del segon quadrat llatí.

Observeu que si tenim dos quadrats llatins ortogonals d'ordre q aquest mètode permet construir un codi q-ari de longitud 4 que corregeixi un error i que tingui q^2 paraules, que és el màxim possible.

II.12 Trobeu una bijecció f entre dos espais projectius que no sigui una col·lineació però que compleixi que si A, B, C són punts alineats, aleshores $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ també són punts alineats.

En canvi, demostreu que si X i Y són plans projectius axiomàtics i $f : X \to Y$ és una bijecció que envia punts alineats a punts alineats, aleshores f és una col·lineació.

II.13 Sigui $f : X \to Y$ una bijecció entre dos espais projectius de la mateixa dimensió (finita) que transformi punts alineats en punts alineats. Es tracta de demostrar que f és una col·lineació (compareu amb l'exercici anterior). Seguiu aquests passos:

(a) Sigui $U_0, \dots, U_n, U$ una referència projectiva de X, de manera que $X = U_0 + \cdots + U_n$. Demostreu, per inducció sobre i, que

$$f(U_0 + \cdots + U_i) \subseteq f(U_0) + \cdots + f(U_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

(b) Definim $H := U_0 + \cdots + U_{n-1}$, que és un hiperplà de X i $K := f(U_0) + \cdots + f(U_{n-1})$ que és una subvarietat de Y de dimensió $\leq n-1$. Observeu que $X = H + U_n$ i que, per l'apartat anterior, $f(H) \subseteq K$.

(c) Demostreu que $Y = K + U_n$ i, per tant, K és un hiperplà de Y.

(d) Demostreu que $f(H) = K$.

(e) Observeu que la restricció de f a H dóna una aplicació com la de l'enunciat en una dimensió inferior i apliqueu l'exercici anterior per demostrar el teorema.

II.14 Escollim una referència projectiva a $P_2(k)$ i prenem coordenades homogènies respecte d'aquest sistema. Sigui $P \neq \{1, 0, 1\}$ un punt qualsevol de $P_2(k)$. Construïm un punt $S(P)$ de la següent manera:

(a) Unim P amb $\{1, 0, 1\}$ per una recta r.

(b) Tallem r amb la recta $x = 0$ i obtenim el punt Q.

(c) Unim Q amb $\{1, 1, 1\}$ per una recta s.

(d) Tallem s amb la recta $z = 0$ i obtenim el punt $S(P)$.

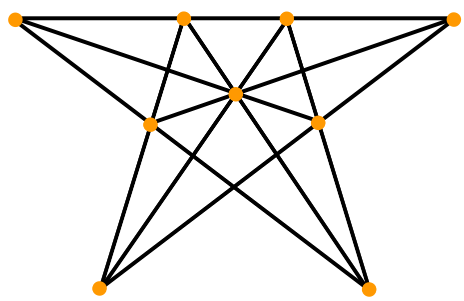
Calculeu $S(\{1, a, 0\})$. Feu un dibuix il·lustratiu.

II.15 Suposeu que tenim una inclusió $P_2(\mathbb{F}_p) \subset P_2(k)$ que respecti les relacions d'incidència, en el sentit que si tenim tres punts $A, B, C \in P_2(\mathbb{F}_p)$, aquests tres punts estan alineats a $P_2(\mathbb{F}_p)$ si i només si ho estan a $P_2(k)$. Apliqueu l'exercici anterior per demostrar que k ha de tenir característica p.

II.16 Suposem que tenim un conjunt finit de punts del pla projectiu real que no estan tots sobre dues rectes. Dibuixem les rectes que els uneixen. Afegim als punts inicials les interseccions d'aquestes rectes. Repetim el procés indefinidament. Demostreu que mai no acabarem.[1] (Indicació: utilitzeu el teorema de coordinació.)

II.17 Siguin A i B dos punts d'un pla projectiu $P_2(k)$ i sigui r una recta que no conté ni A ni B. Digueu com es pot trobar gràficament el punt d'intersecció de la recta r amb la recta que passa per A i B, sense dibuixar la recta AB.

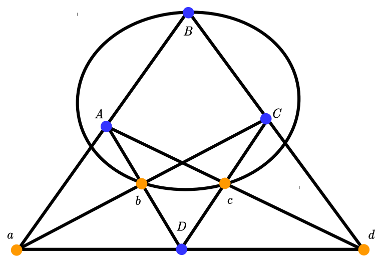
II.18 La *configuració de Perles* és una configuració no regular de nou punts i nou rectes que ve descrita per aquest esquema:



[1]Aquest bonic exercici va aparèixer en converses amb en Xavier Xarles.

Aquesta configuració té la curiosa propietat que es pot incloure a $P_2(\mathbb{R})$ però no es pot incloure a $P_2(\mathbb{Q})$. Demostreu-ho.[2]

II.19 La *configuració de Möbius-Kantor* és la configuració de dos quadrilàters $ABCD$ i $abcd$ que estan mútuament inscrits un en l'altre. És a dir, els vèrtex del primer quadrilàter estan sobre els costats del segon quadrilàter i els vèrtex del segon quadrilàter estan sobre els costats del primer quadrilàter. Aquesta configuració es pot descriure amb aquest esquema:



(a) Demostreu que si aquesta configuració es pot incloure a un espai projectiu, està continguda en un pla.

(b) Considereu la configuració que s'obté a partir del pla afí sobre el cos $\mathbb{F}_3$ després d'eliminar el punt $(0,0)$ i les quatre rectes que hi passen (vegeu l'exercici **I**.64). Demostreu que és la configuració de Möbius-Kantor.

(c) Decidiu quins plans projectius $P_2(k)$ contenen una configuració de Möbius-Kantor.

II.20 Considereu aquests punts de $P_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{ccc} \{-1,1,0\}, & \{-1,0,1\}, & \{0,-1,1\} \\ \{-\omega,1,0\}, & \{-\omega,0,1\}, & \{0,-\omega,1\} \\ \{-\omega^2,1,0\}, & \{-\omega^2,0,1\}, & \{0,-\omega^2,1\} \end{array}$$

on ω és una arrel cúbica primitiva de la unitat, és a dir, una arrel del polinomi x^2+x+1. Demostreu que aquests punts estan sobre 12 rectes de manera que cada recta conté exactament 3 punts. És a dir, es forma una configuració isomorfa al pla afí $\mathbb{F}_3^2$ que, per tant, es pot incloure a $P_2(\mathbb{C})$.[3]

[2] Aquesta configuració és la resposta a l'enigma plantejat a un breu apòleg titulat *«La col·lecció Bauzà del British Museum»*, fàcilment localitzable a Internet. Demostrar el que demana l'exercici és ben senzill, però inventar una configuració que sigui realitzable al pla real però no al pla racional és força més difícil. Aquesta configuració va ser descoberta pel matemàtic israelià Micha Asher Perles i va ser el primer pas de la teoria dels polítops intrínsecament irracionals. La idea inicial de la configuració de Perles es troba en el pentàgon regular estrellat.

[3] Aquesta configuració es coneix com a configuració de Hesse i contradiu el teorema

II.21 Siguin $A_0, \ldots, A_n, U$ i $A'_0, \ldots, A'_n, U'$ referències d'un espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ (de dimensió > 0). Demostreu que existeix una col·lineació $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ tal que $f(A_i) = A'_i$, $i = 0, \ldots, n$ i $f(U) = U'$. És única?

II.22 Una *homologia* és una homografia (que no és la identitat) d'un pla projectiu en ell mateix que deixa fixos tots els punt d'una recta, anomenada l'*eix* de l'homologia. Suposem que $f : X \to X$ és una homologia. Demostreu:

(a) f té com a màxim un punt fix fora de l'eix.

(b) Si A és un punt que no és fix, aleshores la recta que passa per A i $f(A)$ és una recta invariant (és a dir, si $P \in Af(A)$, aleshores $f(P) \in Af(A)$).

(c) Existeix un únic punt P tal que totes les rectes que passen per P són invariants. Aquest punt s'anomena el *centre* de l'homologia.

Si el centre no pertany a l'eix, es diu que f és una *homologia general*. Si el centre pertany a l'eix, es diu que f és una *homologia especial* o una *elació*.

II.23 Sigui ϕ l'endomorfisme d'un $\mathbb{Q}$-espai vectorial E donat, en una certa base, per la matriu

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que $\mathcal{P}(\phi)$ és una homologia de $\mathcal{P}(E)$. Trobeu el seu eix i el seu centre.

II.24 A un pla projectiu $P_2(k)$ considerem un punt C i dues rectes (diferents) r i s que no passin per C. Demostreu que hi ha una homologia de centre C que transforma r en s.

II.25 Sigui $f : P_2(k) \to P_2(k)$ una homografia (diferent de la identitat) que deixa invariants totes les rectes que passen per un punt A. Demostreu que f és una homologia de centre A.

II.26 Considereu quatre punts $A = \{a_0, a_1\}$, $B = \{b_0, b_1\}$, $C = \{c_0, c_1\}$, $D = \{d_0, d_1\}$ d'una recta projectiva $P_1(k)$. Calculeu la raó doble (A, B, C, D) en funció de $a_0, \ldots, d_1$.

II.27 Demostreu aquesta propietat multiplicativa de la raó doble

$$(A, B, C, D)\,(A, B, D, E) = (A, B, C, E).$$

---

de Sylvester-Gallai (exercici **I**.33). Això ens demostra que el teorema de Sylvester-Gallai no es pot demostrar només amb els axiomes d'incidència. D'altra banda, l'exercici **II**.15 ens demostra que aquesta (ni cap) inclusió $\mathbb{F}_3^3 \subset P_2(\mathbb{C})$ no es pot estendre a una inclusió $P_2(\mathbb{F}_3) \subset P_2(\mathbb{C})$ (que conservi la incidència).

II.28 Dues homografies $f, g : P_n(k) \to P_n(k)$ direm que són *similars* si existeix una homografia $h : \mathcal{P}_n(k) \to P_n(k)$ tal que $hf = gh$. Classifiqueu, llevat de similitud, les homografies de $P_1(\mathbb{C})$.

II.29 Sigui $f : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ una homografia que compleix $f(\{1, -1\}) = \{0, 1\}$, $f(\{2, 1\}) = \{1, 1\}$. Demostreu que f té (exactament) dos punts fixos.

II.30 Sigui V un espai vectorial de dimensió 2 i sigui $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ una bijecció. Demostreu que existeix una aplicació lineal $\phi : V \to V$ tal que $f = \mathcal{P}(\phi)$ si i només si f conserva la raó doble.

II.31 Sigui $X = \mathcal{P}(V)$ un pla projectiu i sigui X^* el *pla projectiu dual*, és a dir, el pla projectiu axiomàtic que s'obté prenent com a punts de X^* les rectes de X i com a rectes de X^* els punts de X. Demostreu que hi ha una col·lineació natural $X^* \cong \mathcal{P}(V^*)$ on V^* denota l'espai vectorial dual de l'espai vectorial V.[4]

II.32 En un pla projectiu, demostreu que una projectivitat entre dues rectes diferents és una perspectivitat si i només si el punt on es tallen les dues rectes és un punt fix. Anomenem *feix de rectes* al conjunt de totes les rectes que passen per un punt, anomenat *centre del feix*. Definiu els conceptes de *perspectivitat* i *projectivitat* entre dos feixos de rectes d'un pla projectiu. Demostreu que una projectivitat entre dos feixos de rectes diferents és una perspectivitat si i només si la recta que uneix els dos centres és una recta fixa.

II.33 Siguin $A, B, C, D \in P_1(k)$ (en aquest ordre) quatre punts diferents que estiguin en quaterna harmònica. Demostreu que la característica de k és $\neq 2$. Demostreu que l'ordre dels quatre punts no importa si i només si la característica de k és 3. Trobeu una manera geomètrica de construir D a partir de A, B, C (recordeu l'exercici **I**.14).

II.34 Siguin A, C, D tres punts alineats d'un pla projectiu. Trobeu geomètricament un punt B tal que A, B, C, D estiguin en quaterna harmònica.

II.35 Considerem la recta projectiva real $P_1(\mathbb{R})$.

(a) Demostreu que els punts $\{a, 1\}, \{b, 1\}, \{c, 1\}, \{0, 1\}$ (en aquest ordre) formen una quaterna harmònica si i només si c és la *mitjana harmònica* de a i b. És a dir, c és l'invers de la mitjana dels inversos de a i b:

(b) Considereu aquests punts d'una recta projectiva:

$$P_1 = \{1, 1\}, \quad P_2 = \{1/2, 1\}, \quad P_\infty = \{0, 1\}.$$

Trobeu una successió de punts P_i ($i > 0$) tals que $(P_{i-1}, P_{i+1}, P_i, P_\infty) = -1$ (és a dir, formin quaterna harmònica).[5]

[4] Això explica el nom d'*espai dual*.

[5] Aquest exercici explica el nom de *quaterna harmònica* a partir de la mitjana harmònica.

II.36 En un espai $P_3(k)$ considerem tres plans Π_1, Π_2, Π_3 que es tallen en una recta r i dues rectes L, L' que es tallen en un punt $P \notin r$. Suposem que cadascuna de les dues rectes talla cada pla en un punt: $A_i = \Pi_i \cap L$, $A'_i = \Pi_i \cap L'$, $i = 1, 2, 3$. Demostreu que $(P, A_1, A_2, A_3) = (P, A'_1, A'_2, A'_3)$.

II.37 Considereu aquests punts de l'espai projectiu $P_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \{0, 1, 0, -1\},\ B = \{1, 1, -1, 0\},\ C = \{-1, 1, 1, -2\},\ D = \{1, 2, -1, -1\};$$

$$A' = \{0, 0, 1, 0\},\ B' = \{0, 0, 0, 1\},\ C' = \{0, 0, 1, 1\},\ D' = \{0, 0, 1, \lambda\}.$$

(a) Observeu que els punts A, B, C, D estan alineats. Calculeu la raó doble (A, B, C, D).

(b) Si existeix una projectivitat que transforma els punts A, B, C, D en els punts A', B', C', D', respectivament, trobeu el valor de λ.

(c) Expliqueu com ho faríeu per trobar dues perspectivitats π, π' a $P_3(\mathbb{Q})$ tals que $f = \pi'\pi$ transformi els punts A, B, C, D en els punts A', B', C', D', respectivament.

II.38 Siguin r, r' rectes d'un espai projectiu $P_n(k)$, $n \geq 2$. Siguin $A, B, C \in r$ tres punts diferents, $A', B', C' \in r'$ tres punts diferents. Demostreu que existeix una projectivitat $f : r \to r'$ que és composició d'un màxim de tres perspectivitats i tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Per fer-ho, considereu diversos casos:

(a) r, r' coplanars, $r \neq r'$, $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \varnothing$.

(b) r, r' coplanars, $r \neq r'$, $A = A'$.

(c) r, r' coplanars, $r \neq r'$, $A = B'$.

(d) $r = r'$.

(e) r i r' no coplanars.

II.39 Siguin r, r' dues rectes d'un espai projectiu i sigui $f : r \to r'$ una aplicació bijectiva que conservi la raó doble. Demostreu que f és una projectivitat.

II.40 Demostreu que tota homografia (diferent de la identitat) $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ és composició de com a màxim dues homologies. Seguiu aquests passos:

(a) Demostreu que f té com a mínim un punt fix O. Sigui r una recta que passi per O i no sigui invariant (exercici 25).

(b) Utilitzeu els exercicis anteriors per veure que l'aplicació $f : f \to f(r)$ ha de ser una perspectivitat. Sigui A el seu centre de perspectiva.

Sobre la relació entre la mitjana harmònica, Pitàgores i la música podeu consultar l'article *What's Harmonic about the Harmonic Series* de David E. Kullman (The College Math. J. 32(3), 2001).

(c) Apliqueu l'exercici 24 i sigui h una homologia de centre A que transformi r en $f(r)$.

(d) Acabeu la demostració del teorema veient que $h^{-1}f$ és una homologia.

II.41 Considerem una recta projectiva $P_2(k)$ amb k de característica diferent de 2.

(a) Donats $a, b \in k$, trobeu d tal que $\{a, 1\}$, $\{b, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{d, 1\}$ formin quaterna harmònica.

(b) Sigui $a \in k$, $a \neq 0$, trobeu b tal que els punts $\{-1, 1\}$, $\{1, 1\}$, $\{a, 1\}$, $\{b, 1\}$ formin quaterna harmònica.

II.42 Una aplicació bijectiva $f : P_1(k) \to P_1(k)$ (k de característica diferent de 2) es diu que és una **aplicació de von Staudt** si conserva les quaternes harmòniques (vegeu la nota 2 de la pàgina 112). Sigui f una aplicació de von Staud que deixa fixos tres punts diferents. Es tracta d'estudiar si f és necessàriament igual a la identitat. Prenem aquests punts fixos A, B, C com a referència projectiva de $P_1(k)$.

(a) Si $\lambda \in k$, definim

$$\tau(\lambda) := (A, B, C, f(\{\lambda, 1\})).$$

Demostreu que $\tau(\lambda) \in k$, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$. Demostreu que $f(\{\lambda, 1\}) = \{\tau(\lambda), 1\}$.

(b) Apliqueu l'exercici anterior per demostrar que $\tau(\lambda/2) = \tau(\lambda)/2$, $\tau(\lambda + \mu) = \tau(\lambda) + \tau(\mu)$ i $\tau(-\lambda) = -\tau(\lambda)$, per tot $\lambda, \mu \in k$.

(c) Apliqueu l'exercici anterior per demostrar que $\tau(\lambda^{-1}) = \tau(\lambda)^{-1}$, per tot $\lambda \in k$.

(d) Demostreu que τ és un automorfisme de k. Per demostrar això apliqueu aquestes identitats:

$$x^2 = x - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)^{-1}, \qquad xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2\right).$$

(e) Discutiu si f pot ser diferent de la identitat.

II.43 Sigui $f : P_1(k) \to P_1(k)$ una aplicació (k de característica diferent de 2). Demostreu que existeix un isomorfisme semilineal ϕ tal que $f = \mathcal{P}(\phi)$ si i només si f és una aplicació de von Staudt.

II.44 Resoleu aquestes qüestions sobre les coordenades de Plücker de les rectes de $P_3(\mathbb{Q})$.

(a) Escriviu les coordenades de Plücker de la recta que passa pels punts $\{0, -1, -1, -1\}$ i $\{1, 0, 2, -1\}$.

(b) Trobeu dos punts de la recta r donada per les seves coordenades de Plücker: $r = \{-1, -2, 1, -7, 2, -3\}$.

(c) Trobeu la intersecció de r amb la recta $s = \{1, 1, -1, 2, 3, 5\}$.

(d) Trobeu la intersecció de la recta s amb el pla $x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

II.45 Demostreu que si un punt $\{q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{23}, q_{31}, q_{12}\} \in P_5(k)$ compleix l'equació $q_{01}q_{23} + q_{02}q_{31} + q_{03}q_{12} = 0$ (quàdrica de Klein), aleshores existeix una recta de $P_3(k)$ que té per coordenades de Plücker $\{q_{01}, \ldots, q_{12}\}$. Feu-ho seguint aquests passos:

(a) Demostreu que la matriu

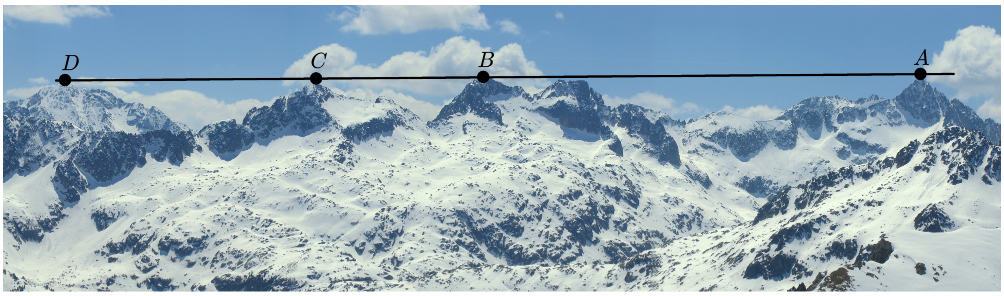
$$A = \begin{pmatrix} q_{12} & -q_{02} & q_{01} & 0 \\ -q_{31} & -q_{03} & 0 & q_{01} \\ q_{23} & 0 & -q_{03} & q_{02} \\ 0 & q_{23} & q_{31} & q_{12} \end{pmatrix}.$$

té rang 2.

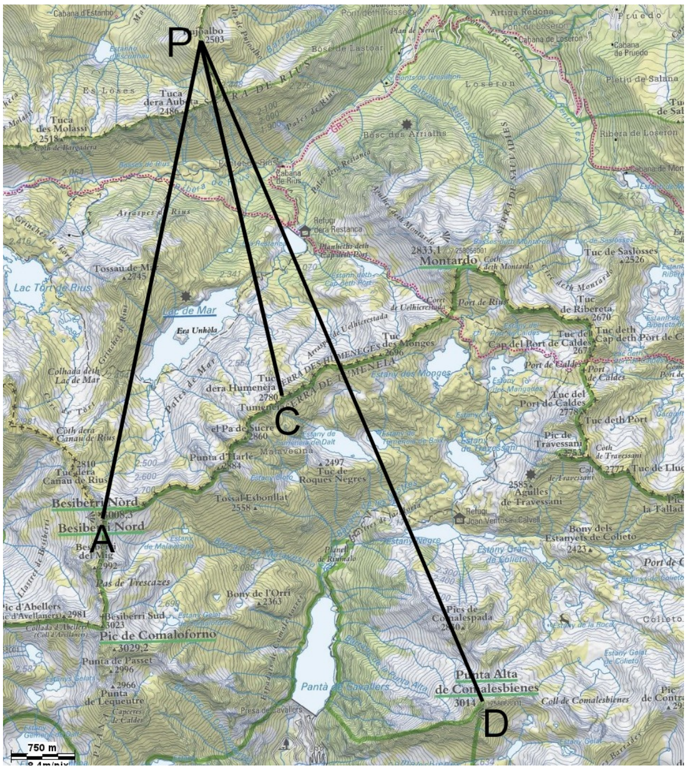
(b) El nucli de A és una recta r de $P_3(k)$. Suposeu, sense pèrdua de generalitat, $q_{01} \neq 0$. Trobeu dos punts de la recta r.

(c) A partir dels dos punts de r, calculeu les coordenades de Plücker de r i comproveu que són iguals a $\{q_{01}, \ldots, q_{12}\}$.

II.46 Aquesta fotografia està feta des del cim de Pujoalbo (P), a la Vall d'Aran. Els cims denotats per A, C i D són, respectivament: Besibèrri Nord, Tuc dera Humeneja i Punta Alta de Comalesbienes. Això ens permet dibuixar en un mapa les visuals des del Pujoalbo cap aquests tres cims.



Expliqueu i justifiqueu matemàticament com podríem aplicar les eines de la **geometria projectiva** per dibuixar sobre el mapa la recta que passa per P i pel cim B i, així, identificar el cim B. (Considereu menyspreable la distorsió de l'objectiu fotogràfic i la distorsió del mapa deguda a la curvatura de la Terra.) Com canvia el problema si els quatre punts no estan alineats a la fotografia? I si sabem que la càmera estava ben anivellada? I si sabem la inclinació de la càmera? I si coneixem, gràcies al mapa topogràfic, les alçades dels cims P, A, C, D?



II.47 A la carretera de la fotografia, continueu la línia discontínua de manera que cada segment tingui la mateixa longitud i aquesta longitud sigui igual a la separació entre segments.

II.48 Sigui A una matriu $n \times m$ (n files i m columnes) sobre el cos real. Suposem que A té rang $n < m$.

(a) Siguin $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ els vectors fila de A. Sigui $X := AA^T$. Demostreu que $X = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)$.

(b) Demostreu que X és una matriu invertible.

(c) Demostreu que $\overline{A} := A^T(AA^T)^{-1}$ és una inversa per la dreta de A.

III

Geometria afí

17. Espai afí sobre un espai vectorial

Les paraules *«espai afí»* i *«geometria afí»* ja han aparegut diverses vegades en aquestes lliçons, de manera més o menys informal. Normalment, ens referíem a la *geometria cartesiana «ordinària»* de k^n, on k és un cos. És la geometria que s'estudia a l'ensenyament secundari i que ens permet parlar, per exemple, del punt de l'espai 3D de coordenades $(-1, 2, 1)$ o de la recta del pla d'equació $x - 3y = 1$. També hem utilitzat l'adjectiu «afí» en contraposició a «projectiu», hem donat una definició axiomàtica de pla afí —punts i rectes amb una relació de paral·lelisme— i hem comentat (sense entrar gaire en detalls) que l'espai afí és el complement d'un hiperplà d'un espai projectiu.

En aquesta part del curs volem reformular amb més precisió tots aquests conceptes. A primera vista, pot semblar superflu fer-ho perquè, tanmateix, ja coneixem la geometria «ordinària» de k^n, però hi ha motius per estudiar bé el concepte d'**espai afí sobre un espai vectorial**. Per exemple:

- Quan fem geometria a k^n o, més en general, a un espai vectorial V, tenim certes estructures que no responen gaire a la intuïció geomètrica:
  - A V Hi ha un *origen*, un «punt zero», un element distingit dels altres, que no té cap significat geomètric natural.
  - A V es produeix, inevitablement, una confusió entre dos conceptes: el concepte de **punt** i el concepte de **vector**: de vegades, un element de V diem que és un punt de la geometria, i altres vegades diem que és un vector. Són conceptes ben diferents un de l'altre: els vectors es poden sumar i multiplicar per escalars, i hi ha un vector zero; els punts no es poden sumar ni es poden multiplicar per escalars i tampoc no hi ha cap «punt zero». Són conceptes diferents, però és fàcil que es confonguin un amb l'altre perquè els punts són els elements de V i els vectors... també.

    En la definició d'espai afí que donarem aquí farem una distinció clara entre *punts* i *vectors*.

- Hi ha conceptes matemàtics —o físics— importants que tenen, de manera natural, una estructura *afí*. Posem uns exemples:
  - Algunes magnituds físiques com el temps o l'energia tenen una estructura natural d'espai afí —i no pas d'espai vectorial. Pensem, per exemple, en el *temps*. Podem sumar les dues del migdia d'avui amb les tres de la tarda d'abans d'ahir? Té algun sentit canònic parlar de l'instant de temps zero?[1] Podem multiplicar per 3 les 6:01 de la tarda del 4 d'abril de 1968, hora de Memphis, TN? Si el temps formés un espai vectorial, ho podríem fer, però no podem. En canvi, sí que podem sumar —o restar— cinc minuts a tres quarts de cinc de la matinada d'avui, i també podem saber quant de temps ha passat entre el migdia del 25 de juliol del 1714 i les dues del migdia del 11 de setembre d'aquell mateix any. Aquest comportament del temps és normal, com veurem, en una estructura d'espai afí.
  - Sigui f una funció real contínua a tota la recta i sigui $\mathcal{P}$ el conjunt de totes les seves primitives. Aquest conjunt $\mathcal{P}$ no té estructura natural d'espai vectorial: ni tenim $0 \in \mathcal{P}$ ni la suma de dues primitives és una primitiva. En canvi, sí que tindrà una estructura natural d'espai afí que prové del fet que dos elements de $\mathcal{P}$ difereixen en un element arbitrari de $\mathbb{R}$.
  - Sigui $\mathcal{S}$ el conjunt de totes les solucions de l'equació diferencial $y'' = y + e^t$. Tampoc no hi ha una estructura natural d'espai vectorial a $\mathcal{S}$ però sí que hi ha una estructura d'espai afí que prové del fet que dos elements de $\mathcal{S}$ difereixen en un element de l'espai vectorial $e^t\mathbb{R} \oplus e^{-t}\mathbb{R}$.
  - Sigui H el conjunt de les solucions d'un sistema lineal $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \neq 0$. La situació és la mateixa dels exemples anteriors: no formen un espai vectorial, però dos elements de H difereixen en un element de l'espai vectorial $\ker A$.

Donem ja la definició d'espai afí. Un **espai afí** és una parella[2] (X, V) formada per

1. Un conjunt[3] X. Els seus elements s'anomenen **punts** de l'espai afí.

[1] Estem parlant del temps de la mecànica clàssica. Res a veure amb el *big bang*.

[2] Seguint un abús de llenguatge tradicional, sovint parlarem de l'*«espai afí X»* i obviarem mencionar l'espai vectorial V. Si volem ser més precisos, parlarem de l'*«espai afí X sobre l'espai vectorial V»* o de l'*«espai afí X amb espai vectorial associat V»*.

[3] Normalment, demanarem que X no sigui buit.

2. Un espai vectorial V.[4] Els seus elements s'anomenen **vectors**.

Aquests dos components de l'espai afí estan relacionats per una **operació**[5] Φ —anomenada *suma* i denotada com a tal— que ens permet sumar a qualsevol punt qualsevol vector:

$$\Phi : X \times V \longrightarrow X$$
$$(P, \overrightarrow{v}) \mapsto P + \overrightarrow{v}$$

Finalment, aquesta operació de suma ha de complir tres axiomes:

1. $P + \overrightarrow{0} = P$ per tot punt $P \in X$.
2. $P + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (P + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$ per tot punt $P \in X$ i qualssevol vectors $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$.
3. Per tot $P, Q \in X$ existeix un únic $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $Q = P + \overrightarrow{v}$. Denotarem aquest vector $\overrightarrow{v}$ per $\overrightarrow{PQ}$.

De manera més compacta, diem que un espai afí és *un conjunt sobre el que actua un espai vectorial, de manera simplement transitiva*.[6]

Si l'espai vectorial V té dimensió n, direm que l'espai afí té dimensió n. De la definició anterior es desprenen immediatament aquestes quatre propietats:

- $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}$ per tot $P \in X$.
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ per tot $P, Q \in X$.
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ per tot $P, Q, R \in X$.
- Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, aleshores $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ per tot $P, Q, R, S \in X$.[7]

[4] Generalment suposarem que és de dimensió finita.

[5] És a dir, un espai afí no és una parella (X, V) sinó que és una *terna* (X, V, Φ) formada per un conjunt, un espai vectorial i una acció simplement transitiva de l'espai vectorial sobre el conjunt.

[6] Aquestes paraules volen dir, exactament, el mateix que hem dit a la definició d'espai afí. Dir que V *actua* sobre X vol dir que hi ha una aplicació $X \times V \to X$ que compleix els axiomes 1 i 2. Dir que l'acció és *simplement transitiva* és una altra manera de dir que es compleix l'axioma 3.

[7] Observem que aquesta propietat elemental dels espais afins ve a ser una mena d'*axioma de les paral·leles*.

Finalment, és convenient fer aquest advertiment important:

En un espai afí, l'única operació que podem fer és

$$P + \vec{v}$$

és a dir, sumar a un punt un vector. Qualsevol altra operació és inadmissible: sumar —o restar— punts, multiplicar punts per escalars, etc., no tenen cap significat lícit.[8]

Donem ara uns quants exemples d'espais afins:

- En els exemples anteriors —el temps, les primitives d'una funció, les solucions d'una equació diferencial lineal o les solucions d'un sistema lineal— és fàcil veure que tenim uns estructura d'espai afí natural. Per exemple, en el conjunt $\mathcal{P}$ de les primitives d'una funció f l'espai vectorial seria $V = \mathbb{R}$ i l'operació de V sobre $\mathcal{P}$ seria la suma ordinària de funcions $F + k$ per $F \in \mathcal{P}$ i $k \in \mathbb{R}$ (entès com una funció constant).
- Un espai vectorial V ens el podem mirar de manera natural com a un espai afí sobre l'espai vectorial V, posant $X := V$ i considerant la suma de V com a operació de V sobre X. Entendrem que aquesta és l'estructura afí *canònica* d'un espai vectorial.
- El complement d'un hiperplà en un espai projectiu té una estructura natural d'espai afí. Més concretament, sigui V un espai vectorial de dimensió $n + 1$ i considerem el seu espai projectiu $\mathcal{P}(V)$. Sigui H un subespai de V de dimensió n i considerem la subvarietat projectiva $\mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(V)$, que és un hiperplà de $\mathcal{P}(V)$. Afirmem que

  $$X := \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$$

  té una estructura natural d'espai afí de dimensió n. Per comprovar-ho, hem de trobar un espai vectorial E de dimensió n apropiat i una acció de E sobre X que compleixi els tres axiomes dels espais afins.

  L'espai vectorial apropiat E és aquest:

  $$E := \mathcal{L}(V/H, H)$$

[8] Més endavant definirem una certa operació entre punts —les *combinacions afins* de punts— que seran, doncs, l'excepció a aquesta regla. D'altra banda, pot ser temptador definir una **resta** de punts a través de $P - Q := \overrightarrow{QP}$. Aquesta definició és lícita, però pot dur fàcilment a errors i és preferible no utilitzar-la mai (vegeu l'exercici **III**.5).

és a dir, l'espai de les aplicacions lineals de l'espai vectorial quocient V/H en l'espai vectorial H. Veiem que V/H té dimensió 1 i, per tant, E té dimensió n. Ara hem de definir la suma d'un punt $P = [\overrightarrow{v}] \in X$ i un vector $\phi \in E$. Ho fem així:

$$P + \phi := \left[\overrightarrow{v} + \phi\pi(\overrightarrow{v})\right]$$

on $\pi : V \to V/H$ és l'aplicació de pas al quocient. Deixem com a exercici comprovar que aquesta suma està ben definida i que compleix els tres axiomes d'espai afí. (Exercici **III**.6.)[9]

En conclusió: el complement d'un hiperplà en un espai projectiu és un espai afí. De fet, es pot demostrar que per aquest procediment s'obtenen *tots* els espais afins. Estudiarem amb més detall tot això en el capítol C.5.

Combinacions afins

Definirem ara una operació important que podem fer en els espais afins: les combinacions afins. Suposem que tenim un espai afí X, n punts $P_1, \dots, P_n \in X$ i n escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ que compleixen la condició $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. En aquestes circumstàncies, podem definir la **combinació afí**

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in X$$

d'aquesta manera: escollim un punt *qualsevol* $O \in X$ i definim

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n := O + \left(\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}\right).$$

Hem de comprovar que el resultat és independent del punt O que haguem

[9] Aquesta construcció que acabem de fer és complicada i poc intuïtiva però és, inevitablement, la construcció que cal fer per dotar X d'una estructura *natural* d'espai afí. De tota manera, si renunciem a la naturalitat, hi ha una manera molt més senzilla de convertir el complement d'un hiperplà en un espai afí. És aquesta: en primer lloc, convertim l'espai projectiu en un $P_n(k)$, de manera que l'hiperplà $\mathcal{P}(H)$ sigui l'hiperplà $x_n = 0$. Aleshores, el conjunt X serà

$$X = \left\{\{x_0, \dots, x_n\} \in P_n : x_n \neq 0\right\}.$$

Com a espai vectorial que actua sobre l'espai afí prenem el mateix hiperplà $x_n = 0$ de V i l'acció que considerem és

$$\{x_0, \dots, x_n\} + \overrightarrow{(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, 0)} = \left\{\frac{x_0}{x_n} + \lambda_0, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} + \lambda_{n-1}, 1\right\}.$$

escollit. En efecte, si O' és un altre punt, tenim

$$\begin{aligned}\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n &= O + \left(\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}\right) \\ &= O' - \overrightarrow{OO'} + \lambda_1 \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_1}\right) + \cdots + \lambda_n \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP_n}\right) \\ &= O' + \left(\lambda_1 \overrightarrow{O'P_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{O'P_n}\right).\end{aligned}$$

Observem que la condició $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ és essencial.

En particular, si tenim dos punts $P, Q \in X$ i un escalar $\lambda \in k$ podem fer la combinació afí $\lambda P + (1-\lambda)Q$ que dóna un punt de l'espai afí.[10]

Un exemple important d'utilització de les combinacions afins apareix en la definició del **baricentre** d'un conjunt (finit) de punts. Si tenim punts $P_1, \ldots, P_r$ en un espai afí, el seu baricentre és el punt

$$B := \frac{1}{r} P_1 + \ldots + \frac{1}{r} P_r.$$

Evidentment, perquè això tingui sentit cal que el nombre de punts r sigui una unitat al cos base k.

Un altre exemple d'aplicació de les combinacions afins —un exemple amb un gran impacte tecnològic— és el de les **corbes de Bézier**.[11] Si P_0 i

[10] Aquest concepte de combinació afí és molt útil però també és «perillós» perquè no hem d'oblidar que no podem ni sumar ni restar punts ni multiplicar-los per escalars ni, en general, fer combinacions *lineals* de punts que no compleixin la condició imprescindible que la suma dels coeficients sigui igual a 1. Per exemple, $A = 3P - 2Q$ té sentit, però ni $3P$ ni $-2Q$ signifiquen res, ni tampoc podem «deduir», de la igualtat anterior, que $A + 2Q = 3P$ (una expressió que no té cap sentit). Cal anar amb compte de no caure en aquests errors. Una manera d'entendre fàcilment com és que es poden fer combinacions afins i no es poden fer combinacions lineals generals consisteix en pensar en l'espai afí de les primitives d'una funció contínua: si F, G són primitives de $f \neq 0$, la combinació lineal $3F + 2G$ no és una primitiva de f, però la combinació afí $3F - 2G$ sí que és una primitiva de f.

[11] Aquestes corbes van ser utilitzades per primera vegada als anys seixanta del segle XX per l'enginyer Pierre Bézier, que les va aplicar al disseny dels automòbils Renault. Actualment, les corbes de Bézier són omnipresents al disseny perquè són les que es fan servir a tots els programes de CAD i als estàndards tipogràfics (TrueType, PostScript, etc.). Són la base de tot el que es coneix com a *gràfics vectorials*, per oposició als *formats raster*. Aquí teniu un exemple:

Bézier Bézier

La primera paraula es veu igual independentment del nivell de zoom que fem, perquè les corbes que la determinen són corbes de Bézier que es calculen cada vegada que ampliem la imatge. En canvi, la segona paraula no està definida per funcions matemàtiques sinó que és un conjunt de píxels més o menys foscos que, amb un nivell de zoom concret, es veuen pràcticament igual que la primera paraula.

P_1 són punts d'un pla afí sobre el cos real, la combinació afí

$$Q_0(t) := (1-t)P_0 + tP_1, \quad 0 \le t \le 1$$

parametritza el segment que va de P_0 a P_1. Suposem que tenim un tercer punt P_2 i que parametritzem el segment de P_1 a P_2 per la combinació afí

$$Q_1(t) := (1-t)P_1 + tP_2, \quad 0 \le t \le 1.$$

Ara podem considerar el segment de Q_0 a Q_1:

$$f(t) := (1-t)Q_0 + tQ_1 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad 0 \le t \le 1,$$

que és una corba de segon grau que uneix P_0 amb P_2 i és, per definició, una corba de Bézier quadràtica. Si, en lloc de tres punts P_0, P_1, P_2 en prenem quatre, obtindrem una corba de Bézier cúbica.

18. Subvarietats i fórmules de Grassmann

En els espais projectius tenim el concepte de subvarietat i aquest concepte també existeix en els espais afins. Ja hem vist que els espais afins i els espais projectius estan molt directament relacionats i, de fet, també hi haurà una bona relació entre les subvarietats projectives i les subvarietats afins.

Sigui X un espai afí sobre un espai vectorial V. Si P és un punt de X i F és un subespai vectorial de V, podem considerar tots els punts de X que s'obtenen sumant a P vectors de F:

$$P + F := \left\{P + \overrightarrow{v} \in X : \overrightarrow{v} \in F\right\} = \left\{Q \in X : \overrightarrow{PQ} \in F\right\}.$$

Direm que aquest subconjunt de X és una **subvarietat afí**[1] de X. Observem:

- P és un punt de $P + F$. Si $Q \in P + F$, aleshores $P + F = Q + F$.
- El subespai $F \subseteq V$ està completament determinat per la subvarietat $P + F$ (exercici **III**.11). Direm que F és el *subespai director* de la subvarietat $P + F$.
- Si F té dimensió m, direm que $P+F$ és una subvarietat de dimensió m de X. Si $m = 1$, direm que la subvarietat és una *recta*; si $m = \dim X - 1$, direm que la subvarietat és un *hiperplà*. Una subvarietat de dimensió zero és un punt.
- Una subvarietat $P + F$ hereta de X una estructura d'espai afí, amb espai vectorial associat igual a F.
- En el món afí hi ha el concepte de **paral·lelisme**. Dues subvarietats $P + F$ i $Q + G$ direm que són paral·leles quan $F \subseteq G$ o $G \subseteq F$. En el cas de dues rectes, això és el mateix que dir que dues rectes són paral·leles si tenen el mateix subespai director. Observem que, en aquest context, estem considerant que tota subvarietat és paral·lela a ella mateixa.

[1] Si el context és clar, en direm simplement «subvarietat».

Les rectes d'un espai afí compleixen les propietats que esperem en una geometria «afí»:

- Per dos punts diferents hi passa una única recta.
- Donat un punt P i una recta r, hi ha una única recta que passa per P i és paral·lela a r.
- Si tenim quatre punts diferents no alineats A, B, C, D de manera que la recta AB és paral·lela a la recta CD i la recta AC és paral·lela a la recta BD, aleshores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Les demostracions són senzilles i les deixem com a exercici.

Suma i intersecció de subvarietats

Igual que succeeix en els espais projectius, podem parlar d'**intersecció i suma** de subvarietats:[2]

- Si Y, Z són subvarietats de X i $Y \cap Z \neq \varnothing$, aleshores $Y \cap Z$ és també una subvarietat de X. En efecte, si $P \in Y \cap Z$, aleshores $Y = P + F$ i $Z = P + G$ i és fàcil veure que $Y \cap Z = P + (F \cap G)$.
- Si $Y = P + F$ i $Z = Q + G$ són dues subvarietats de X, podem **definir** la seva **suma** com la subvarietat
$$Y + Z := P + \left(F + G + \langle\overrightarrow{PQ}\rangle\right).$$
Es pot comprovar que, amb aquesta definició, $Y + Z = Z + Y$ i $Y + Z$ és la subvarietat més petita[3] que conté $Y \cup Z$ (exercici **III**.9).

Coneixem la relació que hi ha entre els espais projectius i els espais afins: si eliminem un hiperplà d'un espai projectiu, obtenim un espai afí de la mateixa dimensió. Aquesta relació es tradueix també en una relació entre les subvarietats projectives i les subvarietats afins. Més concretament, suposem que tenim un espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ i un hiperplà $\mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(V)$. Hem

[2]Aquí tenim una altra excepció a la regla que «no podem sumar punts». En efecte, un punt és, de fet, una subvarietat de dimensió zero i dues (o més) subvarietats es poden sumar. Per tant, si tenim punts $A_1, \dots, A_n \in X$, podríem interpretar $A_1 + \cdots + A_n$ com la subvarietat de X que és suma de les subvarietats $A_1, \dots, A_n$.

[3]Això vol dir que si W és una subvarietat i $W \supseteq Y \cup Z$, aleshores $W \supseteq Y + Z$.

vist que $X = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$ té una estructura natural d'espai afí sobre un cert espai vectorial E. Existeix una correspondència bijectiva natural

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subvarietats afins} \\ \text{de } X \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{subvarietats projectives de } \mathcal{P}(V) \\ \text{no contingudes a } \mathcal{P}(H) \end{array} \right\}.$$

Anem a veure com funciona aquesta correspondència bijectiva i quines propietats té. Donarem només les idees principals i deixarem els detalls per a un capítol de la part de la part de Complements.

Suposem que tenim una subvarietat projectiva $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{P}(V)$ que no estigui continguda a $\mathcal{P}(H)$. Considerem $L = \mathcal{P}(W) \cap X$. Cal veure que es tracta, efectivament, d'una subvarietat afí de X. En primer lloc, observem que, per hipòtesi, existirà un vector $\overrightarrow{v} \in W$ tal que $\overrightarrow{v} \notin H$. Sigui $P := [\overrightarrow{v}] \in X$. Recordem que X és un espai afí sobre l'espai vectorial $E = \mathcal{L}(V/H, H)$. Aleshores, es pot demostrar que

$$L = \mathcal{P}(W) \cap X = P + \mathcal{L}(V/H, W \cap H)$$

que és una subvarietat afí de X de la mateixa dimensió que $\mathcal{P}(W)$.

Recíprocament, si comencem amb una subvarietat afí $L = P + F$ de l'espai afí X, tindrem que $P = [\overrightarrow{v}]$ amb $\overrightarrow{v} \in V - H$ i F és un subespai vectorial de $E = \mathcal{L}(V/H, H)$. Hem d'associar a L una certa subvarietat projectiva $\overline{L}$ de $\mathcal{P}(V)$. Comencem definint aquest subespai vectorial de H:

$$K := \left\{ \phi\pi(\overrightarrow{v}) : \phi \in F \right\} \subseteq H.$$

Aleshores, si definim

$$\overline{L} := \mathcal{P}\left(\langle \overrightarrow{v} \rangle \oplus K \right)$$

obtenim una subvarietat projectiva de $\mathcal{P}(V)$ de la mateixa dimensió que L.

Podem comprovar aquestes propietats de les correspondències que acabem de definir:

- Les dues correspondències són inversa una de l'altra:

$$\overline{L \cap X} = L, \qquad \overline{L} \cap X = L.$$

- Aquestes correspondències es comporten bé respecte de la suma de subvarietats:

$$\overline{L_1 + L_2} = \overline{L_1} + \overline{L_2}.$$

- També es comporten bé respecte de la intersecció de subvarietats, però ara cal seu una mica més curosos. Si L_1 i L_2 són dues subvarietats afins tals que $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, aleshores

  $$\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}.$$

  En canvi, si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, aleshores

  $$\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \mathcal{P}(\widetilde{F_1 \cap F_2})$$

  on $\widetilde{F_1 \cap F_2}$ indica un espai vectorial isomorf a $F_1 \cap F_2$.

Fórmules de Grassmann afins

La correspondència entre subvarietats afins i subvarietats projectives ens permet deduir, a partir la fórmula de Grassmann de la geometria projectiva —que recordem que era una conseqüència immediata de les fórmules de l'àlgebra lineal— unes fórmules de Grassmann afins que, com feien les fórmules projectives, ens relacionen les dimensions de la suma i la intersecció de subvarietats amb les dimensions de cada subvarietat.

Siguin $L_1 = P_1 + F_1$ i $L_2 = P_2 + F_2$ subvarietats d'un espai afí (de dimensió finita). Aleshores:

1. *Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, aleshores*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$

2. *Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, aleshores*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(F_1 \cap F_2) + 1.$$

La demostració és immediata a partir del fet que tot espai afí procedeix d'un espai projectiu, de les fórmules de Grassmann projectives i dels comentaris anteriors sobre el comportament de la correspondència entre subvarietats afins i projectives respecte de la suma i la intersecció de subvarietats. D'altra banda, les fórmules també es poden demostrar directament amb molta facilitat, sense haver de recórrer a l'espai projectiu (exercici **III**.10).

19. Coordenades i equacions

Ens agradaria poder introduir *sistemes de referència* en els espais afins de manera que els punts i els vectors tinguessin *coordenades* i les subvarietats tinguessin *equacions*. La manera de fer-ho és aquesta. Suposem que X és un espai afí sobre l'espai vectorial V. Una **referència afí** per a X és una parella

$$\mathcal{R} = \{P; \mathcal{B}\}$$

on P és un punt de X (anomenat *l'origen* de la referència) i $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ és una base (ordenada) de l'espai vectorial V.

Fixada una referència $\mathcal{R}$ de X, cada punt $A \in X$ té unes coordenades perfectament determinades que es defineixen així:

$$A = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{PA} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n.$$

És a dir, quan escollim una referència, els punts de X queden en correspondència bijectiva amb k^n, de manera que el punt P de la referència es converteix en $(0, \dots, 0)$. A més, l'operació de suma de l'espai afí es converteix en la suma «coordenada amb coordenada»: si sumem el punt de coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ amb el vector de coordenades $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ obtenim el punt de coordenades

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \overrightarrow{(\mu_1, \dots, \mu_n)} = (\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n).$$

És possible introduir coordenades *de manera geomètrica*, sense invocar una base de l'espai vectorial associat? La resposta és sí. Suposem que X és un espai afí de dimensió n. Considerem $n+1$ punts $A_0, \dots, A_n$ que compleixin aquestes condicions equivalents:

1. Cap d'ells no es pot expressar com a combinació afí de la resta.[1]
2. No hi ha cap subvarietat pròpia que els contingui tots.

[1] En la notació de l'exercici **III**.18 això vol dir que els punts són afinament independents.

3. $A_0 + \cdots + A_n = X$ (suma entesa com a suma de subvarietats).

4. Els vectors $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n} \in V$ són linealment independents.

Si tenim aquests punts, podem considerar aquesta referència afí:

$$\mathcal{R} = \left\{A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right\}$$

i considerar coordenades respecte d'aquesta referència. Observem que, d'aquesta manera, les coordenades dels punts $A_0, \dots, A_n$ són

$$\begin{aligned} A_0 &= (0, \dots, 0) \\ A_i &= (0, \dots, 1, \dots, 0), \ i = 1, \dots, n, \ \text{un únic 1 en el lloc } i\text{-èssim.} \end{aligned}$$

Relació amb les coordenades projectives

Si ja sabem que un espai afí és el complement d'un hiperplà en un espai projectiu, té sentit preguntar-se quina relació hi ha entre les coordenades homogènies a l'espai projectiu i les coordenades afins a l'espai afí. Suposem, doncs, que tenim un espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ i un hiperplà $\mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(V)$. Si volem tenir coordenades homogènies a $\mathcal{P}(V)$ hem d'escollir una referència projectiva $U_0, \dots, U_n, U$. L'escollim de manera que el punts $U_0, \dots, U_{n-1}$ estiguin a l'hiperplà $\mathcal{P}(H)$. És a dir, fem que aquest hiperplà sigui l'hiperplà $x_n = 0$. Aleshores, considerem aquests punts de l'espai afí $X = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$:

$$\begin{aligned} A_0 &= U_n = \{0, \dots, 0, 1\} \\ A_i &= \{0, \dots, 1, \dots, 0, 1\}, \ i = 1, \dots, n \ \text{(un 1 en el lloc } i\text{-èssim)} \end{aligned}$$

que clarament són afinament independents i ens donen una referència afí, com hem explicat abans. En aquests moments, doncs, tenim *coordenades homogènies* a $\mathcal{P}(V)$ i *coordenades afins* a X. Volem veure quina relació hi ha entre aquestes dues coordenades.

Les coordenades projectives que hem escollit ens identifiquen l'espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ a $P_n(k)$, on k és el cos base, de manera que H és l'hiperplà $x_n = 0$. En aquestes circumstàncies, la discussió a la nota de la pàgina 140 ens identifica l'espai vectorial de l'espai afí X a H i ens descriu com és la suma d'un punt amb un vector. D'aquesta manera, és fàcil veure que

- $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$ és la base canònica de H.
- Si $P = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\} \notin H$, aleshores $\overrightarrow{A_0P} = (\lambda_0/\lambda_n, \dots, \lambda_{n-1}/\lambda_n, 0) \in H$.

En conclusió, la relació que hi ha entre les coordenades projectives i les coordenades afins —quan hem escollit la referència afí de la manera que hem indicat— ve donada per aquestes senzilles correspondències:

$$\{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\} \leftrightarrow \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_n}, \ldots, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$$
$$(\mu_1, \ldots, \mu_n) \leftrightarrow \{\mu_1, \ldots, \mu_n, 1\}$$

Aquests canvis de coordenades afí ↔ projectiu s'anomenen, respectivament, **homogeneïtzació** i **deshomogeneïtzació**, per motius obvis.

Equacions d'una subvarietat

Suposem que tenim fixada una referència $\mathcal{R} = \{P_0; \mathcal{B}\}$ de l'espai afí X i que $L = P + F$ és una subvarietat de X. El punt P tindrà unes coordenades

$$P = (p_1, \ldots, p_n)$$

i podem escollir una base de F

$$F = \langle \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r \rangle.$$

En aquestes condicions, anomenarem **equació paramètrica** de L l'expressió

$$(X_1, \ldots, X_n) = (p_1, \ldots, p_n) + \sum_1^r \lambda_i \overrightarrow{v}_i.$$

Si els paràmetres λ_i recorren k, obtenim les coordenades $(X_1, \ldots, X_n)$ de tots els punts de L.

Les **equacions cartesianes** d'una subvarietat les obtindrem *eliminant* els paràmetres λ_i de l'equació paramètrica. Fem-ho amb detall. En primer lloc, si escrivim cada vector $\overrightarrow{v}_i$ com a combinació lineal de la base $\mathcal{B}$, tindrem

$$\overrightarrow{v}_i = \alpha_1^i \overrightarrow{v}_1 + \cdots + \alpha_n^i \overrightarrow{v}_n, \quad i = 1, \ldots, r$$

i l'equació paramètrica adopta la forma

$$(X_1, \ldots, X_n) = (p_1, \ldots, p_n) + \sum_1^r \lambda_i\,(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$$

que, si l'escrivim en forma matricial, és

$$\begin{pmatrix} X_1 - p_1 \\ \vdots \\ X_n - p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^r \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \cdots & \alpha_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Els punts de la subvarietat són els que tenen coordenades $(X_1, \dots, X_n)$ que fan que l'equació matricial anterior tingui solució. Sabem que l'equació té solució si i només si el rang de la matriu (α_i^j) (que ja sabem que és igual a r) és el mateix que el rang de la matriu ampliada $(\alpha_i^j \mid X_i - p_i)$. En conclusió: les equacions cartesianes de la subvarietat són les que resulten d'igualar a zero els menors $(r+1) \times (r+1)$ de la matriu ampliada $\left(\alpha_i^j \,\middle|\, X_i - p_i\right)$.

D'altra banda, si tenim les equacions cartesianes d'una subvarietat, tindran la forma matricial

$$B \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}.$$

Aleshores, l'equació paramètrica s'obtindrà «resolent» el sistema lineal anterior i expressant la solució en la forma

$$(X_1, \dots, X_n) = (p_1, \dots, p_n) + \ker B.$$

Fem un exemple. Considerem la subvarietat $P + F$ d'un espai afí de dimensió 4 sobre el cos racional que, en una certa referència, s'expressa com $P = (1, 3, 0, -1)$, $F = \left\langle \overrightarrow{(0, 1, -1, -3)}, \overrightarrow{(1, -1, 1, 0)} \right\rangle$. La matriu ampliada corresponent seria

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y-3 \\ -1 & 1 & z \\ -3 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu ha de tenir rang 2. Per tant, els seus quatre menors 3×3 han de ser zero. De fet, en aquest exemple n'hi ha prou amb igualar a zero dos d'aquests menors. Les equacions cartesianes que obtenim són

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 3 \\ 3x + 3y + t &= 11 \end{aligned}\right\}$$

20. Afinitats

Com sempre fem quan introduïm una certa estructura, és hora de definir quines seran les *transformacions* dels espais afins. En direm **afinitats** (també: aplicacions afins, transformacions afins) i, com que un espai afí conté tres ingredients —els punts, els vectors i la suma (punt + vector)— les afinitats han de tenir en compte aquests tres ingredients.

Suposem que X i X' són espais afins amb espais vectorials associats V i V', respectivament. Suposem que el cos base és el mateix en els dos casos. Una afinitat del primer d'aquests espais afins en el segon consisteix en

1. Una aplicació (de conjunts) $f : X \to X'$.[1]
2. Una aplicació lineal $\phi : V \to V'$.
3. Una relació de compatibilitat entre f i ϕ: per tot $P \in X$ i tot $\overrightarrow{v} \in V$ es compleix
$$f(P + \overrightarrow{v}) = f(P) + \phi(\overrightarrow{v}).$$

Quan tinguem una afinitat, per abús de llenguatge parlarem de l'afinitat $f : X \to X'$, sense fer menció de l'aplicació lineal ϕ. Una manera natural de referir-se a l'aplicació ϕ és anomenar-la **la diferencial** de f i denotar-la df. Aquesta notació és coherent amb el concepte de diferencial d'una funció de diverses variables[2] i amb el fet que, com veurem més endavant, ϕ ve determinada per f.

Si admetem que ϕ sigui una aplicació semi-lineal, obtenim un concepte més general que anomenarem «semi-afinitat». En aquest cas, ja no cal exigir que els dos espais afins tinguin el mateix cos base.

Estudiem ara una sèrie de propietats elementals de les afinitats que són totes senzilles de demostrar.

[1] Observem que no cal que f sigui bijectiva. Això contrasta amb el cas projectiu quan exigíem que les homografies fossin bijectives.

[2] En efecte, si considerem una afinitat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, aleshores $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ coincideix efectivament amb la diferencial —o *aplicació lineal tangent*— del càlcul diferencial.

- La composició de dues afinitats torna a ser una afinitat.
- Per la condició 3, és evident que es compleix

$$df(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

Aquesta fórmula ens diu que l'aplicació df ve determinada per l'aplicació f. Dit d'una altra manera, si sabem que $f : X \to X'$ és una aplicació que forma part d'una afinitat, ja no cal especificar quina és l'aplicació lineal df, perquè es dedueix de f.

- En canvi, l'aplicació lineal df no determina f: hi pot haver afinitats diferents amb la mateixa aplicació lineal associada. Ja veurem exemples més endavant. De tota manera, si coneixem df i coneixem la imatge d'un sol punt, sí que ja tenim determinada f. En efecte, si sabem que $f(P_0) = Q_0$ aleshores, si $P \in X$ és un punt qualsevol, tenim

$$f(P) = f(P_0 + \overrightarrow{P_0P}) = f(P_0) + df(\overrightarrow{P_0P}) = Q_0 + df(\overrightarrow{P_0P}).$$

- Les afinitats conserven les combinacions afins. Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$, aleshores

$$f(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r) = \lambda_1 f(P_1) + \cdots + \lambda_r f(P_r).$$

Això es comprova fàcilment a partir de la definició de combinació afí.

- Les afinitats transformen subvarietats en subvarietats. Suposem que $f : X \to X'$ és una afinitat i $L = P + F$ és una subvarietat de X. Aleshores, és immediat comprovar que

$$f(P + F) = f(P) + df(F).$$

- Una afinitat és bijectiva a nivell de punts si i només si ho és a nivell de vectors. Per tant, podem parlar d'afinitats bijectives sense haver d'especificar si ho són a nivell de punts o de vectors.

Expressió en coordenades

Suposem que tenim una afinitat $f : X \to X'$ i que tenim referències afins als dos espais afins X i X'. Com podem expressar l'acció de f a nivell de coordenades? Suposem que $\mathcal{R} = \{P_0;\ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ és una referència afí de X i $\mathcal{R}' = \{P'_0;\ \vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_m\}$ és una referència afí de X'. Si $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

és un punt de X i $f(A) = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ és la seva imatge a X', quina relació hi ha entre les coordenades (λ_i) i les coordenades (μ_j)?

Observem que, per definició de coordenades d'un punt en una referència, tenim

$$A = P_0 + \sum_1^n \lambda_i \overrightarrow{v}_i, \qquad f(A) = P'_0 + \sum_1^m \mu_j \overrightarrow{v}'_j.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(P_0 + \sum\nolimits_1^n \lambda_i \overrightarrow{v}_i\right) = f(P_0) + \sum_1^n \lambda_i \, df(\overrightarrow{v}_i) \\ &= f(P_0) + M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = P'_0 + \overrightarrow{P'_0 f(P_0)} + M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on M és la matriu de l'aplicació lineal $df : V \to V'$ en les bases $\{\overrightarrow{v}_i\}$ i $\{\overrightarrow{v}'_i\}$. D'aquesta manera, arribem a la conclusió que la relació entre les coordenades de A i les coordenades de $f(A)$ ve donada per l'equació

$$(\mu_j) = (\rho_j) + M\,(\lambda_i)$$

on $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ són les coordenades de $\overrightarrow{P'_0 f(P_0)}$ en la base $\{\overrightarrow{v}'_i\}$, és a dir, les coordenades de $f(P_0)$ en la referència $\mathcal{R}'$. Una manera més compacta d'expressar aquesta fórmula és utilitzant una «ampliació» de la matriu M:

$$\widehat{M} := \left(\begin{array}{c|c} & \rho_1 \\ M & \vdots \\ & \rho_m \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{array}\right).$$

Amb aquesta notació, la relació entre les coordenades de A i les de $f(A)$ s'escriu així:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta senzilla estratagema de la «matriu ampliada» podem treballar amb les afinitats com ho faríem amb les aplicacions lineals: composició d'afinitats, canvi de referències, etc.[3]

[3] S'intueix —i és una intuïció correcta— que hi ha una relació entre aquesta matriu ampliada i els processos d'homogeneïtzació i deshomogeneïtzació que ens relacionen les coordenades afins i les coordenades projectives.

21. Algunes afinitats interessants

En aquest capítol considerarem afinitats d'un espai afí en ell mateix. Direm que dues afinitats són *similars* o *equivalents* si hi ha una afinitat bijectiva —és a dir, un *canvi de referència afí*— que transforma una en l'altra. Més exactament, dues afinitats $f, g : X \to X$ són equivalents si existeix una afinitat bijectiva $h : X \to X$ tal que $h^{-1}fh = g$. Hem après que, fixada una referència, una afinitat ve donada per una matriu ampliada. Dues afinitats f i g seran similars si existeixen referències $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ tals que la matriu de f en la referència $\mathcal{R}$ sigui igual a la matriu de g en la referència $\mathcal{R}'$.

A l'hora d'estudiar una afinitat hi ha dos conceptes importants:

- **Punts fixos.** Evidentment, un punt fix d'una afinitat f és un punt P tal que $f(P) = P$. Es poden trobar resolent l'equació lineal $f(X) = X$. El conjunt de tots els punts fixos de f, si no és buit, forma una subvarietat que designarem per $\mathrm{Fix}(f)$ (exercici **III**.30). És clar que la dimensió d'aquesta subvarietat és un *invariant* de f: si dues afinitats f, g són similars, aleshores $\mathrm{Fix}(f)$ i $\mathrm{Fix}(g)$ tenen la mateixa dimensió.

- **Rectes invariants.** Una recta r és invariant per una afinitat f si es compleix que si $P \in r$, aleshores $f(P) \in r$.[1] Si la recta és $L = P + \langle \vec{v} \rangle$, aleshores les condicions necessàries i suficients perquè L sigui invariant per f són (exercici **III**.33):

  1. $\vec{v}$ ha de ser vector propi de df.
  2. $\overrightarrow{Pf(P)}$ ha de ser un múltiple de $\vec{v}$.

Aquests dos conceptes són casos particulars del concepte general de **subvarietat invariant**, un concepte que ens porta a definir el **nivell d'invariància** d'una afinitat com *la mínima dimensió d'una subvarietat invariant*. Si hi ha algun punt fix, el nivell d'invariància és 0; si no hi ha cap punt fix però hi

[1] Observeu la diferència entre «una recta invariant» i «una recta de punts invariants»: si tots els punts d'una recta són invariants, és clar que la recta és invariant, però en una recta invariant pot ser que no hi hagi cap punt invariant.

ha alguna recta invariant, el nivell d'invariància és 1, etc. La notació que utilitzarem per al nivell d'invariància és $\rho(f)$ i és evident que es tracta d'un **invariant** de les afinitats, en el sentit que tenir el mateix nivell d'invariància és una condició necessària perquè dues afinitats siguin similars.

Quan el nivell d'invariància és > 0 (és a dir, quan no hi ha cap punt fix) es diu que hi ha **lliscament**.

Estudiem ara algunes afinitats $f : X \to X$ que tenen un interès especial.

- **Translacions.** Escollim un vector $\vec{v} \neq 0$. La translació de vector $\vec{v}$ és l'afinitat $T_{\vec{v}}$ que es defineix per

$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}.$$

Observem immediatament que una translació no té punts fixos i que les seves rectes invariants són les que tenen subespai director igual a $\langle \vec{v} \rangle$. D'altra banda, l'aplicació lineal associada és la identitat. Si escollim una referència afí en la qual el primer vector de la base sigui igual a $\vec{v}$, la matriu de $T_{\vec{v}}$ s'escriu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En conclusió, totes les translacions són similars i tenen nivell d'invariància igual a 1.

- **Reflexions.** Suposem ara que el cos base té característica diferent de dos. Sigui H un hiperplà de X amb subespai director E i sigui $\vec{v} \notin E$. La reflexió respecte de H amb *arrel* $\vec{v}$ és l'única afinitat $f : X \to X$ que deixa fixos tots els punts de H i tal que $df(\vec{v}) = -\vec{v}$.[2] Si prenem una referència

$$\mathcal{R} = \left\{P;\ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\right\}$$

on $P \in H$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in E$, $\vec{v}_n = \vec{v}$, la matriu de f en aquesta

[2] Aquest concepte clàssic de reflexió es pot generalitzar de diverses maneres. Per exemple, en lloc d'exigir $df(\vec{v}) = -\vec{v}$ podem demanar que $df(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ per algun $\lambda \neq 0, 1$. Encara més general, podem oblidar-nos de l'arrel $\vec{v}$ i demanar només que Fix(f) sigui un hiperplà. En aquest darrer cas es parla de *pseudo-reflexions*.

referència és

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deduïm que totes les reflexions són similars. També veiem que $\mathrm{Fix}(f) = H$ i pel que fa a les rectes invariants, a banda de les que estan contingudes a H (evidentment) només ho són les que tenen subespai director igual a $\langle \vec{v} \rangle$. Sovint es diu que H és el *mirall* de la reflexió.

- **Projeccions.** Considerem un hiperplà H amb subespai director E i sigui $\vec{v} \notin E$. La projecció sobre H en la direcció del vector $\vec{v}$ és l'afinitat $f : X \to X$ que deixa fixos tots els punts de H i tal que $df(\vec{v}) = 0$. És clar que, en una referència apropiada, la matriu de f és

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Totes les projeccions són similars.

- **Homotècies.** Una homotècia és una afinitat $f : X \to X$ tal que $df = rI$ on $r \neq 0, 1$ s'anomena la *raó* de l'homotècia i I és la identitat. Si prenem una referència qualsevol i calculem la matriu de f obtindrem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & r & b_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Veiem immediatament que f té un únic punt fix. Si prenem aquest punt fix com a punt base de la referència afí, la matriu de f esdevé

$$\left(\begin{array}{ccc|c} r & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & r & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En conclusió, dues homotècies són similars si i només si tenen la mateixa raó.

- **Reflexions amb lliscament.** Estudiem ara la composició d'una reflexió i una translació $f = T_{\overrightarrow{w}} R$.[3] Aquí R serà una reflexió amb arrel $\overrightarrow{v}$, respecte d'un hiperplà H amb subespai director E. Prenem una referència apropiada $\mathcal{R} = \{P_0;\ \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n\}$ que hem escollit de manera que $H = P_0 + \langle \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_{n-1} \rangle$ i $\overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{v}$. En aquesta referència, la matriu de R serà

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si les coordenades de $\overrightarrow{w}$ són $(b_1, \dots, b_n)$, la matriu de f en aquesta referència serà

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & -1 & b_n \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ara hem de distingir dos casos:

  - Si $\overrightarrow{w}$ és múltiple de $\overrightarrow{v}$, serà $b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$ i veiem que tots els punts de l'hiperplà $2x_n = b_n$ són fixos per f. La conclusió és que f torna a ser una reflexió. L'arrel és la mateixa de R, però l'hiperplà de punts fixos ha canviat.
  - En canvi, si algun $b_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$, veiem que f no té cap punt fix i, en conseqüència, no és una reflexió. Direm que es tracta d'una **reflexió amb lliscament**. En aquest cas existeix una referència en la qual la matriu de f té aquesta forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & -1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

    Per trobar aquesta referència fem el següent. Escrivim $\overrightarrow{w} = b_n \overrightarrow{v}_n + \overrightarrow{e}$ amb $\overrightarrow{e} \in E$, $\overrightarrow{e} \neq 0$. Prenem com a punt base de la nova referència

$$Q_0 := P_0 + \frac{b_n}{2} \overrightarrow{v}_n$$

[3]Observem que les afinitats $RT_{\overrightarrow{w}}$ i $T_{\overrightarrow{w}} R$ són equivalents i, per tant, n'hi ha prou amb estudiar-ne una.

i com a base de E prenem $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ de manera que $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1}$ sigui una base de E i $\overrightarrow{e}_n = \overrightarrow{v}$. Es comprova fàcilment que la matriu de f en aquesta referència és com la matriu anterior.

No hi ha punts fixos, però sí que hi ha rectes invariants, per exemple la recta $Q_0 + \langle \overrightarrow{e} \rangle$. Per tant, el nivell d'invariància és igual a 1.

Les reflexions amb lliscament ens proporcionen un exemple no trivial de dues afinitats no similars $f \not\approx g$ amb la mateixa diferencial $df = dg$, que es distingeixen perquè tenen nivells d'invariància diferents.

22. Dos teoremes importants de geometria afí

El teorema fonamental de la geometria afí

L'anomenat «teorema fonamental de la geometria projectiva» (capítol 15) afirma que —amb algunes excepcions molt clares— totes les col·lineacions s'obtenen a partir d'aplicacions semilineals. Anàlogament, s'anomena «teorema fonamental de la geometria afí» el teorema que afirma que totes les col·lineacions de l'espai afí —amb algunes excepcions molt clares— són semi-afinitats.

Recordem que, en qualsevol àmbit on tingui sentit parlar de línies rectes, una col·lineació és una aplicació bijectiva $f : X \to X$ que compleix que tres punts diferents $A, B, C \in X$ estan alineats si i només si els punts $f(A), f(B), f(C) \in X$ també estan alineats.

Per exemple, si X és un espai afí, una afinitat bijectiva és automàticament una col·lineació. En efecte, $A, B, C \in X$ estan alineats si i només si $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ amb $\lambda \neq 0$. Com que $df(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, això és equivalent a que $f(A), f(B), f(C)$ estiguin alineats. Si f no és una afinitat però sí que és una semi-afinitat, la mateixa demostració ens diu que f és una col·lineació.

Ens preguntem, doncs, si col·lineacions i semi-afinitats són el mateix. En general, la resposta és no, perquè hi ha una sèrie de contraexemples evidents:

- En un espai afí sobre el cos de dos elements les rectes només tenen dos punts i, com que mai no podem tenir tres punts diferents alineats, tota aplicació bijectiva és una col·lineació. Però no tota aplicació bijectiva és una afinitat (exercici **III**.42).[1]
- En un espai afí de dimensió 1 tots els punts estan alineats i, per tant, tota bijecció és una col·lineació. Però hi ha aplicacions bijectives que no són semi-afinitats. Per veure-ho hem d'utilitzar un recurs similar

[1] Si el cos base és el cos de dos elements, afinitats i semi-afinitats són el mateix.

al que vam utilitzar en el cas projectiu. En aquell cas, vam introduir la *raó doble* i vam veure que les col·lineacions que són homografies són precisament les que conserven la raó doble. En el cas afí, l'invariant és la **raó simple**.

Siguin A, B, C tres punts diferents d'una recta d'un espai afí. Definim la seva *raó simple* com l'escalar (ben definit) $(A, B, C) \in k$ que compleix

$$\overrightarrow{AB} = (A, B, C)\,\overrightarrow{AC}.$$

És molt senzill comprovar que si $f : X \to X$ és una afinitat bijectiva, aleshores $(A, B, C) = (f(A), f(B), f(C))$. Recíprocament, si X té dimensió 1 i f conserva la raó simple, aleshores f és una afinitat (exercici **III**.49).

Si excloem aquestes dues «patologies», les col·lineacions i les semi-afinitats són el mateix.

[teorema fonamental de la geometria afí] Si $f : X \to X$ és una col·lineació d'un espai afí de dimensió finita > 1 sobre un cos de més de dos elements, aleshores f és una semi-afinitat.

La demostració d'aquest teorema no la podem incloure aquí.

Classificació de les afinitats

El segon teorema important que discutirem en aquest capítol fa referència a la *classificació de les afinitats*. Si tenim dues afinitats $f, g : X \to X$, com podem decidir si són similars o no ho són?[2]

Comencem buscant algunes condicions necessàries perquè f i g siguin similars. És clar que si f té punts fixos i g no en té, no poden ser similars. Més en general, és clar que si són similars han de tenir el mateix *nivell d'invariància*.

L'altra condició necessària molt clara és que si f és similar a g, aleshores df i dg són aplicacions lineals similars. Recordem que dues aplicacions lineals són similars si existeix un canvi de base que transforma una en l'altra.

El teorema de classificació diu que aquestes dues condicions són també suficients:

[2] Recordem que «similars» vol dir que hi ha un canvi de referència que transforma una en l'altra i, per tant, les dues tenen exactament les mateixes propietats geomètriques.

Dues afinitats $f, g : X \to X$ són similars si i només si

1. *Les aplicacions lineals associades df i dg són similars.*
2. *Els nivells d'invariància $\rho(f)$ i $\rho(g)$ són iguals.*

Aquest teorema —que no podem demostrar aquí— redueix el problema de decidir si dues afinitats són similars a dos problemes: decidir si dues aplicacions lineals són similars i calcular el nivell d'invariància. Diguem alguna cosa sobre aquests dos problemes.

El problema de la classificació de les aplicacions lineals es resol en els cursos d'àlgebra lineal utilitzant el que es coneix com a *forma racional d'un endomorfisme* o, en el cas que el cos base sigui algebraicament tancat, *forma de Jordan*. El teorema que es demostra diu que dos endomorfismes són similars si i només si tenen la mateixa forma racional (o la mateixa forma de Jordan). En aquests mateixos cursos s'explica com es pot trobar, de manera efectiva, la forma racional d'un endomorfisme —polinomi característic, polinomi anul·lador, descomposició en blocs, etc. Podem considerar, doncs, que aquest problema està essencialment resolt.[3]

El nivell d'invariància l'hem definit com la mínima dimensió d'una subvarietat invariant. Amb aquesta definició, sembla difícil poder-lo calcular efectivament. Afortunadament, hi ha una definició alternativa que és menys intuïtiva però és més senzilla d'aplicar.[4]

[3]Repassem breument com es pot decidir si dues matrius quadrades a coeficients en un cos k són similars o no ho són. Excepte en casos molt senzills, treballar amb la forma de Jordan no és recomanable, perquè requereix determinar els valors propis i, per tant, cal ser capaços de trobar les arrels del polinomi característic. És molt més interessant resoldre el problema de la similitud de les dues matrius a partir de les seves *formes racionals*. La teoria ens diu que la forma canònica racional depèn d'una successió de polinomis mònics $p_1(x), \dots, p_r(x)$ que compleixen $p_i(x) | p_{i+1}(x)$ per tot i. Aquests polinomis s'anomenen els *factors invariants* de la matriu i estan unívocament determinats per la matriu. Aleshores, dues matrius són similars si i només si tenen els mateixos factors invariants. Curiosament, els factors invariants es poden calcular sense necessitat de trobar arrels de polinomis ni de factoritzar polinomis. Això és degut a l'existència de l'anomenada *forma de Smith* d'una matriu. Si partim d'una matriu A podem aplicar el mètode del *pivot* —també conegut com a PAQ-reducció— a la matriu $xI - A$ (que és una matriu amb coeficients a $k[x]$) de manera que al final trobarem una matriu diagonal en la que els termes de la diagonal seran precisament els factors invariants $p_1(x), \dots, p_r(x)$. Per arribar a aquesta matriu diagonal només hem d'utilitzar les operacions aritmètiques de l'anell $k[x]$ i l'algorisme d'Euclides de càlcul del màxim comú divisor. Els detalls de tot això es poden trobar al llibre *Geometria plana i àlgebra lineal* de Ferran Cedó i Agustí Reventós.

[4]Tampoc no demostrarem aquest teorema perquè necessita eines de les que apareixen a la demostració del teorema de classificació.

Sigui $f : X \to X$ una afinitat i sigui $P \in X$ un punt qualsevol. Sigui $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{Pf(P)}$. Aleshores

$$\rho(f) = \text{mín}\left\{r : (df - I)^r(\overrightarrow{v}) \in \text{Im}(df - I)^{r+1}\right\}.$$

(I indica l'endomorfisme identitat.) El corol·lari que obtenim d'aquest teorema és[5]

Si f és una afinitat i 1 no és valor propi de df, aleshores $\rho(f) = 0$.

Afinitats del pla

Com a exemple de tot el que hem dit fins ara, estudiem la classificació de les afinitats bijectives $f : X \to X$ on X és un *pla afí*. D'una banda, hem de classificar les matrius invertibles 2×2 i de l'altra hem de considerar el nivell d'invariància, que pot ser 0, 1 o 2.

Una matriu 2×2 pot ser que no tingui cap valor propi a k, que en tingui un o que en tingui dos de diferents. A més, en el cas d'un únic valor propi pot ser que la matriu sigui diagonalitzable o que no ho sigui. D'altra banda, sabem que només hi pot haver nivell d'invariància no trivial si 1 és valor propi i també sabem que els vectors directors de les rectes invariants han de ser vectors propis de df.

La classificació apareix a la taula següent. Fem algunes observacions:

- Si df no té valors propis, el nivell d'invariància ha de ser zero i ha de tenir algun punt fix. És fàcil veure que si tingués més d'un punt fix, aleshores 1 seria un valor propi.
- En una homologia especial[6] tenim tota una recta de punts fixos. Sigui P un punt fix qualsevol. Prenem $\overrightarrow{e}_1$ un vector que no sigui vector propi de df i prenem $\overrightarrow{e}_2 = df(\overrightarrow{e}_1) - \overrightarrow{e}_1$. En aquesta referència la matriu adopta la forma canònica. Aleshores, la recta de punts fixos és $P + \langle\overrightarrow{e}_2\rangle$ i les rectes invariants són totes les rectes paral·leles a la recta de punts fixos.

[5] Aquest corol·lari es pot demostrar molt fàcilment sense utilitzar el teorema.

[6] Els termes «homologia general» i «homologia especial» ja van aparèixer a la geometria projectiva (exercici **II**.22). Aquells conceptes projectius i els conceptes afins d'ara estan relacionats.

matriu de df	$\rho(f)$	nom	punts fixos	rectes invar.	forma canònica
sense valors propis	0	el·líptica	1	$\varnothing$	$\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & b & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	0	Identitat	Tot és fix		$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
	1	Translació	$\varnothing$	∞	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	0	Homologia especial	recta	∞	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
	2	Homologia especial amb lliscament	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, $a \neq 0,1$	0	Homotècia	1	∞	$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}$, $a \neq 0,1$	0	Parabòlica	1	1	$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ $a \neq 0,1$	0	Homologia general	recta	∞	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
	1	Homologia general amb lliscament	$\varnothing$	1	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ $a \neq b$, $a, b \neq 0,1$	0	Hiperbòlica	1	2	$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- Una homologia especial amb lliscament tindrà, en una referència apropiada, una matriu
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si no ha de tenir cap punt fix, necessàriament $a \neq 0$ i veiem que el nivell d'invariància no pot ser 1. Per trobar una referència en la que la matriu s'expressi en la seva forma canònica fem el següent. Escollim un vector $\overrightarrow{v}_1 \neq 0$ que no sigui vector propi i definim $\overrightarrow{v}_2 = df(\overrightarrow{v}_1) - \overrightarrow{v}_1$. Aleshores, en aquesta base la matriu df està en la seva forma canònica. Sigui O el punt origen de la referència en la que treballem i sigui $\overrightarrow{v}$ el vector de O a $f(O)$. Aquest vector $\overrightarrow{v}$ no pot ser vector propi de df perquè, si ho fos, tindríem que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}_2$ i aleshores es pot comprovar immediatament que $O - \lambda\overrightarrow{v}_1$ seria un punt fix de f, que no té punts fixos. Per tant, si prenem la referència
$$\mathcal{R} = \{O;\ \overrightarrow{v}, df(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}\},$$
en aquesta referència l'afinitat s'escriurà en la seva forma canònica.

- Una homologia general amb lliscament tindrà, en una certa referència $\mathcal{R} = \{O;\ \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ una matriu
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
amb $a \neq 0, 1$. Com que hi ha lliscament, no pot tenir cap punt fix i ha de ser $b \neq 0$. Aleshores, considerem els vectors $\overrightarrow{e}_1 = b\overrightarrow{v}_1$ i $\overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{1-a}\overrightarrow{v}_2$ i comprovem que en la referència
$$\mathcal{R}' = \{O + \overrightarrow{e}_1 + c\overrightarrow{e}_2;\ \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$$
la matriu de l'afinitat està en la forma canònica. Hi ha una única recta invariant que és la recta $(O + c\overrightarrow{e}_2) + \langle\overrightarrow{e}_1\rangle$. El nivell d'invariància ha de ser, en conseqüència, igual a 1.

23. Espai afí euclidià

En els espais afins que hem estudiat fins ara no hi tenen cabuda els conceptes geomètrics relacionats amb la mesura de distàncies i angles —ni tampoc el que anomenàvem «relacions d'ordre». Si volem parlar, per exemple, de perpendicularitat, de segments, de longitud d'un vector o de distància entre dos punts prendrem com a cos base el cos dels nombres reals i demanarem que l'espai vectorial associat a l'espai afí tingui una estructura «euclidiana» donada per un *producte escalar definit positiu*. Aquest concepte d'*espai vectorial euclidià* ja s'ha estudiat en els cursos d'àlgebra lineal, però ara repassarem la seva definició i les seves propietats fonamentals.

Espais vectorials euclidians

Un **espai vectorial euclidià** és un espai vectorial (de dimensió finita) V sobre el cos dels nombres reals,[1] conjuntament amb una aplicació

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

que compleix aquestes propietats.

1. Per cada $\vec{v} \in V$, l'aplicació $\vec{u} \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ és lineal.
2. Per cada $\vec{u}, \vec{v} \in V$ es compleix $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.
3. Per cada $\vec{u} \in V$ es compleix $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$.
4. Si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, aleshores $\vec{u} = 0$.

Direm que $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ és un **producte escalar definit positiu** a l'espai vectorial V.

En un espai vectorial euclidià podem *mesurar* la longitud d'un vector i l'angle entre dos vectors. Vegem com ho fem:

[1] Podríem generalitzar tot això al cos dels nombres complexos, però ens allunyaríem massa del contingut d'aquest curs.

- La longitud d'un vector $\overrightarrow{u} \in V$ es defineix com

$$||\overrightarrow{u}|| := \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}.$$

- Per definir la mesura de l'angle que formen dos vectors necessitem una propietat important dels productes escalars definits positius que es coneix com a **desigualtat de Cauchy-Schwarz**:[2]

$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leq ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}||$$

  i la igualtat es dóna si i només si els dos vectors són linealment dependents. Aquesta desigualtat implica que si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq 0$ tenim

$$-1 \leq \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}||} \leq 1$$

  i, per tant, té sentit definir la mesura de l'angle format per dos vectors no nuls $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ com el nombre real

$$\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := \text{arccos} \, \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}||}$$

  de manera que la mesura d'un angle varia entre 0 i π i es compleix que dos vectors no nuls són perpendiculars si i només si el seu producte escalar és zero. Observem també que l'ordre dels dos vectors és irrellevant.[3]

En un espai vectorial euclidià V és important el concepte de **subespais ortogonals**: Direm que dos subespais E_1 i E_2 de V són ortogonals si $\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2 \rangle = 0$ per tot $\overrightarrow{e}_1 \in E_1$ i $\overrightarrow{e}_2 \in E_2$. D'altra banda, si E és un subespai de V, definim l'ortogonal de E com

$$E^{\perp} := \left\{ \overrightarrow{v} \in V : \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{e} \rangle = 0 \text{ per tot } \overrightarrow{e} \in E \right\}.$$

[2] Per demostrar aquesta desigualtat, desenvolupeu $\langle \overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \lambda\overrightarrow{v} \rangle \geq 0$ per $\lambda = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle / \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle$.

[3] És pertinent preguntar-se *per què* hem definit la mesura de longituds i la mesura d'angles de la manera com ho hem fet. D'entrada, ens podríem preguntar per què utilitzem el producte escalar i, en segon lloc, sobta l'aparició de l'arrel quadrada i, encara més, la utilització, per primera vegada en tots aquests apunts, d'una funció *transcendent* com és la funció arccos. Sobre el perquè del producte escalar podeu consultar la nota 3 de la pàgina 175. La resposta a per què utilitzem les funcions arrel quadrada i arccos és massa llarga per a una nota a peu de pàgina i la trobareu en un apèndix al final d'aquest capítol.

És senzill comprovar que $E^\perp$ és també un subespai de V i que $V = E \oplus E^\perp$.

Finalment, recordem el concepte de **base ortonormal** d'un espai vectorial euclidià: és una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ amb la propietat

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

És a dir, els vectors de la base són ortogonals dos a dos i tenen longitud igual a 1. És senzill demostrar (per inducció) que tot espai vectorial euclidià té alguna base ortonormal. L'avantatge de les bases ortonormals és que, si treballem en una d'aquestes bases, és molt senzill calcular el producte escalar de dos vectors:

$$\langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \rangle = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$$

Espais afins euclidians

Un **espai afí euclidià** serà un espai afí en el qual l'espai vectorial associat sigui un espai vectorial euclidià. En un espai afí euclidià podem definir la **distància entre dos punts** per la fórmula

$$d(A, B) := || \overrightarrow{AB} ||$$

i podem definir el **segment** delimitat per A i B com

$$\{P : P = \lambda A + (1 - \lambda) B,\ \lambda \in [0, 1]\}.$$

A partir d'aquí no és difícil comprovar (exercici **III**.52) aquestes dues propietats geomètriques clàssiques de la distància:

- [Desigualtat triangular] Donats punts A, B, C qualssevol, es compleix

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

- [Teorema de Pitàgores] Si el triangle A, B, C és rectangle i l'angle recte és al vèrtex A, aleshores

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2.$$

En un espai afí euclidià direm que dues subvarietats són ortogonals si ho són els seus subespais directors.

En un espai afí euclidià podem parlar de la **distància entre dues subvarietats afins** com la distància mínima entre un punt de la primera subvarietat i un punt de la segona subvarietat:

$$d(L_1, L_2) := \inf \{ d(A_1, A_2) : A_1 \in L_1,\ A_2 \in L_2 \} .$$

Sorgeix el problema interessant de calcular aquesta distància. Suposem que tenim dues subvarietats

$$L_1 = P_1 + F_1; \quad L_2 = P_2 + F_2$$

i volem calcular $d(L_1, L_2)$. La idea és que la distància entre $Q_1 \in L_1$ i $Q_2 \in L_2$ serà mínima quan la recta Q_1Q_2 sigui perpendicular a L_1 i a L_2 (exercici **III**.54). Per desenvolupar aquesta idea seguim aquests passos:

1. Calculem el subespai vectorial $(F_1 + F_2)^\perp$. Sabem que V s'expressa com a suma directa
$$V = (F_1 + F_2) \oplus (F_1 + F_2)^\perp .$$
2. Escrivim $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} + \vec{v}$ amb $\vec{u} \in F_1 + F_2$ i $\vec{v} \in (F_1 + F_2)^\perp$. Observem que aquesta expressió és única.
3. Escrivim $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ amb $\vec{u}_1 \in F_1$ i $\vec{u}_2 \in F_2$. Aquesta expressió pot no ser única.
4. Aleshores,
$$d(L_1, L_2) = ||\vec{v}|| = d(P_1 + \vec{u}_1, P_2 - \vec{u}_2).$$

Demostrem aquesta darrera afirmació. Escollim punts qualssevol $Q_i = P_i + \vec{e}_i \in L_i$, $i = 1, 2$ i calculem la distància entre ells. Obtenim

$$d(Q_1, Q_2) = ||(\vec{u} + \vec{e}_2 - \vec{e}_1) + \vec{v}||.$$

Apliquem ara el teorema de Pitàgores (els vectors $\vec{u} + \vec{e}_2 - \vec{e}_1$ i $\vec{v}$ són perpendiculars):

$$d(Q_1, Q_2) = \sqrt{||\vec{u} + \vec{e}_2 - \vec{e}_1||^2 + ||\vec{v}||^2}.$$

Aquí els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ estan fixats mentre que $\vec{e}_1$ recorre F_1 i $\vec{e}_2$ recorre F_2. Aleshores, és clar que el mínim d'aquesta funció es produirà quan $\vec{u} =$

$\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$ i aquest mínim serà igual a $||\overrightarrow{v}||$, i també és clar que els punts $P_1 + \overrightarrow{u}_1$ i $P_2 - \overrightarrow{u}_2$ realitzen aquesta distància (poden no ser els únics que la realitzen).

Apèndix: el perquè de la funció arccos

A una nota de la pàgina 166 ens preguntàvem *per què* hem definit la mesura de longituds i la mesura d'angles de la manera com ho hem fet. Dèiem que sobtava l'aparició de l'arrel quadrada i, encara més, la utilització, per primera vegada en tots aquests apunts, d'una funció *transcendent* com és la funció arccos. En aquest apèndix explicarem una mica la motivació que hi ha al darrere d'aquestes definicions. És clar que, com que són definicions, només els hauríem d'exigir que, amb elles, es compleixin els axiomes de la geometria d'Euclides-Hilbert i, si amb aquestes «estranyes» definicions es compleixen els axiomes, això ja les fa bones.

Ara bé, cal recordar que ni Euclides ni Hilbert no parlen ni de *longitud* d'un segment ni de *mesura* d'un angle: parlen només de segments congruents i d'angles congruents. Per obtenir la geometria d'Euclides-Hilbert n'hi ha prou amb definir, per exemple, que dos vectors $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ són congruents si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle$ i definir que l'angle que formen els vectors unitaris $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ és congruent a l'angle que formen els vectors unitaris $\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'$ si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}' \rangle$. Per tant, si volem assignar a cada vector una *longitud* (un nombre real) i a cada parella de vectors unitaris una *mesura d'angle* (un nombre real), de manera que dos vectors siguin congruents si i només si tenen la mateixa longitud, i dos angles siguin congruents si i només si tenen la mateixa mesura, aleshores podem definir la longitud de $\overrightarrow{u}$ com $f(\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle)$ i l'angle entre els vectors unitaris $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ com $g(\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle)$ on f i g són funcions reals injectives *absolutament arbitràries*. Dit això, la pregunta és: per què prenem com a funció f la funció arrel quadrada i com a funció g la (complicadíssima) funció arccos?

La resposta a aquesta pregunta és que a la funció longitud d'un segment i a la funció mesura d'un angle els demanem una propietat addicional: compatibilitat amb la *suma geomètrica* de segments i angles (en el sentit de Hilbert).[4]

Pensem primer en la longitud. Voldríem escollir la funció f que sigui positiva i injectiva, i també voldríem que si A, B, C són tres punts alineats i B està entre A i C, aleshores, la longitud de A a C sigui la *suma* de la longitud de A a B més la longitud de B a C. Si ara expressem $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ amb $\lambda > 0$, fàcilment arribem a que f ha de complir aquesta equació funcional

$$f(x) + f(\lambda^2 x) = f\big((1+\lambda)^2 x\big), \quad \lambda, x > 0.$$

i això ens obliga a que (llevat d'un factor d'escala) la funció f sigui la funció arrel quadrada (exercici **III**.55).

[4] Hem d'entendre que aquesta compatibilitat és simplement una propietat «desitjable», no una propietat obligatòria.

El motiu pel qual, en la mesura d'angles, la millor opció és utilitzar la funció arccos és el mateix que en el cas de la longitud d'un vector, però la justificació és més complicada. En primer lloc, diguem que $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ és la inversa de la funció $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ i convé recordar què és, exactament, aquesta funció cosinus. Quan parlem del cosinus d'un angle, podem voler dir una d'aquestes dues coses:

1. El cosinus *d'un angle* (agut) és el quocient de la longitud del catet contigu per la longitud de la hipotenusa en un triangle rectangle format a partir d'aquest angle. És un concepte purament geomètric que requereix el concepte de longitud i també el concepte d'angle recte. Denotem aquest cosinus geomètric com a gcos. És senzill veure que, si $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ són dos vectors, el cosinus geomètric de l'angle que formen compleix

$$\operatorname{gcos}\big(\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})\big) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

2. La *funció real de variable real* cosinus és la funció analítica definida per la sèrie

$$\cos \alpha := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}.$$

   De manera equivalent, $\cos \alpha$ és la part real de la funció $\exp(i\alpha)$.

Són dos conceptes essencialment diferents, sense cap relació aparent entre ells. La definició que hem donat de mesura d'un angle té com a conseqüència unificar els dos conceptes. Si mesurem un angle utilitzant $g = \arccos$ aconseguim que el cosinus d'un angle (concepte geomètric) sigui el mateix que el cosinus de la seva mesura (concepte analític).

Tanmateix, això encara no explica per què volem unificar el concepte geomètric de cosinus d'un angle —estudiat des dels inicis de la matemàtica— amb el concepte donat per l'«estranya» sèrie de potències anterior. Suposem, doncs, que definim la mesura d'un angle com $g\left(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle / \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|\right)$ i mirem qui «ha de ser» la funció g. Per simplificar la notació, considerem la inversa de g —diguem-ni h— i substituïm la definició de la mesura d'un angle per aquesta nova definició

$$h(\alpha) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

per a vectors unitaris $\vec{u}, \vec{v}$ sobre les semirectes que defineixen l'angle. Volem veure que, necessàriament, $h = \cos$. Tenim:

1. Segons la definició d'angle recte, els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ seran perpendiculars si $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \measuredangle(-\vec{u}, \vec{v})$ i això és equivalent a $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

2. És clar que la mesura d'angles ha de dependre de l'elecció d'una unitat de mesura d'angles: decidim que l'angle recte mesuri $\pi/2$.

3. Ja hem dit que el punt clau és que voldríem escollir la funció h de manera que la *suma geomètrica* d'angles —entesa com «posar un angle a continuació de l'altre en un costat apropiat»— coincidís amb la suma de les seves mesures —com a nombres reals. Siguin $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ dos vectors unitaris perpendiculars i sigui $\overrightarrow{w}$ un vector unitari coplanar amb ells que estigui entre els dos. Això vol dir $\overrightarrow{w} = r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ amb $r^2 + s^2 = 1$. Si $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ mesura α, volem que l'angle $\measuredangle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ mesuri $\pi/2 - \alpha$. Fent uns càlculs senzills veiem que, si definim la funció $k(\alpha) := h(\pi/2 - \alpha)$, aquestes dues funcions h i k han de complir la relació $h^2 + k^2 = 1$.

4. Les fórmules clàssiques del cosinus i el sinus de la suma de dos angles es demostren geomètricament i només fan referència als conceptes *geomètrics* de sinus i cosinus. Per tant, aquestes mateixes fórmules han de ser vàlides per a les nostres funcions h i k.

5. Finalment, les fórmules anteriors ens diuen que la funció $\ell(t) = h(t) + ik(t)$ compleix que $\ell(t_1 + t_2) = \ell(t_1)\ell(t_2)$ i que $h(t) > 0$ si $0 < t < \pi/2$. Això només és possible[5] si ℓ és la funció exponencial $\exp(it)$. En conclusió, $h = \cos$.

En conclusió: si volem una mesura de segments que sigui additiva, cal utilitzar la funció arrel quadrada i si volem una mesura d'angles que sigui additiva, cal utilitzar la funció analítica arccos. Dit d'una altra manera: si no insistim en «mesurar», podem fer tota la geometria afí sense sortir ni de la geometria ni de l'àlgebra, però si insistim en mesurar —de manera additiva— els angles amb nombres reals, ens cal l'anàlisi matemàtica.[6]

[5]Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és una funció contínua (diferent de la funció constant zero) que compleix que $f(x + y) = f(x)f(y)$, és un exercici senzill demostrar que existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(x) = \exp(zx)$. Si f és periòdica de període 2π, aleshores z ha de ser un múltiple enter de i. Posem $z = ni$. Si ara exigim que la part real de $f(x)$ sigui > 0 per $0 < x < \pi/2$, arribem a la conclusió que $n = 1$ i $f(x) = e^{ix}$.

[6]Aquestes reflexions tenen també perfecte sentit quan estudiem geometria hiperbòlica.

24. Moviments rígids

Tal com hem anat fent cada vegada que hem estudiat una nova estructura, ara ens toca explicar quines són les transformacions dels espais afins euclidians. Les anomenarem **moviments rígids** i abans de definir-los estudiarem les transformacions dels espais vectorials euclidians: les isometries. Recordem que el cos base és sempre el cos real.

Isometries lineals

Suposem que V i W són espais vectorials euclidians. Una aplicació $\phi : V \to W$ direm que és una **isometria** si

1. ϕ és lineal.

2. ϕ conserva el producte escalar:

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \phi(\overrightarrow{u}), \phi(\overrightarrow{v}) \rangle \text{ per tot } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V.$$

De fet, la primera condició és redundant perquè si ϕ conserva el producte escalar, aleshores ϕ ha de ser lineal (exercici **III**.56).

Considerem ara el cas d'una isometria $\phi : V \to V$ d'un espai vectorial en ell mateix. En aquest cas, ϕ és necessàriament un isomorfisme lineal i la seva inversa ϕ^{-1} és clarament una isometria. Aleshores, direm que dues isometries ϕ, ϕ' són **similars** si existeix una isometria ψ tal que $\phi' = \psi\phi\psi^{-1}$.

Com podem determinar si una aplicació lineal $\phi : V \to V$ és una isometria o no ho és? Suposem que hem escollit una base ortonormal i que la matriu de ϕ en aquesta base és M. Aleshores, el producte escalar de dos vectors $\overrightarrow{u} = (a_1, \dots, a_n)$ i $\overrightarrow{v} = (b_1, \dots, b_n)$ s'obté fent el producte de matrius $(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)^T$. D'aquí es dedueix immediatament que ϕ és una isometria si i només si la matriu M compleix la condició

$$M^T M = I$$

és a dir, la matriu inversa de M coincideix amb la matriu transposada de M. Les matrius que tenen aquesta propietat s'anomenen **matrius ortogonals** i les isometries (bijectives) també es coneixen com *transformacions ortogonals*. És evident que les isometries d'un espai vectorial euclidià en ell mateix formen un grup. Aquest grup rep el nom de **grup ortogonal** de l'espai vectorial euclidià V i es denota per $O(V)$.

Moviments rígids

Sigui X un espai afí euclidià. Una aplicació $f : X \to X$ direm que és un **moviment rígid** si f conserva la distància. És a dir,

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)), \text{ per tot } A, B \in X.$$

Hi ha una definició equivalent que cal conèixer:

> *$f : X \to X$ és un moviment rígid si i només si f és una afinitat i df és una isometria.*

Vegem com es demostra això. És clar que la part interessant és veure que si f conserva la distància, aleshores f és una afinitat i df és una isometria. Escollim un punt $P_0 \in X$ i definim una aplicació $\phi : V \to V$ per

$$\phi(\overrightarrow{v}) := \overrightarrow{f(P_0)f(P_0 + \overrightarrow{v})}.$$

Amb aquesta definició es compleix que

$$f(P_0 + \overrightarrow{v}) = f(P_0) + \phi(\overrightarrow{v}) \text{ per tot } \overrightarrow{v} \in V.$$

És a dir, ϕ és un bon candidat a ser df. Comprovem ara que ϕ és una isometria. Siguin $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{v} \in V$ i siguin $A := P_0 + \overrightarrow{e}$, $B = P_0 + \overrightarrow{v}$. Aleshores

$$\begin{aligned} d(A, B)^2 &= d(A, P_0)^2 + d(B, P_0)^2 + 2\langle \overrightarrow{AP_0}, \overrightarrow{P_0B} \rangle \\ d(f(A), f(B))^2 &= d(f(A), f(P_0))^2 + d(f(B), f(P_0))^2 + 2\langle \overrightarrow{f(A)f(P_0)}, \overrightarrow{f(P_0)f(B)} \rangle \end{aligned}$$

Això implica immediatament que $\langle \overrightarrow{e}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \phi(\overrightarrow{e}), \phi(\overrightarrow{v}) \rangle$ i ϕ és una isometria. Acabem la demostració veient que f és una afinitat amb $df = \phi$. Donats $A \in X$, $\overrightarrow{v} \in V$ cal veure que $f(A + \overrightarrow{v}) = f(A) + \phi(\overrightarrow{v})$ que és equivalent a $\phi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A + \overrightarrow{v})}$. Tenim:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(A + \overrightarrow{v})} &= \overrightarrow{f(A)f(P_0)} + \overrightarrow{f(P_0)f(A + \overrightarrow{v})} \\ &= -\phi(\overrightarrow{P_0A}) + \phi(\overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Deduïm que un moviment rígid és sempre una afinitat bijectiva i l'aplicació inversa també és un moviment rígid. Direm que dos moviments rígids

$f, f' : X \to X$ són **similars**[1] si existeix un moviment rígid $h : X \to X$ tal que $f' = hfh^{-1}$.

Alguns exemples

Un moviment rígid és, en particular, una afinitat. Com que havíem estudiat algunes afinitats importants, podem ara mirar si són moviments rígids o no ho són. La condició necessària i suficient és que la part lineal sigui una isometria.

- Clarament, qualsevol **translació** $T_{\overrightarrow{v}}$ és un moviment rígid perquè l'aplicació lineal associada és la identitat. Sabem que totes les translacions són similars com a afinitats. En canvi,

  $$T_{\overrightarrow{u}} \sim T_{\overrightarrow{v}} \textit{ com a moviments rígids si i només si } ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||.$$

  En efecte, suposem que hi ha un moviment rígid h tal que $T_{\overrightarrow{u}}h = hT_{\overrightarrow{v}}$. Aleshores, escollim un punt $P \in A$ i observem que

  $$h(P) + \overrightarrow{u} = T_{\overrightarrow{u}}h(P) = hT_{\overrightarrow{v}}(P) = h(P + \overrightarrow{v}) = h(P) + dh(\overrightarrow{v})$$

  i, per tant, $dh(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$ i, com que dh és una isometria, veiem que $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$.

  Recíprocament, suposem que $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$. Trivialment, hi ha una isometria $\phi : V \to V$ tal que $\phi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$. Escollim un punt $P \in X$ i sigui $h : X \to X$ l'afinitat tal que $h(P) = P$ i $dh = \phi$. És clar que h ś un moviment rígid i és fàcil comprovar que $hT_{\overrightarrow{v}}(P) = T_{\overrightarrow{u}}h(P)$. Aleshores, com que les afinitats $hT_{\overrightarrow{v}}$ i $T_{\overrightarrow{u}}h$ tenen la mateixa part lineal i coincideixen en un punt, són iguals (pàgina 152).

- Les úniques **homotècies** que són moviments rígids són les de raó -1 i totes aquestes són similars entre elles.

- Les úniques **reflexions** que són moviments rígids són aquelles en les que l'arrel és perpendicular a l'hiperplà de punts fixos. En aquest cas parlarem de **reflexions ortogonals** i ja no cal especificar l'arrel perquè n'hi ha prou amb especificar l'hiperplà mirall. Alternativament, una reflexió ortogonal queda determinada si coneixem un punt del

[1] Ja teníem un concepte d'afinitats similars i, per tant, quan parlem de moviments rígids similars hauríem d'especificar si ens referim a similars com a afinitats o similars com a moviments rígids. Dos moviment rígids que siguin similars com a moviments rígids també seran similars com a afinitats, però el recíproc no és cert. Normalment, el context ja ens indicarà quin és el concepte de similitud que estem considerant.

mirall (és a dir, un punt fix) i una arrel. Més concretament, sigui Q un punt de l'hiperplà mirall i sigui $\vec{n}$ un vector unitari normal[2] al mirall. Aleshores, la reflexió ortogonal ve donada per (exercici **III**.57)

$$f(P) = P - 2\langle \overrightarrow{QP}, \vec{n} \rangle \vec{n}.$$

- Com que la composició de dos moviments rígids torna a ser un moviment rígid, tenim que les **reflexions ortogonals amb lliscament** són moviments rígids.

- Una **rotació** lineal és una isometria de determinant igual a 1. Si la dimensió és igual a dos, és fàcil veure que una rotació lineal tindrà una matriu de la forma

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

per algun $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ únic que s'anomena l'angle de rotació. Una rotació afí al pla és un moviment rígid que té com a part lineal una rotació d'angle diferent de zero. Com a afinitat, serà una afinitat el·líptica o una homotècia de raó -1. En tot cas, tindrà un únic punt fix i, si prenem aquest punt fix com a punt base d'una referència, la seva matriu serà

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hem vist que entre els moviments rígids hi tenim les reflexions, les rotacions i les translacions.[3] De fet, es pot demostrar (exercici **III**.63) que qualsevol moviment rígid es pot expressar com a composició de moviments d'aquests tres tipus i, encara més, tot moviment rígid és composició de reflexions.

[2] En aquest context, seguint la tradició, la paraula «normal» significa «perpendicular».

[3] En certa manera, podríem dir que les translacions, les rotacions i les reflexions són moviments rígids *«per definició»*. L'explicació és aquesta. Recordem que per desenvolupar la geometria d'Euclides-Hilbert necessitem el crucial axioma **III.5** —el criteri CAC de congruència de triangles— i que a l'exercici **I**.38 hem vist que aquest axioma és una conseqüència de l'existència de «prou moviments» a la nostra geometria. Les reflexions, les translacions i les rotacions són «prou moviments» si definim la congruència de segments i angles a partir d'alguna «cosa» que es conservi per aquests tres tipus d'afinitats. Aquesta «cosa» és el producte escalar. En conclusió: definim la congruència de segments i angles a través del producte escalar perquè d'aquesta manera les reflexions, translacions i rotacions seran moviments de la geometria i, en conseqüència, es complirà **III.5**,

25. Classificació dels moviments rígids

Si tenim dos moviments rígids $f, g : X \to X$ d'un espai afí euclidià, ens agradaria poder decidir si són similars (com a moviments rígids) o no ho són. Una condició necessària evident és que han de ser similars com a afinitats i, per tant, han de tenir el mateix nivell d'invariància. Aquesta condició no és suficient perquè, per exemple, ja sabem que totes les translacions són similars com a afinitats però, en canvi, perquè dues translacions siguin similars com a moviments rígids cal que els vectors de translació tinguin la mateixa longitud.

Una altra condició necessària perquè f i g siguin similars és que df i dg siguin isometries similars (com a isometries). Per tant, si volem classificar els moviments rígids cal classificar abans les isometries.

Hi ha un teorema de classificació de les isometries que ens permet decidir quan dues isometries són similars i, de fet, ens permet conèixer exactament quines isometries hi ha, llevat de similitud. Recordem que el cos base és el cos real.

[Classificació de les isometries] Considerem isometries d'un espai vectorial euclidià en ell mateix.

1. *Dues isometries són similars si i només si tenen el mateix polinomi característic.*
2. *Si tenim una isometria qualsevol, existeix una base ortonormal en la qual la matriu de la isometria té aquesta forma*

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & 0 & \\ & & R_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & R_t \end{pmatrix}$$

on $r, s, t \geq 0$, I_m denota la matriu identitat $m \times m$ i cada R_i

és una rotació lineal amb matriu

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

amb $\alpha_i \neq 0, \pi$ *per* $i = 1, \dots, t$.

Aquest resultat s'estudia als cursos d'àlgebra lineal i no el demostrarem.

Per tant, és molt senzill decidir si dues isometries són similars o no i tenim una descripció molt senzilla de com són, llevat d'equivalència, totes les isometries possibles. Si $\phi : V \to V$ és una isometria, aleshores l'espai vectorial V admet una descomposició ortogonal[1] en subespais invariants per ϕ

$$V = V^+ \perp V^- \perp \Pi_1 \perp \cdots \perp \Pi_t, \qquad t \geq 0$$

de manera que

- ϕ és la identitat sobre V^+.
- ϕ és multiplicació per -1 sobre V^-.
- Cada Π_i és un subespai de dimensió 2 i la restricció de ϕ a cada Π_i és una rotació lineal.

Un cop tenim resolt el problema de la similitud $df \sim dg$, l'exemple de les translacions ens mostra que encara necessitem alguna cosa més per decidir si $f \sim g$. Ha de ser alguna cosa relacionada amb el *lliscament*.

Definirem ara el concepte de **vector de lliscament** d'un moviment rígid $f : X \to X$.[2] En primer lloc, expressem l'espai vectorial V com a suma ortogonal

$$V = V^+ \perp (V^+)^\perp.$$

Observem que, per definició,

$$V^+ = \ker(df - I)$$

i, d'altra banda, no és difícil demostrar que

$$(V^+)^\perp = \operatorname{Im}(df - I).$$

[1] Una **descomposició ortogonal** és una descomposició en suma directa de subespais que siguin ortogonals dos a dos.

[2] Els conceptes de *lliscament* i *nivell d'invariància* s'apliquen a les afinitats $f : X \to X$, però aquest concepte de *vector de lliscament* que introduïm ara només s'aplica als moviments rígids. De fet, a la pagina següent comprovarem que el nivell d'invariància d'un moviment rígid només pot ser 0 o 1.

En efecte, si $\vec{v} \in V$ és un vector qualsevol i $\vec{u} \in V^+$, tenim

$$\langle df(\vec{v}) - \vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle df(\vec{v}), \vec{u}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle df(\vec{v}), df(\vec{u})\rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = 0$$

perquè df és una isometria lineal. Això ens demostra que $\mathrm{Im}(df - I) \subseteq (V^+)^\perp$ i, com que les dimensions coincideixen, els dos subespais són iguals.

Escollim un punt $P \in X$ i expressem

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \vec{u} + \vec{v}, \qquad \vec{u} \in V^+,\ \vec{v} \in (V^+)^\perp = \mathrm{Im}(df - I).$$

El vector $\vec{u}$ té aquestes propietats:

- Per construcció, $df(\vec{u}) = \vec{u}$.
- $\vec{u}$ no depèn del punt P que hem escollit. En efecte, si $Q \in X$ és un altre punt qualsevol, descomponem

  $$\overrightarrow{PQ} = \vec{e} + \vec{w}, \quad \vec{e} \in V^+,\ \vec{w} \in (V^+)^\perp.$$

  Tindrem

  $$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = df(\overrightarrow{PQ}) = df(\vec{e}) + df(\vec{w}) = \vec{e} + df(\vec{w}).$$

  Considerem ara la igualtat

  $$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{Pf(P)} + \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

  que ens dóna immediatament que el vector de lliscament que obtenim a partir de Q és el mateix que hem obtingut a partir de P.
- Si $\vec{u} = 0$, f té nivell d'invariància zero; en cas contrari, f té nivell d'invariància 1. En efecte, si $\vec{u} = 0$ tindrem $\overrightarrow{Pf(P)} \in \mathrm{Im}(df - I)$ i existirà un vector $\vec{e} \in V$ tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = df(\vec{e}) - \vec{e}$. Aleshores es comprova immediatament que $P - \vec{e}$ és un punt fix i el nivell d'invariància és zero.

  Demostrem ara que el nivell d'invariància no pot ser més gran que 1. Considerem la descomposició $\overrightarrow{Pf(P)} = \vec{u} + \vec{v}$ on $\vec{u}$. Tindrem

  $$(df - I)(\overrightarrow{Pf(P)}) = (df - I)(\vec{u} + \vec{v}) = (df - I)(\vec{v}) \in \mathrm{Im}(df - I)^2$$

  i, pel teorema de càlcul del nivell d'invariància de la pàgina 162, obtenim $\rho(f) \leq 1$.

Direm que $\overrightarrow{u}$ és el **vector de lliscament** del moviment rígid f i, com que depèn únicament de f, podem denotar-lo per $\overrightarrow{u}_f$. Per exemple, el vector de lliscament d'una translació $T_{\overrightarrow{v}}$ és el vector $\overrightarrow{v}$.

El vector de lliscament és l'ingredient que faltava per poder classificar els moviments rígids. En primer lloc observem que dos moviments rígids similars tenen vectors de lliscament de la mateixa longitud. Suposem que $f \sim g$ són dos moviments rígids similars, amb vectors de lliscament $\overrightarrow{u}_f$ i $\overrightarrow{u}_g$. Existirà un moviment rígid h tal que $hf = gh$ i, en conseqüència, també $dh\,df = dg\,dh$. Per definició del vector de lliscament, sabem que $\overrightarrow{u}_f \in \ker(df - I)$ i que podem escriure

$$\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{u}_f + (df - I)(\overrightarrow{e}).$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h(P)gh(P)} = \overrightarrow{h(P)hf(P)} &= dh(\overrightarrow{Pf(P)}) \\ &= dh(\overrightarrow{u}_f) + dh(df - I)(\overrightarrow{e}) \\ &= dh(\overrightarrow{u}_f) + (dg - I)dh(\overrightarrow{e}).\end{aligned}$$

Si ara observem que $dh(\overrightarrow{u}_f) \in \ker(dg - I)$, deduïm que $dh(\overrightarrow{u}_f) = \overrightarrow{u}_g$ i, com que dh és una isometria, $||\overrightarrow{u}_f|| = ||\overrightarrow{u}_g||$.

En conclusió, tenir vectors de lliscament de la mateixa longitud és una condició necessària perquè dos moviments rígids siguin similars. De fet, si les diferencials són similars, aquesta és també una condició suficient:

> *[Teorema de classificació dels moviments rígids] Dos moviments rígids $f, g : X \to X$ són similars (com a moviments rígids) si i només si les isometries df, dg són similars (com a isometries) i els vectors de lliscament de f i g tenen la mateixa longitud.*

Per demostrar aquest teorema parlarem de la **forma canònica** d'un moviment rígid. Ja hem vist que la matriu d'una isometria lineal es pot escriure, en una certa base ortonormal, en una forma canònica Ψ formada per blocs I_r, I_s i R_i. Si el vector de lliscament d'un moviment rígid és zero, hi haurà un punt fix i, prenent aquest punt fix com a punt base de la referència, obtenim una matriu canònica per al moviment rígid que té la forma

$$\begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En canvi, si hi ha lliscament i $\overrightarrow{u}_f \neq 0$ és el vector de lliscament, ja sabem que $\overrightarrow{u}_f$ serà un vector propi de valor propi 1. Això vol dir que el primer bloc de Ψ

serà una matriu identitat I_r amb $r > 0$. Prenem $\overrightarrow{e}_1 := \overrightarrow{u}_f/||\overrightarrow{u}_f||$ i completem $\overrightarrow{e}_1$ a una base ortonormal de manera que la matriu de la isometria lineal en aquesta base tingui la forma canònica Ψ. Aleshores, igual que hem fet abans, descomponem $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{u}_f + (df - I)(\overrightarrow{e})$. Si prenem com a punt base el punt $P - \overrightarrow{e}$, observem que la matriu de f adquireix la forma canònica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & ||\overrightarrow{u}|| \\ & \Psi & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A partir d'això, el teorema de classificació és clar.

Exercicis

III.1 Considerem l'acció de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre el semiplà superior $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ donada per

$$(x, y) + \overrightarrow{(a, b)} := (x + a, ye^b).$$

Demostreu que X és un espai afí.

III.2 Sigui $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Demostreu que l'acció de $\mathbb{R}$ sobre X donada per $(x, y) + t := (x + t, y + t^2 + 2tx)$ fa de X un espai afí. Vegeu que X no és subvarietat afí de $\mathbb{R}^2$.

III.3 Considereu la circumferència unitat $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ amb l'acció de $\mathbb{R}$ donada per $z + t = ze^{it}$. Decidiu si S^1 és, amb aquesta acció, un espai afí o no ho és.

III.4 Siguin P, Q, R, S quatre punts diferents d'un espai afí. Demostreu que si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, aleshores $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

III.5 Sigui X un espai afí amb espai vectorial associat V. Definim una aplicació $\Phi : X \times X \to V$ per $\Phi(P, Q) := \overrightarrow{PQ}$. Comproveu que aquesta aplicació compleix aquestes propietats:

(a) $\Phi(P, Q) + \Phi(Q, R) = \Phi(P, R)$.

(b) Per tot $P \in X$, l'aplicació $\Psi_P : X \to V$ donada per $\Psi_P(Q) := \Phi(P, Q)$ és bijectiva.

Recíprocament, Suposem que X és un conjunt i V és un espai vectorial i que tenim una aplicació $\Phi : X \times X \to V$ que compleix les condicions dels dos apartats anteriors. Definiu a X una estructura natural d'espai afí sobre V.

III.6 Sigui E un espai vectorial i sigui $V_0 \subsetneq E$ un subespai vectorial. Sigui X el conjunt de tots els subespais vectorials U de E que estan en suma directa amb V_0. Volem definir sobre X una estructura natural d'espai afí sobre l'espai vectorial $W = \mathcal{L}(E/V_0, V_0)$ de les aplicacions lineals de E/V_0 en V_0. Per fer-ho, definim

$$U + \phi := \{\overrightarrow{u} + \phi\pi(\overrightarrow{u}) : \overrightarrow{u} \in U\}$$

on $\pi : E/V_0 \to V_0$ és la projecció natural. Comproveu que això està ben definit i dota X d'estructura d'espai afí sobre W.

III.7 Sigui $\mathcal{P}(H)$ un hiperplà d'un espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ i considerem l'espai afí $A := \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$ sobre l'espai vectorial $W = \mathcal{L}(V/H, H)$ (pàgina 139). Si P, Q són punts de $\mathcal{P}(V)$, identifiqueu $\overrightarrow{PQ} \in W$.

III.8 Demostreu que la recta que passa per A i B està formada per tots els punts que es poden escriure com a combinació afí de A i B.

III.9 Siguin Y, Z, W subvarietats d'un espai afí X tals que $W \supseteq Y \cup Z$. Demostreu que $W \supseteq Y + Z$.

III.10 Demostreu les fórmules de Grassmann afins sense utilitzar les fórmules de Grassmann projectives.

III.11 Siguin $Y_1 = P_1 + F_1$ i $Y_2 = P_2 + F_2$ dues subvarietats d'un espai afí X. Demostreu que $Y_1 = Y_2$ si i només si

(a) $F_1 = F_2$.

(b) $\overrightarrow{P_1P_2} \in F_2$.

III.12 Sigui r_0 una recta d'un pla afí i sigui X el conjunt de totes les rectes paral·leles a r_0. Trobeu una estructura d'espai afí a X. Podeu fer-ho d'una manera natural?

III.13 Considerem quatre punts A, B, C, D en un espai afí (característica diferent de 2); sigui X el punt mig de AC i sigui Y el punts mig de BD. Demostreu que $X = Y$ si i només si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. En particular, les diagonals d'un quadrilàter es tallen en el seu punt mig si i només si el quadrilàter és un paral·lelogram.

III.14 Demostreu el Teorema de Varignon (1791): *«si s'uneixen els punts mitjos dels costats adjacents d'un quadrilàter (no necessàriament contingut en un pla), llavors la figura obtinguda és un paral·lelogram»*. Proveu també que els quatre vèrtex del quadrilàter tenen el mateix baricentre que els punts mitjans dels costats. (El punt mig de AB és, per definició, el baricentre de A i B.)

III.15 Demostreu que un espai afí de dimensió > 1 compleix l'axioma de coplanaritat (nota 8 de la pàgina 20) si i només si la dimensió és 2 i el cos base té característica diferent de 2.

III.16 Sigui X un espai afí amb cos base k de característica diferent de dos i sigui $Y \subseteq X$ un subconjunt no buit. Demostreu que Y és una subvarietat afí de X si i només si

$$P, Q \in Y \quad \Longrightarrow \quad (1 - \lambda)P + \lambda Q \in Y \text{ per tot } \lambda \in k.$$

Demostreu que el resultat també és cert en característica 2, sempre que el cos k tingui més de dos elements.

III.17 Demostreu aquestes propietats de les combinacions afins:

(a) Si $\lambda_0 = 0$, aleshores $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.

(b) Si $P_0 = P_1$, aleshores $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = (\lambda_0 + \lambda_1) P_0 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$.

(c) Si $Q = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$ i $P_0 = \mu_0 R_0 + \mu_1 R_1$ són combinacions afins, aleshores Q es pot escriure com a combinació afí de R_0, R_1 i P_1.

(d) Si $Q = \lambda P_0 + \mu P_1$ és una combinació afí i si $\lambda \neq 0$, aleshores P_0 es pot escriure com a combinació afí de Q i P_1.[1]

III.18 Siguin $A_1, \ldots, A_r$ punts d'un espai afí. Demostreu que són equivalents:

(a) Cap d'aquests punts no és combinació afí dels altres.

(b) Si $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = \mu_1 + \ldots + \mu_r = 1$ i

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_r A_r$$

aleshores $\lambda_i = \mu_i$, $1 \leq i \leq r$.

Si es compleixen aquestes propietats, direm que els punts $A_1, \ldots, A_r$ són **afinament independents**.

III.19 Considerem $\mathbb{R}^2$ amb l'estructura ordinària d'espai afí. Donats dos punts A, B, definim

$$S(A, B)(t) := (1 - t)A + tB$$

on t és un paràmetre $0 \leq t \leq 1$. És clar que $S(A, B)$ és una parametrització del segment AB. Considerem ara quatre punts P_0, P_1, P_2, P_3 de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Definim la **corba de Bézier cúbica** donada per aquests punts com la corba parametritzada $B(t)$ definida d'aquesta manera:

$$Q_0 := S(P_0, P_1);\ Q_1 := S(P_1, P_2);\ Q_2 := S(P_2, P_3);$$

$$R_0 := S(Q_0, Q_1);\ R_1 := S(Q_1, Q_2);\ B = S(R_0, R_1).$$

(a) Escriviu $B(t)$ de manera explícita com a combinació afí de P_0, P_1, P_2, P_3.

(b) Demostreu que la recta tangent a la corba $B(t)$ per $t = 0$ és la recta $P_0 P_1$.

(c) Justifiqueu que la corba $R_0(t)$ no pot tenir cap cúspide, però la corba $B(t)$ sí que en pot tenir.[2]

[1] En aquest exercici i en alguns de més endavant és important recordar que és il·legal escriure «combinacions lineals» de punts quan els coeficients no sumen 1.

[2] Quan utilitzem qualsevol programa de disseny gràfic, disposem d'una eina per unir dos punts —anomenats «nodes»— per una corba. Si dibuixem aquesta corba, veiem que podem controlar la seva forma desplaçant dos punts que apareixen sobre les rectes tangents a la corba en cada node. Estem dibuixant una corba de Bézier cúbica basada en els quatre punts que tenim: els dos nodes i els dos punts que apareixen sobre les tangents.

III.20 Siguin $A_0, \ldots, A_n$ punts d'un espai afí X de dimensió n. Demostreu que són equivalents:

(a) Els punts són afinament independents.

(b) No hi ha cap subvarietat pròpia de X que els contingui tots.

(c) $A_0 + \cdots + A_n = X$ (suma entesa com a suma de subvarietats).

(d) Els vectors $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ són linealment independents.

III.21 Siguin $A_0, \ldots, A_n$ punts afinament independents d'un espai afí X de dimensió n sobre un cos k. Demostreu que si $P \in X$, existeixen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k$ únics tals que $P = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$. Es diu que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ són les **coordenades baricèntriques** de P respecte dels punts $A_0, \ldots, A_n$.

III.22 Demostreu que si en un espai afí tenim $P = \lambda A + \mu B$ (amb $\lambda + \mu = 1$) i $B = \alpha C + \beta D$ (amb $\alpha + \beta = 1$), aleshores es compleix que $P = \lambda A + \mu\alpha C + \mu\beta D$. Apliqueu-ho a demostrar que (en característica diferent de 2 i 3) les medianes d'un triangle es tallen en el baricentre del triangle.

III.23 Sigui X un pla afí sobre un cos ordenat k. Si $A, B, C \in X$, direm que A està entre B i C si existeix $\lambda \in k$ amb $0 < \lambda < 1$ tal que $A = (1 - \lambda)B + \lambda C$. Demostreu que, amb aquesta definició, X compleix els axiomes d'ordre de Hilbert. (Utilitzeu les propietats de les combinacions afins que apareixen als exercicis 17 i 22.)

III.24 Suposem que a un espai afí k^2 hi ha definida una relació d'«estar entre» de manera que es compleixen els axiomes d'ordre de Hilbert. Definim un subconjunt $P \subset k$ per

$$P := \{a \in k - \{0\} : (0,0) \text{ no està entre } (1,0) \text{ i } (a,0)\}.$$

es tracta de demostrar que P dota k d'estructura de cos ordenat (segons l'exercici **I.44**).

(a) Demostreu que $(a, 0)$ està entre $(b, 0)$ i $(c, 0)$ si i només si $(0, a)$ està entre $(b, 0)$ i $(c, 0)$ (considereu les rectes $x + y = a$, $x + y = b$, $x + y = c$).

(b) Demostreu que $a \in P$ si i només si $-a \notin P$ (apliqueu les propietats de la pàgina 23 a la recta $x + y = 0$ i al segment que uneix $(a, 0)$ amb $(0, a)$).

(c) Demostreu que si $a, b \in P$, aleshores $a + b \in P$ (considereu el triangle de vèrtex (b, a), $(b, 0)$, $(a + b, 0)$).

(d) Demostreu que si $a, b \in P$, aleshores $ab \in P$ (considereu un dibuix com el de la pàgina 45).

(e) Demostreu que k és un cos ordenat.

III.25 En un espai afí de dimensió 4 sobre un cos de característica zero (amb una certa referència fixada), trobeu equacions cartesianes i paramètriques per aquestes varietats lineals:

(a) La recta que passa pels punts $(2, -1, 0, -2)$ i $(1, 1, 1, 0)$.

(b) El pla que passa pels punts $(3, 0, 1, 1)$, $(1, -1, 1, 2)$ i $(-3, -1, 0, 1)$.

(c) La varietat lineal de dimensió 3 que passa pels quatre punts $(2, -1, 3, 2)$, $(0, -1, 1, 0)$, $(1, -1, -1, 3)$ i $(2, 1, -2, -1)$.

III.26 En un espai afí de dimensió 4 (amb una referència fixada) trobeu equacions cartesianes i paramètriques per al pla que passa pel punt $(1, 4, 1, 2)$ i és paral-lel al pla

$$\begin{cases} 2x - y - z + t = 2, \\ x + 2y - t = 5. \end{cases}$$

III.27 A un espai afí de dimensió 3 sobre un cos de característica zero (amb una referència fixada $\mathcal{R}$) considerem la referència

$$\mathcal{R}' = \{(-1, 0, 1); (1, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)\}$$

(a) Donat el punt de coordenades $(2, 1, -1)$ en la referència $\mathcal{R}$, determineu les seves coordenades en la referència $\mathcal{R}'$.

(b) Considereu el pla que en la referència $\mathcal{R}$ té equació $x - y + 3z = 7$. Trobeu la seva equació respecte de $\mathcal{R}'$.

(c) Considereu la recta que en la referència $\mathcal{R}$ té equació

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

Trobeu les seves equacions en la referència $\mathcal{R}'$.

III.28 Sigui f una afinitat. Demostreu que f és bijectiva si i només si df és un isomorfisme.

III.29 Siguin A, B espais afins (característica $\neq 2$) i sigui $f : A \to B$ una aplicació que compleix que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ per tot $P, Q \in A$ i tot λ, μ amb $\lambda + \mu = 1$. És a dir, f conserva les combinacions afins. Demostreu que f és una afinitat. (Indicació: apliqueu l'exercici 13.)

III.30 Demostreu que el conjunt de punts fixos d'una afinitat $f : X \to X$ és buit o és una subvarietat de X.

III.31 Considereu l'afinitat $f : X \to Y$ (cos base de característica zero) donada, respecte d'unes certes referències, per

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu les equacions de f respecte de les referències

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,0,0); (2,-1,0), (0,2,-1), (-1,0,2)\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(2,1); (1,1), (1,-1)\}.$$

III.32 Sigui X un espai afí de dimensió 3 sobre un cos de característica zero i sigui $f : X \to X$ l'afinitat donada (en una certa referència) per

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = -1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Trobeu els seus punts fixos. Trobeu la transformada de la recta $x = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$. Determineu l'antiimatge del pla d'equació $x - y - z = 2$.

III.33 Demostreu que la condició necessària i suficient perquè una recta $L = P + \langle \vec{v} \rangle$ sigui invariant per una afinitat f és que $\vec{v}$ sigui vector propi de df i $\overrightarrow{Pf(P)}$ sigui múltiple de $\vec{v}$.

III.34 Una *pseudoreflexió* és una afinitat $f : X \to X$ diferent de la identitat que deixa fixos els punts d'un hiperplà. En particular, les reflexions són casos particulars de pseudoreflexions. Suposem que tenim una pseudoreflexió f d'un espai afí de dimensió $n > 1$. Demostreu que existeix una referència $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ tal que la matriu de f en aquesta base té alguna d'aquestes dues formes ($\lambda \neq 1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.35 Demostreu que si una afinitat en un pla afí té dues rectes paral·leles (diferents) invariants, aleshores totes les rectes paral·leles a aquestes dues són invariants. Què passa si substituïm «afinitat» per «semi-afinitat»?[3]

[3] La segona part de l'exercici ens diu que és impossible resoldre la primera part sense utilitzar coordenades, es a dir, usant només geometria axiomàtica.

III.36 Sigui M la matriu d'una afinitat $f : X \to X$ en una certa referència i sigui $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ l'equació d'un hiperplà H de X. Demostreu que l'equació de l'hiperplà $f(H)$ s'obté[4] fent el producte de matrius $(a_1, \ldots, a_n, b)\,M^{-1}$.

III.37 En un pla afí sobre el cos $\mathbb{Q}$ (amb una certa referència), escriviu les equacions de la reflexió respecte de la recta $2x + 3y = 2$ amb arrel $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{(1,1)}$.

III.38 Sigui $X = \mathbb{Q}^3$ amb l'estructura afí canònica. Escriviu la matriu de l'afinitat $f : X \to X$ sabent que $f(1,1,0) = (0,0,0)$ i que la restricció de f al pla $x + y = 1$ és una translació de vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0,1)}$.

III.39 Sigui $f : X \to X$ una afinitat i sigui n invertible al cos base. Demostreu que si f^n té un punt fix, aleshores f també té un punt fix. Podem suprimir la condició sobre n? (Indicació: utilitzeu el baricentre.)

III.40 Sigui G un conjunt finit d'afinitats d'un espai afí X que tingui estructura de grup (amb la composició d'aplicacions). Demostreu que si el nombre d'elements de G és invertible al cos base, aleshores hi ha un punt $A \in X$ tal que $f(A) = A$ per tota afinitat $f \in G$.

III.41 Sigui X un pla afí sobre el cos real i sigui $f := X \to X$ una afinitat diferent de la identitat tal que $f^3 = I$. Determineu f.

III.42 Sigui X un espai afí de dimensió > 2 sobre el cos $\mathbb{F}_2$. Demostreu que hi ha col·lineacions $f : X \to X$ que no són afinitats. Doneu dues demostracions: una comparant el nombre de col·lineacions amb el d'afinitats i l'altra mostrant una col·lineació concreta que no sigui una afinitat.

III.43 Considereu l'afinitat d'un pla afí sobre $\mathbb{Q}$ donada (en una certa referència) per la matriu M:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que és una reflexió. Trobeu l'eix, una arrel i una referència en la qual la matriu s'expressi en la forma B.

III.44 Considereu l'afinitat d'un pla afí sobre $\mathbb{Q}$ donada (en una certa referència) per la matriu M:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -22 \\ 12 & -5 & -53 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4] Aquest exercici ens dóna un mètode per trobar les rectes invariants d'una afinitat del pla com a vectors propis de la matriu transposada. És clar que tot això té relació amb el principi de dualitat.

Demostreu que és una reflexió amb lliscament. Trobeu una referència en la qual la matriu s'expressi en la forma B.

III.45 Sigui f una afinitat d'un pla afí real que no té cap punt fix i que té una única recta invariant. Demostreu que existeix $a \neq 1$ i una referència en la qual la matriu de f és

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.46 Considereu aquestes dues afinitats d'un espai afí real de dimensió 3:

$$f = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & -1 \\ -4 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determineu tots els valors del paràmetre a que fan que f i g siguin similars (si és que n'hi ha algun).

III.47 Siguin A, B, C tres punts (diferents) alineats. Demostreu aquestes propietats de la raó simple:

(a) $(A, B, C)\,(B, C, A) = -(C, B, A)$.

(b) $(A, B, C)\,(A, C, B) = 1$.

(c) $A = A'$ si i només si $(A, B, C) = (A', B, C)$.

III.48 Demostreu que una afinitat bijectiva conserva la raó simple.

III.49 Sigui X una recta afí i sigui $f : X \to X$ una aplicació bijectiva que conservi la raó simple. Demostreu que f és una afinitat.

III.50 Siguin A, B, C tres punts no alineats en un pla afí sobre un cos de característica diferent de 2 i siguin P, Q, R tres punts (diferents dels tres anteriors) tals que P està sobre la recta AB, Q està sobre la recta BC i R està sobre la recta AC.

(a) Trobeu una combinació lineal $\lambda_1\overrightarrow{PB}+\lambda_2\overrightarrow{QC}+\lambda_3\overrightarrow{RA} = 0$ amb $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

(b) Demostreu el **teorema de Menelau**:[5] els punts P, Q i R estan alineats si i només si $(P, A, B)\,(Q, B, C)\,(R, C, A) = 1$.

(c) Demostreu el **teorema de Ceva**:[6] les rectes PC, QA i RB són concurrents si i només si $(P, A, B)\,(Q, B, C)\,(R, C, A) = -1$. (Indicació: apliqueu dues vegades el teorema de Menelau.)

[5] Menelau d'Alexandria va ser un geòmetra del segle I.

[6] Giovanni Ceva va ser un geòmetra italià del segle XVII que va redescobrir el teorema de Menelau i va publicar el teorema que du el seu nom. L'any 1985 es va trobar un exemplar de l'obra principal de Yússuf al-Mútaman —matemàtic del segle XI i emir de Saragossa— i es va veure que ja contenia el teorema de Ceva.

Espais afins euclidians

III.51 Demostreu que el segment delimitat pels punts A i B en un espai afí euclidià està format per tots els punts P tals que $(P, A, B) \leq 0$.

III.52 En un espai afí euclidià, demostreu la desigualtat triangular i el teorema de Pitàgores.

III.53 Demostreu que en un espai afí euclidià, una recta que no passi per cap dels vèrtex A, B, C d'un triangle no pot tallar els tres segments delimitats per A, B i C.

III.54 Siguin L_1 i L_2 dues subvarietats afins d'un espai afí euclidià i siguin $Q_1 \in L_1$, $Q_2 \in L_2$. Demostreu que $d(Q_1, Q_2) = d(L_1, L_2)$ si i només si la recta Q_1Q_2 és perpendicular a L_1 i a L_2.

III.55 Sigui $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funció tal que

(a) $f(x) = 0$ si i només si $x = 0$.

(b) $f(x) + f(\lambda^2 x) = f((1 + \lambda)^2 x)$ per tot $x, \lambda > 0$.

Demostreu que existeix $\alpha > 0$ tal que $f(x) = \alpha\sqrt{x}$ per tot x.

III.56 Demostreu que si V i W són espais vectorials euclidians i $\phi : V \to W$ conserva el producte escalar, aleshores ϕ és lineal.

III.57 Sigui $f : X \to X$ una reflexió ortogonal d'arrel unitària $\vec{n}$ i suposeu que Q és un punt del mirall de f. Demostreu que

$$f(P) = P - 2\,\langle \overrightarrow{QP}, \vec{n} \rangle\, \vec{n}$$

per tot $P \in X$.

III.58 Sigui $\vec{u}$ el vector de lliscament d'un moviment rígid $f : X \to X$. Demostreu que

$$||\vec{u}|| = \text{mín}\{d(P, f(P)) : P \in X\}.$$

III.59 En un pla afí euclidià, una *rotació* és un moviment rígid f tal que l'isomorfisme lineal df té determinant 1. Si R és una rotació i fixem una referència, demostreu que existeix $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ únic (s'anomena l'angle de rotació de R) tal que dR ve donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Demostreu que tota rotació (diferent de la identitat) té un únic punt fix. S'anomena, és clar, el *centre* de la rotació. Demostreu que dues rotacions són similars si i només si els seus angles són iguals llevat del signe.

III.60 En un pla afí euclidià, sigui σ una reflexió ortogonal respecte d'una recta i sigui R_θ una rotació d'angle θ. Demostreu que $\sigma R_\theta \sigma$ és una rotació i determineu el seu angle de rotació.

III.61 En un pla afí euclidià, sigui σ una reflexió ortogonal respecte d'una recta. Prenem una referència ortonormal. Demostreu que existeix $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ únic tal que $d\sigma$ ve donat per la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

III.62 En un pla afí euclidià, siguin σ_i, $i = 1, 2$ dues reflexions ortogonals respecte de dues rectes no paral·leles $P_i + \langle \overrightarrow{v}_i \rangle$, $i = 1, 2$. Demostreu que $\sigma_1\sigma_2$ és una rotació i determineu el seu centre i el seu angle de rotació.

III.63 Demostreu que tot moviment rígid és producte de reflexions.

III.64 Sigui R una rotació d'un pla afí euclidià i sigui P un punt que no quedi fix: $R(P) = Q \neq P$. Demostreu que el centre de R pertany a la recta

$$r : P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle^\perp.$$

III.65 Considerem tres rectes d'un pla afí euclidià que determinin un triangle i siguin σ_1, σ_2, σ_3 les reflexions ortogonals respecte de cadascuna d'aquestes tres rectes. Classifiqueu el moviment rígid $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Estudieu també els casos quan les tres rectes són concurrents o paral·leles.

III.66 A $\mathbb{R}^3$ amb l'estructura ordinària d'espai afí euclidià, sigui σ la reflexió ortogonal respecte del pla $x - y - 3z = 3$. Calculeu $\sigma(r)$ si r és la recta

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ x + y - z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

III.67 En una certa referència, una afinitat d'un pla afí real s'escriu

$$\left.\begin{aligned} x' &= 8x - 49y + 3 \\ y' &= x - 6y - 1 \end{aligned}\right\}$$

Pot haver-hi alguna estructura d'espai afí euclidià al pla de manera que aquesta afinitat sigui un moviment rígid?

III.68 Considereu l'afinitat del pla afí $\mathbb{R}^2$ d'equacions

$$\left.\begin{aligned} 3x' &= (2\sqrt{2} - 1)x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2} + 5 \\ 3y' &= -2x + (1 - 2\sqrt{2})y + 2\sqrt{2} + 9 \end{aligned}\right\}$$

escrites en la referència

$$\mathcal{R} = \left\{(1,2); \overrightarrow{(-1,-1)}, \overrightarrow{(1,0)}\right\}.$$

Comproveu que és un moviment rígid i classifiqueu-lo.

III.69 A l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$ considereu el moviment rígid donat (en la referència canònica) per

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{9}(-8x - y + 4z) \\ y' &= \frac{1}{9}(-x - 8y - 4z) + 1 \\ z' &= \frac{1}{9}(4x - 4y + 7z) - 1 \end{aligned}\right\}$$

determineu el vector de lliscament i una referència ortonormal en la qual el moviment rígid s'expressi en la seva forma canònica.

III.70 Al pla afí $\mathbb{R}^2$ considerem el producte escalar definit per

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 2, \quad \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 3, \quad \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -1$$

on $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ és la base canònica. Demostreu que és un producte escalar definit positiu i considereu $\mathbb{R}^2$ com un pla afí euclidià amb aquest producte escalar. Trobeu la imatge del punt $P = (1, -1)$ per la reflexió ortogonal d'eix $x + 2y = 1$.

III.71 Trobeu a l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^4$ la distància del pla

$$\Pi : \left\{ \begin{aligned} y - z - 2 &= 0 \\ x + y - 3t + 3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

a la recta $r : (-1, 1, 1, 4) + \langle (2, 1, 1, -1) \rangle$. Doneu punts del pla i la recta que realitzin aquesta distància.

III.72 Sigui L la varietat lineal de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^4$ donada per

$$\left\{ \begin{aligned} & x - y + z = -1 \\ & 2x - z + t = 3. \end{aligned} \right.$$

Trobeu el pla Π ortogonal a L tal que $L \cap \Pi = \{(1, 1, -1, 0)\}$.

III.73 Els *associaedres*[7] són una família de políedres convexos $K_n \subset \mathbb{R}^{n-2}$. Per exemple, K_3 és un segment i K_4 és un pentàgon. Com passa sovint,[8] la definició

[7] Aquests políedres els va descobrir James Stasheff el 1963 en els seus estudis sobre la propietat associativa llevat d'homotopia. En particular, els vèrtex de K_n estan en correspondència bijectiva amb les maneres diferents d'associar n elements. La definició més senzilla en dimensió una més de la necessària la va trobar Jean-Louis Loday l'any 2002.

[8] Per exemple, la definició més senzilla del triangle equilàter s'obté definint els seus vèrtex com els punts $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, encara que el triangle equilàter sigui un polígon de $\mathbb{R}^2$.

més senzilla d'aquests políedres s'obté en un espai de dimensió superior a la necessària, en aquest cas, $\mathbb{R}^{n-1}$. Per exemple, els 14 vèrtex de K_5 són aquests punts de $\mathbb{R}^4$:

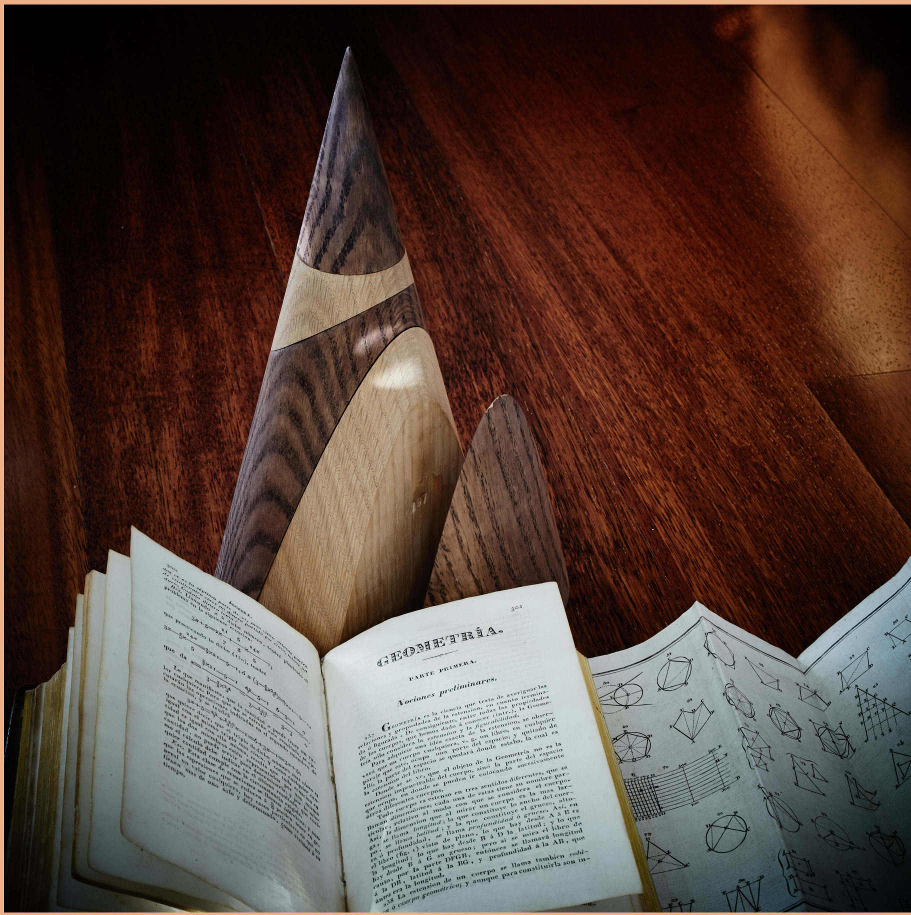
$$\begin{array}{rrrr} V_1 = (4,1,2,3), & V_2 = (3,1,2,4), & V_3 = (3,2,1,4), & V_4 = (4,2,1,3) \\ V_5 = (1,4,1,4), & V_6 = (1,6,1,2), & V_7 = (1,6,2,1), & V_8 = (1,2,6,1) \\ V_9 = (2,1,6,1), & V_{10} = (4,1,4,1), & V_{11} = (2,1,3,4), & V_{12} = (1,2,3,4) \\ V_{13} = (4,3,2,1), & V_{14} = (4,3,1,2) & & \end{array}$$

Observem que tots aquests punts pertanyen a l'hiperplà H d'equació $x + y + z + t = 10$. Per tant, $K_5 \subset H \cong \mathbb{R}^3$. Com a informació suplementària sobre K_5 direm que té 9 cares que es troben sobre aquests hiperplans de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rrr} 3x - y - z - t + 6 = 0 & 3y - x - z - t + 6 = 0 & 3z - x - y - t + 6 = 0 \\ 3t - x - y - z + 6 = 0 & x + y - z - t + 4 = 0 & y + z - x - t + 4 = 0 \\ z + t - x - y + 4 = 0 & x + y + z - 3t + 6 = 0 & y + z + t - 3x + 6 = 0 \end{array}$$

Feu un model de cartró d'aquest políedre K_5 de manera hi hagi una cara que tingui com a vèrtex V_1, V_2, V_3, V_4 en aquest ordre en el sentit de les agulles del rellotge (mirant el políedre des de l'exterior).[9]

[9] Observem que el fet de definir K_5 a $\mathbb{R}^4$ fa que hi hagi dues maneres de representar-lo a $\mathbb{R}^3$, que són imatge especular una de l'altra. La informació addicional sobre l'orientació d'una cara concreta ens determina una d'aquestes dues imatges especulars.



IV

Quàdriques

26. Quàdriques

La geometria lineal estudia —des de punts de vista diversos— objectes geomètrics com les rectes i els plans, que anomenem «lineals» i que, en definitiva, quan prenem coordenades, vénen descrits per equacions de primer grau. Si volem anar més enllà d'aquests objectes de primer grau, estarem transcendint la geometria lineal per entrar al què es coneix com a **geometria algebraica**: l'estudi geomètric dels objectes —corbes, superfícies,...— que, prenent coordenades, vénen descrits per equacions *algebraiques* de grau arbitrari, és a dir, per polinomis en diverses variables.

Les **quàdriques** —objectes algebraics *de segon grau* que definirem amb precisió d'aquí a un moment— es situen, en certa manera, a la frontera entre el món lineal i el món de la geometria algebraica. També per motius històrics. El concepte de quàdrica inclou les clàssiques seccions d'un con —la circumferència, l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola— i superfícies com l'el·lipsoide, els hiperboloides, etc. i és clar que la circumferència forma part, de manera essencial, de la geometria d'Euclides que, per tant, no és una geometria purament lineal. També hi ha motius estrictament matemàtics que fan que l'estudi de les quàdriques sigui potser més proper als mètodes de l'àlgebra lineal que no pas als mètodes més generals de la geometria algebraica.

En aquesta darrera part del curs estudiarem les quàdriques i ho farem de manera una mica diferent a com ho hem fet en l'estudi dels objectes lineals. Per exemple:

- Abandonarem el mètode axiomàtic i, des del primer moment, adoptarem un punt de vista algebraic. L'elegància del tractament axiomàtic del concepte de *«recta que passa per dos punts»* no es pot transportar al cas, per exemple, de les corbes: el principi *«l'anàlisi lògica de la nostra intuïció de l'espai»* perd part de la seva validesa quan ens preguntem, per exemple, què hi ha a la nostra «intuïció» que ens permeti distingir entre la cissoide de Diocles —una corba algebraica de tercer grau— i la quadratriu d'Hípies —una corba transcendent.[1]

[1]Tanmateix, en el cas de les quàdriques, el tractament axiomàtic sí que és possible. El

- Estudiarem simultàniament el cas afí i el cas projectiu. Ja sabem que l'espai afí és una part de l'espai projectiu —concretament, el complement d'un hiperplà— i, quan considerem una quàdrica, sovint no ens caldrà dir si només considerem la seva part afí o si considerem tota la quàdrica *completa*.

- Distingirem, per primera vegada, entre un objecte geomètric i els seus punts. Aquest és un punt de vista característic de la geometria algebraica. Pensem, per exemple, en la cònica $x^2 + y^2 + 1$ que no té cap punt en el pla real i, malgrat això, la considerarem com una cònica de ple dret i com una cònica diferent de la cònica $x^2 + 1$ que tampoc té cap punt en el pla real. Tanmateix, aquestes dues còniques sí que tenen punts en algun cos més gran que el cos real. Una cònica no serà, doncs, un conjunt de punts, sinó que serà un polinomi de segon grau $p(x, y)$, i els punts de la cònica (en un cert cos) seran les solucions de $p(x, y) = 0$ (en aquest cos).

Quàdriques a l'espai afí

Sigui X un espai afí de dimensió n sobre un cos k, amb una referència fixada —que ens permet identificar X a l'espai afí canònic k^n. Una **quàdrica** de X serà un polinomi de segon grau en n variables $x_1, \dots, x_n$

$$p(x_1, \dots, x_n)$$

amb coeficients al cos k, **mòdul** la relació d'equivalència

$$p(x_1, \dots, x_n) \sim \lambda\, p(x_1, \dots, x_n) \text{ si } \lambda \neq 0,\ \lambda \in k.$$

Per tant, una quàdrica és una *classe d'equivalència* de polinomis de segon grau encara que, per abús de llenguatge, parlarem de «la quàdrica p» quan hauríem de parlar de «la quàdrica $[p]$».

Anomenarem **còniques** a les quàdriques en un espai de dimensió $n = 2$.

Els **punts de la quàdrica** $p(x_1, \dots, x_n)$ seran els punts $(a_1, \dots, a_n) \in X$ tals que $p(a_1, \dots, a_n) = 0$. Observem que és un concepte ben definit perquè dos polinomis que difereixen en una constant no nul·la donen els mateixos punts.

---

cas més conegut és el de les còniques del pla, que poden definir-se d'aquesta manera: una cònica d'un pla projectiu X és el conjunt dels punts on es tallen les rectes corresponents per una projectivitat (que no sigui una perspectivitat) entre dos feixos de rectes. (Vegeu l'exercici **IV**.28.

Com sempre que introduïm algun objecte nou, hem d'incloure-hi una noció d'objectes equivalents. Suposem que $f : X \to X$ és una afinitat. Si escrivim f en coordenades, veiem que f indueix una aplicació del conjunt de polinomis en n variables en ell mateix

$$f_* : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n].$$

Per exemple, si $n = 2$ i $f(x, y) = (x+y-1, y+1)$, tenim que $f_*(x^2+y^2-2) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x$. Això ens permet aquesta definició: direm que dues quàdriques p i q de X són **equivalents** si existeix una afinitat bijectiva $f : X \to X$ tal que $f_*(p) = q$.[2]

Exemples

- Per exemple, si la característica de k és $\neq 2$, la cònica $x^2 - y^2$ és equivalent a la cònica xy per l'afinitat $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
- Suposem que $k = \mathbb{F}_5$ és el cos de 5 elements. La transformació $f(x, y, z) = (x+y, y-x, z)$ ens mostra que les quàdriques $x^2+y^2+2z^2$ i $x^2+y^2+z^2$ són equivalents. En canvi, les còniques x^2+2y^2 i x^2+y^2 no són equivalents.[3]

Quàdriques a l'espai projectiu

Considerem l'espai projectiu $P_n(k)$ de dimensió n sobre un cos k. Els punts de l'espai vindran donats per les seves coordenades homogènies

$$Q = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

i, en general, si $p(x_1, \dots, x_{n+1})$ és un polinomi, no té sentit dir si $p(Q) = 0$, precisament perquè, si $\lambda \neq 0$,

$$\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}\}.$$

En tot cas, $p(Q) = 0$ sí que té sentit si p és un **polinomi homogeni**, és a dir, un polinomi on tots els seus monomis tenen el mateix grau.

Per exemple, $p = x^2 - y^2 + 3xy$ és un polinomi homogeni, mentre que $q = x^2 - y^2 + 3x + 2$ no ho és. Observem que sí que té sentit preguntar-se si $p(Q) = 0$ perquè

$$p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^2 p(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

[2] Recordem l'abús de llenguatge d'escriure p en lloc de $[p]$ per designar una quàdrica. És a dir, quan escrivim $f_*(p) = q$ de fet volem dir $f_*(p) = \lambda q$ per algun $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$.

[3] Vegeu la nota 5 de la pàgina 210.

Una **quàdrica** de $P_n(k)$ serà un polinomi homogeni de segon grau en $n+1$ variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

amb coeficients al cos k, **mòdul** la relació d'equivalència

$$p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim \lambda\, p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ si } \lambda \neq 0,\ \lambda \in k.$$

Els **punts de la quàdrica** $p(x_1, \ldots, x_{n+1})$ seran els punts $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \in P_n(k)$ tals que $p(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$. Observem que és un concepte ben definit.

Dues quàdriques p i q de $P_n(k)$ són **equivalents** si existeix una homografia $f : P_n(k) \to P_n(k)$ que transforma una en l'altra. Observem que una homografia ens dóna una matriu ben definida llevat d'una constant no nul·la, que ens serveix per transformar cada polinomi homogeni en un altre polinomi homogeni, ben definit llevat d'una constant no nul·la.

Relació entre quàdriques projectives i quàdriques afins

Hem dit que no distingiríem entre quàdriques projectives i quàdriques afins i el motiu és que «gairebé» són la mateixa cosa. Recordem la relació entre l'espai projectiu $P_n(k)$ i l'espai afí k^n. La relació ve donada per

$$k^n = P_n(k) - \{x_{n+1} = 0\}.$$

És a dir, k^n s'obté a partir de $P_n(k)$ suprimint un hiperplà que, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que és l'hiperplà d'equació $x_{n+1} = 0$.

Amb aquesta identificació de l'espai afí com una «part» de l'espai projectiu, hi ha una correspondència senzilla entre les coordenades homogènies d'un punt de l'espai projectiu (fora de l'hiperplà $x_{n+1} = 0$) i les coordenades d'aquest mateix punt a l'espai afí. Aquesta correspondència ve donada per

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \{x_1, \ldots, x_n, 1\} \\ \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) &\longleftarrow\!\shortmid \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \end{aligned}$$

Aquesta correspondència ens dóna una correspondència entre quàdriques afins i quàdriques projectives. Recordem que una quàdrica afí és un polinomi de segon grau en n variables (mòdul una constant no nul·la) i que una quàdrica projectiva és un polinomi homogeni de segon grau en $n+1$ variables (mòdul una constant no nul·la). Disposem d'aquests dos processos:

- **Homogeneïtzació**: de l'espai afí a l'espai projectiu.[4]

$$p(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_{n+1}^2 \, p\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right).$$

  Per exemple, si homogeneïtzem el polinomi en dues variables

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - y + 1$$

  obtenim el polinomi homogeni en tres variables[5]

$$x^2 + y^2 - 2xy + xz - yz + z^2.$$

- **Deshomogeneïtzació**: de l'espai projectiu a l'espai afí.

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto p(x_1, \dots, x_n, 1).$$

  Per exemple, si deshomogeneïtzem el polinomi homogeni en tres variables

$$x^2 - y^2 + 2yz + z^2$$

  obtenim el polinomi en dues variables

$$x^2 - y^2 + 2y + 1.$$

Observem que aquests dos processos «conserven» els punts de les quàdriques: els punts de la quàdrica afí són els punts de la quàdrica projectiva que estan fora de l'hiperplà $x_{n+1} = 0$.

Els dos processos no són exactament invers un de l'altre. Observem que si deshomogeneïtzem $z^2 + xz + yz$ obtenim $1 + x + y$ que no és un polinomi de segon grau i, per tant, no és una quàdrica afí. Aquest problema només apareix quan comencem amb una quàdrica projectiva que és divisible per x_{n+1}. En conclusió,

> *Hi ha una correspondència bijectiva entre les quàdriques de k^n i les quàdriques de $P_n(k)$ que no són divisibles per x_{n+1}. En aquesta correspondència, els punts de la quàdrica afí són els punts de la quàdrica projectiva que estan a l'espai afí.*

[4]L'exponent 2 és degut a que homogeneïtzem polinomis de grau 2. El procés també es pot fer en qualsevol grau r canviant x_{n+1}^2 per x_{n+1}^r.

[5]Una manera informal d'explicar el procés d'homogeneïtzació podria ser dir que «convertim tots els monomis en monomis de segon grau afegint una potència convenient d'una nova variable x_{n+1}».

En conseqüència, quan parlem d'una quàdrica, no farem distinció entre si la considerem quàdrica afí o la considerem quàdrica projectiva.

Les coses canvien quan tenim en compte els conceptes afí i projectiu de quàdriques equivalents. Dues quàdriques projectives equivalents (com a quàdriques projectives) pot ser que no ho siguin com a quàdriques afins. L'explicació és que l'equivalència projectiva pot venir donada per una homografia que mogui l'hiperplà $x_{n+1} = 0$ i, per tant, no doni lloc a una afinitat. Estudiarem tot això amb més detall més endavant i serà el moment quan donarem sentit aquestes frases de la pàgina 50:

> *Si poguéssim imaginar l'infinit com una recta, totes aquestes estranyes metamorfosis de l'el·lipse serien molt menys misterioses. Imaginem una el·lipse que no toca la recta de l'infinit: veiem una el·lipse. L'el·lipse es va acostant a l'infinit fins que toca l'infinit en un únic punt: veiem una paràbola. Finalment, l'el·lipse és tallada per l'infinit: veiem una hipèrbola, amb una branca a cada costat de l'infinit. Són imaginacions aparentment absurdes, però si tinguessin una base matemàtica sòlida ens permetrien entendre les tres còniques com una mateixa corba, situada en tres posicions diverses respecte de l'infinit. Llàstima que això de «l'infinit» no sapiguem —de moment— què vol dir!*

27. Quatre punts de vista sobre les quàdriques

En aquest capítol estudiarem fins a quatre maneres diferents —però essencialment equivalents— de considerar les quàdriques. Suposarem sempre que la característica del cos base és diferent de dos.

1. El punt de vista bilineal

Ja hem parlat en algun capítol anterior de *productes escalars* en un espai vectorial. Ho tornarem a fer ara amb més generalitat. V serà un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos k. Una **forma bilineal simètrica** a V és una aplicació

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow k \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

que compleix aquestes propietats:

1. Per cada $\vec{v} \in V$, l'aplicació $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ és lineal.
2. Per cada $\vec{u}, \vec{v} \in V$ es compleix $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

En aquest context, direm que dos vectors $\vec{u}, \vec{v} \in V$ són **ortogonals** o **perpendiculars** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Quan estudiàvem productes escalars definits positius sobre un espai vectorial real teníem les mateixes propietats i dues propietats addicionals, però ara ens interessa estudiar aquest concepte més general. Una forma bilineal simètrica és, doncs, una manera de «multiplicar escalarment» vectors d'un espai vectorial. Com que aquest concepte d'ara és més general que el que havíem estudiat abans, cal tenir en compte que en una forma bilineal simètrica poden passar coses que no passen mai en els productes escalars definits positius.

- Hi pot haver vectors $\vec{e}$ que siguin *perpendiculars a ells mateixos*, és a dir $\vec{e} \cdot \vec{e} = 0$. En direm **vectors isòtrops**. Si l'únic vector isòtrop és el vector zero, direm que la forma bilineal és **anisòtropa** (o *el·líptica*).

- Si F és un subespai vectorial de V, podem considerar el subespai $F^{\perp}$ format pels vectors que són perpendiculars a tots els vectors de F. En general, pot passar que $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.
- Hi pot haver vectors $\vec{e} \neq 0$ que siguin perpendiculars a qualsevol altre vector de l'espai. Els vectors $\vec{e}$ tals que $\vec{e} \cdot \vec{v} = 0$ per tot $\vec{v} \in V$ formen un subespai vectorial que s'anomena el **radical** de V i es denota com $\mathrm{Rad}(V)$. Si $\mathrm{Rad}(V) = 0$ direm que la forma bilineal és **no singular**.
- Si $V = F \oplus G$ i cada vector de G és perpendicular a cada vector de F direm que F i G estan en **suma ortogonal** i escriurem $V = F \perp G$.

Exemple: Suposem que l'espai vectorial V té dimensió 2, que la forma bilineal és no singular i que hi ha un vector isòtrop $\vec{e}_1 \neq 0$. Com que $V^{\perp} = 0$, existirà un vector $\vec{v}$ amb $\vec{e}_1 \cdot \vec{v} \neq 0$. Sigui $\vec{w} := (1/(\vec{e}_1 \cdot \vec{v}))\vec{v}$ i considerem el vector

$$\vec{e}_2 = \vec{w} - \frac{\vec{w} \cdot \vec{w}}{2} \vec{e}_1.$$

Aleshores, és fàcil comprovar que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és una base de V tal que

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 0, \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1.$$

Direm que V, amb aquesta forma bilineal, és un **pla hiperbòlic**.[1]

A les formes bilineals hi ha, naturalment, un concepte d'**equivalència**: dues formes bilineals simètriques sobre V són equivalents si existeix un isomorfisme lineal $\phi : V \to V$ tal que

$$\vec{e} \cdot_1 \vec{v} = \phi(\vec{e}) \cdot_2 \phi(\vec{v}) \text{ per tot } \vec{e}, \vec{v} \in V.$$

2. El punt de vista quadràtic

Una **forma lineal** en un espai vectorial V és una aplicació $\omega : V \to k$ que compleix

1. $\omega(\vec{e} + \vec{v}) = \omega(\vec{e}) + \omega(\vec{v})$.
2. $\omega(\lambda \vec{e}) = \lambda\, \omega(\vec{e})$.

[1] No hem de confondre aquest concepte de *pla hiperbòlic* amb el pla de la geometria hiperbòlica.

Com ho faríem per definir un concepte de **forma quadràtica**? La segona condició sembla fàcil de traduir al cas quadràtic: $Q(\lambda\vec{e}) = \lambda^2 Q(\vec{e})$. Quina condició hauria de substituir la primera si volguéssim axiomatitzar la idea d'«elevar al quadrat»? Recordem aquesta famosa identitat:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

que ens relaciona la multiplicació i l'operació d'elevar al quadrat.[2] Aquesta identitat ens suggereix que hauríem de definir una **forma quadràtica** en un espai vectorial V com una aplicació $Q : V \to k$ que compleixi

1. $\vec{e} \cdot \vec{v} := \frac{1}{2}\left(Q(\vec{e} + \vec{v}) - Q(\vec{e}) - Q(\vec{v})\right)$ és una forma bilineal a V.
2. $Q(\lambda\vec{e}) = \lambda^2 Q(\vec{e})$ per tot $\vec{e} \in V$.

No cal dir que també tenim un concepte de formes quadràtiques equivalents: Dues formes quadràtiques Q_1, Q_2 sobre V són equivalents si hi ha un isomorfisme lineal $\phi : V \to V$ tal que $Q_1(\vec{e}) = Q_2(\phi(\vec{e}))$ per tot $\vec{e} \in V$. Direm que una forma quadràtica és no singular si ho és la forma bilineal associada definida per la condició 1 anterior.

3. El punt de vista matricial

Una matriu quadrada $M = (a_{ij})$ es diu que és **simètrica** si $a_{ij} = a_{ji}$ per tot i, j. Equivalentment, M és simètrica si coincideix amb la seva transposada: $M = M^T$.

Quina relació d'equivalència considerarem a les matrius simètriques? Al conjunt de les matrius ja tenim una relació d'equivalència —anomenada *similitud*— segons la qual dues matrius quadrades M i N són similars si existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP = N$. Però aquesta relació —que és molt important quan estudiem matrius que representen aplicacions lineals— no ens interessa ara que volem estudiar *matrius simètriques que representen formes bilineals*. D'altra banda, si M és una matriu simètrica, $P^{-1}MP$ en general no ho és.

L'equivalència entre matrius simètriques que ens interessa ara és aquesta: dues matrius simètriques M i N són equivalents si existeix una matriu invertible P tal que $P^T MP = N$.

[2] Aquesta identitat ens demostra que si sabem elevar al quadrat, restar i dividir per 2, ja sabem multiplicar. Aquesta curiositat és explotada a un apòleg titulat *L'alquímia catalana i el Regula Universalis*, fàcilment localitzable a Internet.

Com que tenim dos conceptes d'equivalència diferents entre matrius

$$P^{-1}MP \sim_1 M; \qquad P^T MP \sim_2 M$$

convé estar molt atent a no confondre'ls. Insistim: l'equivalència $P^{-1}MP \sim_1 M$ és important quan estudiem l'efecte d'un canvi de base en una aplicació lineal; l'equivalència $P^T MP \sim_2 M$ serà important quan estudiem l'efecte d'un canvi de base en una forma bilineal.

4. El punt de vista polinòmic

Volem estudiar quàdriques i ja hem dit que una quàdrica de $P_n(k)$ serà un polinomi homogeni de segon grau en $n+1$ variables (llevat d'un escalar no nul, no ho oblidem!) També hem dit que dues quàdriques seran equivalents quan hi hagi un canvi de coordenades projectiu que transformi un polinomi en l'altre.

Els quatre punts de vista són equivalents

Formes bilineals, formes quadràtiques, matrius simètriques i polinomis homogenis de segon grau són, essencialment, un mateix concepte mirat des de quatre angles diferents, i aquesta possibilitat de mirar un mateix objecte matemàtic des de diversos punts de vista és immensament enriquidora. Per tant, a l'hora d'estudiar les quàdriques podem escollir qualsevol d'aquests quatre punts de vista. Cadascun té els seus avantatges. Per exemple, les formes bilineals i les formes quadràtiques es poden estudiar «sense coordenades» i són, per tant, més conceptuals, mentre que les matrius i els polinomis estan millor adaptats al càlcul i són directament «codificables».

Estudiem ara breument com podem passar d'un d'aquests quatre conceptes a un altre.

- **Formes bilineals i formes quadràtiques**. Aquesta correspondència és senzilla. Si tenim una forma bilineal sobre V podem definir una forma quadràtica sobre V aixi

$$Q(\vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{e}$$

  i comprovar immediatament que compleix les dues propietats de les formes quadràtiques. Recíprocament, si Q és una forma quadràtica, li podem associar una forma bilineal així

$$\vec{e} \cdot \vec{v} := \frac{1}{2}\left(Q(\vec{e} + \vec{v}) - Q(\vec{e}) - Q(\vec{v})\right).$$

També és important tenir en compte què passa amb el concepte d'equivalència que tenim a formes bilineals i a formes quadràtiques: és molt senzill comprovar que dues formes quadràtiques són equivalents si i només si ho són les seves formes bilineals associades.

- **Formes bilineals i matrius simètriques**. Suposem que tenim una forma bilineal sobre V. Fixem una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V i considerem la matriu simètrica $n \times n$

$$M := \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right).$$

Direm que és la *matriu de la forma bilineal en la base donada*. Recíprocament, si M és una matriu simètrica qualsevol, podem definir una forma bilineal simètrica sobre V d'aquesta manera

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1, \dots, a_n)\, M\, (b_1, \dots, b_n)^T$$

i podem comprovar molt fàcilment que es compleixen les dues condicions de les formes bilineals simètriques. També és fàcil veure que aquestes dues correspondències són inversa una de l'altra.

En particular, si $\vec{v}, \vec{w}$ són vectors expressats, en una base, com a matrius d'una única columna i si M és la matriu d'una forma bilineal en la base donada, aleshores el vector producte $\vec{v} \cdot \vec{w}$ es calcula

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^{\,T} M\, \vec{w}.$$

Vegem ara com es comporta aquesta correspondència entre formes bilineals i matrius (un cop hem escollit una base) respecte dels conceptes d'equivalència que tenim a formes bilineals i a matrius simètriques. Suposem que tenim dues formes bilineals simètriques equivalents a través d'un isomorfisme lineal $\phi : V \to V$. Això vol dir que

$$\vec{v} \cdot_1 \vec{w} = \phi(\vec{v}) \cdot_2 \phi(\vec{w}).$$

En la base que hem fixat, l'isomorfisme ϕ vindrà donat per una matriu invertible P i les dues formes bilineals tindran matrius M_1 i M_2, respectivament. Tindrem

$$\vec{v}^{\,T} M_1 \vec{w} = \vec{v} \cdot_1 \vec{w} = \phi(\vec{v}) \cdot_2 \phi(\vec{w}) = (P\vec{v})^T M_2 (P\vec{w}) = \vec{v}^{\,T} P^T M_2 P \vec{w}.$$

Com que la matriu d'una forma bilineal determina la forma bilineal, la conclusió és que

$$P^T M_2 P = M_1$$

és a dir: l'equivalència de formes bilineals es correspon a l'equivalència de matrius simètriques que hem definit abans —i no pas a l'equivalència $P^{-1}MP \sim M$ que ja coneixíem! Aquesta és la justificació que haguem introduït precisament l'equivalència $P^TMP \sim M$.

- **Matrius simètriques i polinomis homogenis de grau 2**. Sigui $M = (a_{ij})$ una matriu simètrica de mida n. A partir de M podem definir aquest polinomi homogeni de grau 2 en les variables $x_1, \ldots, x_n$

  $$p(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i<j}^{n} 2a_{ij} x_i x_j.$$

  És a dir,
  $$p(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)\, M\, (x_1, \ldots, x_n)^T.$$

  És clar que, d'aquesta manera, tenim una correspondència bijectiva entre matrius simètriques diferents de zero i polinomis homogenis de grau 2, i també és fàcil veure que aquesta correspondència respecta els conceptes d'equivalència que hi ha a les matrius simètriques i als polinomis homogenis.[3]

Observem, doncs, que tenim quatre maneres d'entendre i estudiar les quàdriques. Cal fer, però, algunes consideracions. L'equivalència entre formes bilineals i formes quadràtiques és canònica i també ho és l'equivalència entre matrius simètriques diferents de zero i polinomis homogenis de segon grau, però l'equivalència entre formes bilineals/formes quadràtiques i matrius simètriques/polinomis homogenis no ho és perquè requereix l'elecció d'una base de l'espai vectorial. D'altra banda, recordem que una quàdrica no és exactament un polinomi homogeni de segon grau, sinó que és una classe d'equivalència de polinomis homogenis de segon grau.

Quan la forma quadràtica associada a una quàdrica sigui no singular, direm que la quàdrica és **no degenerada**.

[3]Observem quina és exactament la relació entre els termes de la matriu simètrica i els coeficients del polinomi homogeni de grau 2 que li associem. Els termes de la diagonal són els coeficients dels monomis x_i^2 i els termes fora de la diagonal són **la meitat** dels coeficients dels monomis $x_i x_j$.

28. Teoremes de classificació

Voldríem classificar les quàdriques de dimensió arbitrària sobre un cos arbitrari: saber exactament quines quàdriques hi ha (llevat d'equivalència) i ser capaços de decidir, donades dues quàdriques, si són equivalents o no ho són. Segurament, és un objectiu massa ambiciós, però, si més no, mirarem fins on podem arribar. La dificultat del problema depèn del cos base. D'entrada, estudiarem què podem dir quan el cos base és un cos arbitrari de característica diferent de dos i en el capítol següent veurem com per certs cossos concrets podem arribar a una classificació completa.

Hem vist que hi ha com a mínim quatre maneres d'entendre les quàdriques. De cara als teoremes de classificació que estudiarem en aquest capítol, el punt de vista més convenient és el de les *formes bilineals simètriques*, que sabem que és completament equivalent al de les *formes quadràtiques*. Com que és més curt escriure «forma quadràtica», utilitzarem aquesta nomenclatura, però ens cal tenir present que sempre tindrem, en paral·lel, una forma quadràtica i la seva forma bilineal simètrica associada. Per tant, estudiarem espais vectorials de dimensió finita V amb una forma quadràtica Q, és a dir, parelles (V, Q). El nom que utilitzarem per a la parella (V, Q) és el d'**espai quadràtic**.[1]

Si tenim dos espais quadràtics (V_1, Q_1) i (V_2, Q_2), una **isometria**[2] entre ells serà un isomorfisme lineal $\phi : V_1 \to V_2$ tal que $Q_1(\overrightarrow{v}) = Q_2(\phi(\overrightarrow{v}))$ per tot $\overrightarrow{v} \in V_1$. Escriurem $V_1 \cong V_2$ si hi ha una isometria entre V_1 i V_2.[3]

Per classificar necessitem disposar d'**invariants**, és a dir, necessitem associar a cada forma quadràtica alguns objectes matemàtics senzills (i calculables!) —com ara nombres enters— de manera que dues formes equiva-

[1] Com sempre, cometrem l'abús de llenguatge de denotar un espai quadràtic simplement pel primer membre de la parella i escriurem V en lloc de (V, Q).

[2] És natural utilitzar aquí la paraula «isometria» perquè si el cos base és $\mathbb{R}$ i la forma bilineal és un producte escalar definit positiu, el concepte actual coincideix amb el concepte d'isometria entre espais afins euclidians.

[3] La notació $V_1 \cong V_2$ és ambigua i el context ens ha de explicar si estem parlant d'una *isometria* entre els espais quadràtics V_1 i V_2 o d'un *isomorfisme lineal* entre els espais vectorials V_1 i V_2.

lents tinguin associats els mateixos objectes. La culminació de l'èxit seria disposar de prou invariants per poder arribar a demostrar que dues formes són equivalents si i només si tenen els mateixos invariants.

Abans de començar, repassem alguns conceptes que ja hem vist. Tenim, doncs, un espai quadràtic V.

- El **radical** de V és el subespai format pels vectors perpendiculars a qualsevol altre vector. El denotem per $\mathrm{Rad}(V)$. Diem que V és **no singular** si el seu radical és zero: $\mathrm{Rad}(V) = 0$.
- Un vector és **isòtrop** si és perpendicular a ell mateix. Diem que V és **anisòtrop** o **el·líptic** si l'únic vector isòtrop és el vector zero. Direm que V és **totalment isòtrop** si tots els seus vectors són isòtrops.
- Direm que V és un **pla hiperbòlic** si té dimensió 2, és no singular i és no el·líptic. A l'exemple de la pàgina 201 vam veure que tot pla hiperbòlic té una base en la qual la matriu de la forma bilineal és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En particular, tots els plans hiperbòlics són isomorfs. Si ho traduïm al llenguatge de les còniques, un pla hiperbòlic correspon a la cònica xy i això justifica el seu nom. D'altra banda, un pla hiperbòlic també té una base en la que la matriu de la forma bilineal s'escriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i la cònica corresponent és $x^2 - y^2$ que és equivalent, per tant, a la cònica xy.

Primer invariant: la dimensió

Aquest és trivial. Si tenim una isometria entre dos espais quadràtics $V \cong W$, aleshores $\dim(V) = \dim(W)$. Res més a dir.

Segon invariant: el rang

Aquest és senzill. Definim

$$\mathrm{rang}(V) = \dim V - \dim \mathrm{Rad}\, V.$$

És clar que és un invariant, perquè si $V \cong W$, també $\mathrm{Rad}\, V \cong \mathrm{Rad}\, W$. Com es pot calcular? Observem que, si M és la matriu de la forma bilineal en una certa base, tenim

$$\mathrm{Rad}\, V = \{\vec{v} : \vec{u}^{\,T} M \vec{v} = 0 \text{ per tot } \vec{u} \in V\} = \{\vec{v} : M\vec{v} = 0\} = \ker M.$$

Per tant, el rang de la forma bilineal coincideix amb el rang de la seva matriu en qualsevol base.

Sigui ara $E \subseteq V$ un subespai vectorial qualsevol que estigui en suma directa amb $\mathrm{Rad}\, V$. És evident que aquesta suma directa serà una suma ortogonal i tindrem

$$V = \mathrm{Rad}(V) \perp E.$$

D'altra banda, E ha de ser no singular. A més, l'espai E és únic llevat d'isometria: si tenim una altra descomposició $V = \mathrm{Rad}(V) \perp E'$, es compleix que $E \cong E'$. Aquest fet és conseqüència d'un teorema fonamental de les formes quadràtiques:

> *[Teorema de Witt] Sigui V un espai quadràtic i siguin $V = E_1 \perp F_1 = E_2 \perp F_2$ dues descomposicions de V en suma ortogonal. Si E_1 i E_2 són isomètrics, aleshores F_1 i F_2 també són isomètrics.*[4]

Això ens diu que si classifiquem E ja haurem classificat V. Per tant, a partir d'ara suposarem, sense pèrdua de generalitat, que V és no singular.

Tercer invariant: l'índex

Ara V és no singular. En aquest cas, el comportament dels subespais ortogonals ja s'assembla més al cas clàssic dels productes escalars definits positius sobre el cos real. Per exemple, es pot demostrar (exercici **IV**.5) que si $E \subseteq V$ és un subespai no singular, aleshores $E^{\perp\perp} = E$ i $V = E \perp E^{\perp}$.

---

[4] Als textos sobre formes quadràtiques apareixen diverses versions del *teorema de Witt*. El que acabem d'enunciar és potser la versió més general, de la que es dedueixen amb relativa facilitat les altres versions del teorema:

- **Teorema d'extensió**. Siguin $V_1 = E_1 \perp F_1$ i $V_2 = E_2 \perp F_2$ dos espais quadràtics isomètrics i sigui $\phi : E_1 \to E_2$ una isometria. Existeix una isometria $\widetilde{\phi} : V_1 \to V_2$ que coincideix amb ϕ sobre E_1 i tal que $\widetilde{\phi}(F_1) = F_2$.
- **Teorema de cancel·lació**. Si $E_1 \perp F_1 = E_1 \perp F_2$, aleshores F_1 i F_2 són isomètrics.
- **Teorema original de Witt**. Si $E_1, E_2 \subseteq V$ són subespais isomètrics no singulars d'un espai quadràtic V, aleshores $E_1^{\perp}$ i $E_2^{\perp}$ també són isomètrics.
- **Extensió en subespais no singulars**. Si E_1, E_2 són subespais no singulars d'un espai quadràtic V i $\phi : E_1 \cong E_2$ és una isometria, aleshores existeix una isometria $\psi : V \cong V$ tal que $\psi|_{E_1} = \phi$.
- **Extensió en un espai no singular**. Si E_1, E_2 són subespais d'un espai quadràtic no singular V i $\phi : E_1 \cong E_2$ és una isometria, aleshores existeix una isometria $\psi : V \cong V$ tal que $\psi|_{E_1} = \phi$.

Definim l'**índex** de V com la màxima dimensió d'un subespai totalment isòtrop de V. És clar que l'índex és un invariant. La pregunta és com es pot calcular.

Per exemple, en un pla hiperbòlic, hi ha dues rectes totalment isòtropes, però el pla no és totalment isòtrop (vegeu l'exercici **IV**.3). En conclusió, l'índex d'un pla hiperbòlic és 1.

Suposem que $E \subseteq V$ és un subespai totalment isòtrop de dimensió màxima. Utilitzant les mateixes idees de l'exemple del pla hiperbòlic de la pàgina 201 es pot demostrar per inducció això (exercici **IV**.11):

> *Sigui $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ una base de E (per tant, r és l'índex de V). Existeixen vectors $\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_r \in V$ tals que cada subespai $H_i := \langle \vec{e}_i, \vec{e}\,'_i \rangle$ és un pla hiperbòlic i $V = H_1 \perp \cdots \perp H_r \perp F$ on F és anisòtrop.*

És a dir, podem descompondre cada espai quadràtic no singular V com a suma ortogonal de plans hiperbòlics —tants com indica l'índex de V— i un subespai anisòtrop. Un aspecte clau és que aquesta descomposició és **única** en aquest sentit: si tenim

$$V = H'_1 \perp \cdots \perp H'_s \perp F'$$

on cada H'_i és un pla hiperbòlic i F és un espai anisòtrop, aleshores $r = s$ i $F \cong F'$. En particular, podem redefinir l'índex com *el nombre de plans hiperbòlics en qualsevol descomposició de V com a suma ortogonal de plans hiperbòlics i un espai anisòtrop.* Aquest fet no trivial és conseqüència també del teorema de Witt que hem enunciat abans.

Tot això que hem dit implica que, si deixem de banda el problema del càlcul explícit de l'índex, la classificació de les formes quadràtiques es redueix a la classificació dels espais anisòtrops —que són els que no tenen cap vector isòtrop no nul. El problema que ens trobem és que la classificació dels espais anisòtrops depèn força del cos base i ja no podem obtenir resultats generals com els que hem vist fins ara. En el proper capítol estudiarem els espais anisòtrops per a alguns cossos concrets i així completarem la classificació per a aquests cossos.

Quart invariant: el determinant

Si M i N són dues matrius simètriques equivalents, els seus determinants poden ser diferents. En efecte, l'equivalència vindrà donada per una matriu invertible P tal que $P^T MP = N$. Aleshores,

$$\det(N) = \det(M)\det(P)^2.$$

Aquesta fórmula ens dóna una certa informació. Per exemple, si el cos base és el cos $\mathbb{R}$ veiem que una matriu de determinant positiu no pot ser equivalent a una matriu de determinant negatiu. Si el cos base és el cos $\mathbb{Q}$, una matriu de determinant 2 no pot ser equivalent a una matriu de determinant 4. En conclusió, el **determinant mòdul quadrats** és un invariant de la forma quadràtica.[5]

[5] Ara és trivial comprovar l'afirmació de la pàgina 196 que deia que les formes quadràtiques $x^2 + 2y^2$ i $x^2 + y^2$ no són equivalents sobre el cos $\mathbb{F}_5$. En efecte, el determinant de la primera forma és 2 —que no és un quadrat a $\mathbb{F}_5$— i el de la segona és 1, que sí que és un quadrat.

29. Classificació projectiva per a $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_q$ i $\mathbb{R}$

Suposem que V és un espai quadràtic sobre un cos k. En el capítol anterior hem vist que hi ha una descomposició única (llevat d'isometria)

$$V = \mathrm{Rad}(V) \perp H_1 \perp \cdots \perp H_r \perp E$$

on cada H_i és un pla hiperbòlic i E és un espai el·líptic. Per tenir una classificació completa ens cal veure quines possibilitats hi ha per a E. La resposta depèn de quin sigui el cos base k. En aquest capítol estudiarem tres casos molt importants.

Cas d'un cos algebraicament tancat

Aquest cas és extraordinàriament senzill perquè

> *Si k és un cos algebraicament tancat, hi ha, llevat d'isomorfisme, un únic espai el·líptic no trivial. Aquest espai té dimensió 1.*

En efecte, suposem que E és un espai el·líptic de dimensió > 1 i siguin $\vec{u}, \vec{v} \in E$ dos vectors linealment independents. Com que k és algebraicament tancat, l'equació de segon grau en λ

$$(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda^2\, \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\lambda\, \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

sempre té solució i, per tant, sempre hi ha algun vector isòtrop no trivial a E. Però això no pot ser perquè E és el·líptic i, per definició, no pot tenir vectors isòtrops no nuls.

D'altra banda, si E té dimensió 1 i $\vec{u} \in E$ és un vector no nul, sigui $a = \vec{u} \cdot \vec{u} \in k - \{0\}$. Com que k és algebraicament tancat, existirà $b \in k$ tal que $b^2 = 1/a$. Aleshores, podem prendre com a base de E el vector $b\,\vec{u}$, de manera que la matriu de la forma bilineal en aquesta base és la matriu (1). És a dir, hi ha un únic espai el·líptic de dimensió 1.

En conclusió: per a cada valor de $n = \dim(V)$ hi ha, llevat d'isomorfisme, una **única forma quadràtica** no singular i, per tant, una única quàdrica no degenerada. És aquesta:

$$\begin{cases} x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n & \text{si } n \text{ és parell} \\ x_1x_2 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_n^2 & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

Encara ho podem simplificar més. Sabem que $xy \sim x^2 - y^2$. Com que k és algebraicament tancat, existeix $\zeta \in k$ tal que $\zeta^2 = -1$. Per tant, $x^2 - y^2 \sim x^2 + y^2$. En conclusió:

> *Sobre un cos algebraicament tancat*[1]*, tota quàdrica de rang r és equivalent a*
> $$x_1^2 + \cdots + x_r^2.$$

Cas d'un cos finit

Per estudiar les formes quadràtiques sobre un cos finit —que recordem que sempre suposem que és de característica diferent de dos— convé saber alguna cosa sobre els quadrats en un cos finit. Sigui, doncs, q una potència d'un primer senar p i considerem el cos $\mathbb{F}_q$ que té exactament q elements. Aquestes propietats es demostren quan s'estudia la teoria dels cossos finits:

- La meitat dels elements no nuls de $\mathbb{F}_q$ són quadrats i l'altra meitat no ho són. El producte de dos quadrats és un quadrat, el producte de dos no quadrats és un no quadrat i el producte d'un quadrat i un no quadrat és un no quadrat.[2]
- Fixem un no quadrat $v \in \mathbb{F}_q$. Tot altre no quadrat és de la forma u^2v.
- Tot element de $\mathbb{F}_q$ és suma de dos quadrats. En particular, $v = a^2 + b^2$.
- $-1 \in \mathbb{F}_q$ és un quadrat si i només si $q \equiv 1\,(4)$.

En aquest cas, la classificació dels espais el·líptics és una mica més complicada que en el cas anterior, però no gaire. Llevat d'isometria, hi ha només tres espais el·líptics no nuls (exercici **IV**.12):

[1]Observem que només hem usat que les equacions de segon grau tenen solució. Per tant, el resultat té validesa més enllà dels cossos algebraicament tancats: n'hi ha prou que tot element de k tingui arrel quadrada.

[2]Podem dir-ho amb un llenguatge més «matemàtic»: El quocient del grup multiplicatiu de $\mathbb{F}_q$ pel subgrup dels quadrats és el grup de dos elements.

- En dimensió 1 hi ha dos el·líptics no equivalents, de matrius (1) i (ν), respectivament.
- En dimensió 2 hi ha, llevat d'equivalència, un únic espai el·líptic. La matriu d'aquest espai el·líptic depèn de que -1 sigui un quadrat o no ho sigui:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \ q \equiv 1\,(4); \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ q \equiv 3\,(4).$$
- En dimensió ≥ 3 no hi ha cap espai el·líptic.

Un cop coneixem els possibles el·líptics, ja sabem exactament quines formes quadràtiques hi ha.

Sobre el cos $\mathbb{F}_q$ amb q senar hi ha (llevat d'equivalència) dues formes quadràtiques en cada rang n.

- *Si $n = 2r + 1$, tenim*
$$x_1x_2 + \cdots + x_{2r-1}x_{2r} + x_{2r+1}^2$$
$$x_1x_2 + \cdots + x_{2r-1}x_{2r} + \nu x_{2r+1}^2$$
- *Si $n = 2r$, tenim*
$$x_1x_2 + \cdots + x_{2r-3}x_{2r-2} + x_{2r-1}x_{2r}$$
$$x_1x_2 + \cdots + x_{2r-3}x_{2r-2} + x_{2r-1}^2 + \lambda x_{2r}^2$$

on $\lambda = \nu$ si $q \equiv 1\,(4)$ i $\lambda = 1$ si $q \equiv 3\,(4)$.

Ara que ja sabem quines formes quadràtiques hi ha, la segona pregunta és, donades dues formes quadràtiques, com podem decidir si són equivalents o no. En el cas dels cossos finits, la resposta és molt senzilla i la dóna el rang i el determinant (que vol dir el determinant *mòdul quadrats*, com vam discutir al capítol anterior). En efecte, és molt fàcil adonar-se que, de les dues formes que hi ha per a cada rang donat, en una el determinant és un quadrat i en l'altra és un no quadrat. Problema resolt.[3]

Ara que ja sabem que dues formes quadràtiques sobre $\mathbb{F}_q$ són equivalents si i només si tenen el mateix rang i el mateix determinant (mòdul quadrats), podem trobar una llista de formes més senzilla que l'anterior. Per exemple:

[3] Hi manca un detall: com podem saber si un element de $\mathbb{F}_q$ és un quadrat? Euler va contestar aquesta pregunta en el cas que q sigui un primer, però la seva resposta es pot estendre al cas general. El criteri d'Euler diu que si q és una potència d'un primer senar i $a \neq 0$ és un element del cos $\mathbb{F}_q$, aleshores a és un quadrat a $\mathbb{F}_q$ si i només si $a^{(q-1)/2} = 1$.

Sobre el cos $\mathbb{F}_q$ amb q senar hi ha (llevat d'equivalència) dues formes bilineals simètriques en cada rang n:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \nu x_n^2$$

Tenim ja la classificació de les formes quadràtiques sobre un cos finit, però ara cal discutir la classificació de les **quàdriques**, que sabem que no són exactament el mateix que les formes quadràtiques perquè si Q és una forma quadràtica, com a quàdriques tenim que Q i λQ amb $\lambda \neq 0$ són equivalents. La pregunta és: si multipliquem per ν cadascuna de les dues formes quadràtiques que hi ha en cada rang, quina forma obtenim? La resposta és senzilla, perquè sabem que només cal mirar el determinant. Resulta que, en grau senar, les dues formes quadràtiques donen la mateixa quàdrica, mentre que en grau parell donen quàdriques diferents:

Sobre el cos $\mathbb{F}_q$ amb q senar hi ha (llevat d'equivalència) aquestes quàdriques projectives en cada rang n.

- *Si n és senar, una única quàdrica $x_1^2 + \cdots + x_n^2$.*
- *Si n és parell, dues quàdriques*

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2$$
$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \nu x_n^2.$$

Cas del cos real

Estudiem ara el cas $k = \mathbb{R}$. Aquí és senzill determinar els espais anisòtrops: si tenim un vector $\overrightarrow{u}$ tal que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$ i un altre vector $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} < 0$, sempre podrem trobar un vector $\overrightarrow{w}$ combinació lineal no trivial de $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = 0$. Com que en un espai anisòtrop no hi pot haver vectors isòtrops no nuls, deduïm que una forma bilineal simètrica serà el·líptica si i només si és «definida positiva» o «definida negativa», és a dir, serà un típic producte escalar definit positiu o un típic producte escalar definit positiu canviat de signe. Ja hem estudiat els productes escalars definits positius i sabem, per exemple, que existeixen bases ortonormals. En conclusió, un espai el·líptic tindrà com a matriu $\pm I$ i tota forma quadràtica és equivalent a una forma quadràtica «diagonal»

$$\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2.$$

Per classificar una forma quadràtica real necessitem conèixer la dimensió, el rang, l'índex i el signe de la part el·líptica, i dues formes quadràtiques sobre $\mathbb{R}$ seran equivalents si i només si aquests quatre invariants coincideixen.

Si passem ara a les quàdriques, veiem que si canviem el signe d'una forma quadràtica, dels quatre invariants anteriors només canvia el signe de la part el·líptica, mentre que la quàdrica és la mateixa. Per tant, dues quàdriques sobre $\mathbb{R}$ són equivalents si i només si tenen la mateixa dimensió, el mateix rang i el mateix índex.

Exemple: Còniques del pla projectiu

L'espai vectorial té dimensió 3 i hi ha cinc combinacions possibles de rang i índex:

rang	índex	
	0	1
1	x^2 *«recta doble»*	
2	$x^2 + y^2$ *«punt doble»*	$x^2 - y^2$ *«dues rectes»*
3	$x^2 + y^2 + z^2$ *«cònica imaginària»*	$x^2 + y^2 - z^2$ *«cònica real no degenerada»*

Per tal de completar la classificació de les quàdriques sobre el cos $\mathbb{R}$ ens caldria disposar d'un mètode per calcular l'índex. Aquest mètode resulta d'un famós teorema sobre les matrius simètriques:

> *Tota matriu real simètrica diagonalitza en una base ortonormal (respecte del producte escalar ordinari de $\mathbb{R}^n$).*

Expliquem què vol dir això. Aquest teorema ens diu que si M és una matriu simètrica amb coeficients reals, aquesta matriu es pot diagonalitzar sobre el cos $\mathbb{R}$. És a dir, existeix una matriu real P tal que $P^{-1}MP$ és una matriu diagonal. A més, el teorema també ens diu que aquesta matriu P podem aconseguir que sigui una matriu ortogonal, és a dir, una matriu tal que $PP^T = I$. Aquest fet és extraordinàriament rellevant per a tot el que estem estudiant perquè la condició $PP^T = I$ implica que

$$P^{-1}MP = P^TMP$$

és a dir, en aquest cas els dos conceptes d'equivalència de matrius —$M \sim P^{-1}MP$, relacionat amb aplicacions lineals i $M \sim P^TMP$, relacionat amb formes quadràtiques— coincideixen. La conclusió és:

> *Si M és una matriu simètrica, el seu polinomi característic té totes les arrels reals i s'escriu com*
>
> $$X^r(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_s)(X-\mu_1)\cdots(X-\mu_t)$$
>
> *amb $\lambda_1,\ldots,\lambda_s > 0$, $\mu_1,\ldots,\mu_t < 0$. La forma quadràtica associada a M és equivalent a*
>
> $$x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2.$$

És a dir, per classificar una forma quadràtica real (o una quàdrica real projectiva) n'hi ha prou amb saber quantes arrels positives té el polinomi característic de la seva matriu. És més, ni tan sols cal trobar aquestes arrels, perquè hi ha un curiós teorema demostrat[4] per Descartes que ens permet determinar trivialment el nombre d'arrels positives sense haver-les de calcular (exercici **IV**.26):

> *[Regla dels signes de Descartes] Si un polinomi amb coeficients reals té totes les seves arrels reals, el nombre d'arrels positives és igual al nombre de canvis de signe entre monomis consecutius no nuls (quan els ordenem per ordre creixent).*

[4]Potser hauríem de dir «utilitzat» per Descartes al tercer llibre de *La Géométrie*, el seu tractat matemàtic publicat el 1637, com apèndix al famós *Discours de la méthode*.

30. Classificació afí de les quàdriques

Hem vist que hi ha una única cònica projectiva real no degenerada i no buida de punts: $x^2 + y^2 - z^2$. Les tres còniques clàssiques del pla afí —l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola[1] — s'obtenen a partir d'aquesta única cònica projectiva situant la *recta de l'infinit* en diverses posicions: si no toca la cònica, en el pla afí «veiem» una el·lipse, si la toca en un punt, veiem una paràbola, si la talla en dos punts, veiem una hipèrbola. Aquest exemple senzill conté la idea de la classificació de les quàdriques afins: cal primer veure quina és la quàdrica projectiva que tenim i després cal tenir en compte com talla aquesta quàdrica l'hiperplà de l'infinit.

Considerem un espai projectiu $P_n(k)$ i prenem $H := \{x_{n+1} = 0\}$ com a hiperplà de l'infinit. El complement d'aquest hiperplà serà un espai afí

$$k^n = P_n(k) - \{x_{n+1} = 0\}.$$

Sabem com podem passar de coordenades homogènies a $P_n(k)$ a coordenades afins a k^n i viceversa, i també sabem com podem passar de quàdriques a $P_n(k)$ (que no siguin divisibles per x_{n+1}) a quàdriques a k^n i viceversa. Denotarem Q^∞ la restricció de la quàdrica Q a l'hiperplà de l'infinit. Com a polinomi homogeni, Q^∞ s'obté substituint $x_{n+1} = 0$ al polinomi de Q.

Suposem que tenim dues quàdriques Q_1 i Q_2. Volem saber si Q_1 i Q_2 són equivalents com a quàdriques afins.

[Classificació afí de les quàdriques] $Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques afins si i només si

1. *$Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques de $P_n(k)$.*
2. *$Q_1^\infty \sim Q_2^\infty$ com a quàdriques de $H \cong P_{n-1}(k)$.*

[1] I la circumferència? El concepte de circumferència és un concepte *mètric* que només té sentit en un espai afí euclidià, mentre que ara estem en un espai afí general.

Aquest teorema redueix la classificació afí de les quàdriques a classificar dues quàdriques projectives. Per demostrar aquest teorema el llenguatge més adient és el de les formes quadràtiques. Suposem, doncs, que Q_1 i Q_2 són dues formes quadràtiques sobre un espai vectorial V i que H és un hiperplà de V.

La implicació en un sentit és molt clara i tota la dificultat està en demostrar que les dues condicions 1, 2 impliquen que $Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques afins. La primera condició ens diu que hi ha un isomorfisme $\phi : V \to V$ que transforma Q_2 en λQ_1 per algun $\lambda \neq 0$. Tindrem (en el llenguatge de les formes quadràtiques) $Q_2(\phi(\overrightarrow{v})) = \lambda Q_1(\overrightarrow{v})$. Anàlogament, la segona condició ens diu que tenim un isomorfisme $\psi : H \to H$ que transforma Q_1^∞ en μQ_2^∞ per algun $\mu \neq 0$. Tindrem $Q_1(\psi(\overrightarrow{v})) = \mu Q_2(\overrightarrow{v})$ per tot $\overrightarrow{v} \in H$.

Considerem ara $\gamma := \phi\psi : H \to \phi(H)$ que complirà

$$Q_2(\gamma(\overrightarrow{v})) = \lambda\mu\, Q_2(\overrightarrow{v}) \text{ per tot } \overrightarrow{v} \in H.$$

A menys que $\lambda\mu$ sigui igual a 1, γ no és una isometria i no podem aplicar el teorema de Witt per obtenir una isometria de l'espai quadràtic V. Aquest fet complica les coses. És convenient donar un nom a aquestes *«isometries llevat d'un factor»*: en direm **similituds**. Si V és un espai quadràtic, una similitud és un isomorfisme lineal $\phi : V \to V$ tal que existeix $\lambda \neq 0$ (anomenat la *raó* de la similitud) tal que $Q(\phi(\overrightarrow{v})) = \lambda\, Q(\overrightarrow{v})$ per tot $\overrightarrow{v} \in V$. En particular, les isometries són les similituds de raó 1. El teorema que ens cal per acabar la classificació afí de les quàdriques és aquest:

> *[Teorema d'extensió de similituds] Sigui V un espai quadràtic i sigui $\phi : H_1 \to H_2$ una similitud entre dos hiperplans de V. Existeix una similitud $\psi : V \to V$ tal que $\psi(H_1) = H_2$.*[2]

Aplicant aquest teorema obtenim que hi ha una similitud $\rho : V \to V$ amb la propietat que $\rho(H) = \phi(H)$. Aleshores, $\phi^{-1}\rho : V \to V$ serà una similitud que deixarà H invariant i, en conseqüència, serà una afinitat entre Q_1 i (un

[2] Observem que no diem que ψ sigui una extensió de ϕ perquè, en general, no seria cert (exercici **IV**.25). Aquest teorema, imprescindible per demostrar el teorema de classificació afí de les quàdriques, l'he après de l'Agustí Reventós, que el va publicar al seu llibre *Geometria Projectiva* (2006) (teorema 8.3.5). Si el que volem, en lloc de classificar les quàdriques, és classificar les formes quadràtiques en el context afí, l'enunciat del teorema seria al mateix, però a la demostració tindríem $\lambda = \mu = 1$ i γ seria una isometria. Aleshores, acabaríem la demostració amb el teorema de Witt d'extensió d'isometries i no ens caldria invocar aquest teorema d'extensió de similituds.

múltiple no nul de) Q_2. Això acaba la demostració del teorema de classificació afí de les quàdriques, com a conseqüència del teorema d'extensió de similituds.

La conclusió és que per classificar afinament una quàdrica Q hem de classificar (projectivament) dues quàdriques: la quàdrica original Q (mirada com a quàdrica projectiva, és a dir, homogeneïtzada) i la quàdrica restringida a l'infinit Q^∞.

Còniques del pla afí real

Al capítol anterior hem vist que les quàdriques reals estan classificades pel seu rang i el seu índex, en total dos nombres enters no negatius. Per tant, per classificar una quàdrica afí real necessitarem *quatre* invariants: el rang i l'índex de la quàdrica projectiva (ρ, ι) i el rang i l'índex de la quàdrica projectiva de l'hiperplà de l'infinit $(\rho^\infty, \iota^\infty)$.

Com a exemple, apliquem el teorema de classificació a les còniques del pla afí real. La classificació vindrà donada pels quatre invariants $(\rho, \iota, \rho^\infty, \iota^\infty)$ i podem fer una taula amb totes les combinacions d'aquests quatre invariants. En cada cas, donem un polinomi que representa la cònica i donem també un nom que descriu l'aspecte geomètric de la cònica de punts. Observem, però, que no totes les combinacions són possibles. En alguns casos, això és evident: per exemple, és clar que

$$\rho^\infty \leq \rho, \quad \iota^\infty \leq \iota,$$

però hi ha altres casos que requereixen una anàlisi una mica més profunda. Vegem, per exemple, que la combinació $(\rho, \iota, \rho^\infty, \iota^\infty) = (2, 1, 2, 0)$ és impossible. Si V té rang 2, això vol dir que té un radical de dimensió 1 de la forma $\langle \overrightarrow{e} \rangle$. Per tant, $V = \langle \overrightarrow{e} \rangle \perp H$ on H és l'hiperplà de l'infinit. Aleshores, per definició d'índex, $\iota = \iota^\infty$. També és impossible la combinació $(\rho, \iota, \rho^\infty, \iota^\infty) = (3, 0, 1, 0)$ perquè l'espai V seria el·líptic i, en canvi, H tindria radical i, per tant, contindria un vector isòtrop.

Quàdriques de l'espai afí real de tres dimensions

Podem també fer una taula amb totes les combinacions possibles en dimensió tres. Igual que abans, caldria argumentar que les combinacions que apareixen en blanc són realment impossibles. Això ho podríem fer amb arguments similars als que hem utilitzat per a les còniques. De fet, les restriccions genèriques que han de complir els quatre invariants $(\rho, \iota, \rho^\infty, \iota^\infty)$ són aquestes:[3]

[3]La primera restricció és senzilla (exercici **IV**.15). La demostració de les altres tres

		$\rho^\infty = 1$	$\rho^\infty = 2$	
		$\iota^\infty = 0$	$\iota^\infty = 0$	$\iota^\infty = 1$
$\rho = 1$	$\iota = 0$	x^2 *«recta doble»*		
$\rho = 2$	$\iota = 0$	$x^2 + 1$ *«imaginària»*	$x^2 + y^2$ *«punt doble»*	
	$\iota = 1$	$x^2 - 1$ *«dues rectes paral·leles»*		$x^2 - y^2$ *«dues rectes concurrents»*
$\rho = 3$	$\iota = 0$		$x^2 + y^2 + 1$ *«imaginària»*	
	$\iota = 1$	$x^2 + y$ *«paràbola»*	$x^2 + y^2 - 1$ *«el·lipse»*	$x^2 - y^2 + 1$ *«hipèrbola»*

Classificació de les còniques del pla afí $\mathbb{R}^2$

- $0 \leq \rho - \rho^\infty \leq 2$.
- Si $\rho = \rho^\infty$, aleshores $\iota = \iota^\infty$.
- Si $\rho = \rho^\infty + 1$, aleshores $\iota = \iota^\infty$, $\iota^\infty + 1$.
- Si $\rho = \rho^\infty + 2$, aleshores $\iota = \iota^\infty + 1$.

Les quàdriques (no buides) de $\mathbb{R}^3$ són superfícies a l'espai 3D i és molt senzill visualitzar-les amb qualsevol programa de dibuix 3D de funcions matemàtiques. No té sentit incloure aquí dibuixos estàtics que no poden donar la mateixa informació que un d'aquests dibuixos 3D dinàmics que es poden generar a la pantalla d'un ordinador.

propietats la podeu trobar al capítol C.7.

		$\rho^\infty = 1$	$\rho^\infty = 2$		$\rho^\infty = 3$	
		$\iota^\infty = 0$	$\iota^\infty = 0$	$\iota^\infty = 1$	$\iota^\infty = 0$	$\iota^\infty = 1$
$\rho = 1$	$\iota = 0$	x^2 *«pla doble»*				
$\rho = 2$	$\iota = 0$	$x^2 + 1$ *«imaginària»*	$x^2 + y^2$ *«recta doble»*			
	$\iota = 1$	$x^2 - 1$ *«dos plans paral·lels»*		$x^2 - y^2$ *«dos plans secants»*		
$\rho = 3$	$\iota = 0$		$x^2 + y^2 + 1$ *«imaginària»*		$x^2 + y^2 + z^2$ *«punt doble»*	
	$\iota = 1$	$x^2 + y$ *«cilindre parabòlic»*	$x^2 + y^2 - 1$ *«cilindre el·líptic»*	$x^2 - y^2 + 1$ *«cilindre hiperbòlic»*		$x^2 + y^2 - z^2$ *«con»*
$\rho = 4$	$\iota = 0$				$x^2 + y^2 + z^2 + 1$ *«imaginària»*	
	$\iota = 1$		$x^2 + y^2 + z$ *«paraboloide el·líptic»*		$x^2 + y^2 + z^2 - 1$ *«el·lipsoide»*	$x^2 + y^2 - z^2 + 1$ *«hiperboloide de dos fulls»*
	$\iota = 2$			$x^2 - y^2 + z$ *«paraboloide hiperbòlic»*		$x^2 - y^2 - z^2 + 1$ *«hiperboloide d'un full»*

Classificació de les quàdriques de l'espai afí $\mathbb{R}^3$

Exercicis

IV.1 Demostreu que les quàdriques de $P_n(k)$ formen un espai projectiu $X \cong P_N(k)$ amb $N = (n^2+3n)/2$. Siguin $P_1, \ldots, P_r \in P_n(k)$ punts independents, és a dir, tals que la subvarietat més petita que els contingui tingui dimensió $r-1$. Demostreu que el conjunt de les quàdriques que passen per $P_1, \ldots, P_r$ forma una subvarietat de X de dimensió $N-r$. Demostreu que per N punts independents de $P_n(k)$ hi passa una única quàdrica.

IV.2 Sigui $\langle -, - \rangle$ una forma bilineal simètrica sobre un espai vectorial V i sigui $\vec{e} \in V$ un vector fixat. Definim

$$B_{\vec{e}}^{\langle -,- \rangle}(\vec{u}, \vec{v}) := \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{e}, \vec{u} \rangle \langle \vec{e}, \vec{v} \rangle.$$

Comproveu que $B_{\vec{e}}^{\langle -,- \rangle}$ és una forma bilineal simètrica sobre V. Considereu l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar ordinari $\langle -, - \rangle$, i una partícula puntual de massa m situada en el punt definit per un cert vector $\vec{r}$. Demostreu que el *moment d'inèrcia* d'aquesta partícula respecte d'un eix que passa per l'origen ve donat per

$$I = m B_{\vec{r}}^{\langle -,- \rangle}(\vec{n}, \vec{n})$$

on $\vec{n}$ és un vector unitari en la direcció de l'eix. Escriviu la matriu de la forma bilineal $B_{\vec{r}}^{\langle -,- \rangle}$ en la base canònica, en funció de les coordenades de $\vec{r} = (x, y, z)$.[1]

IV.3 Demostreu que si en un espai quadràtic V tots els vectors són isòtrops, aleshores $V = \mathrm{Rad}(V)$.

IV.4 Sigui H un pla hiperbòlic i siguin $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in H$ dos vectors isòtrops linealment independents. Demostreu que els únics vectors isòtrops de H són els múltiples de $\vec{e}_1$ i els múltiples de $\vec{e}_2$.

IV.5 Sigui V un espai quadràtic i sigui $E \subseteq V$ un subespai no singular. Demostreu:

(a) $\dim E^\perp = \dim V - \dim E$.

(b) $V = E \perp E^\perp$.

---

[1] Aquesta forma bilineal és el que s'anomena *tensor d'inèrcia* (les formes bilineals simètriques són cassos particulars del concepte més general de tensor). El teorema de la pàgina 216 explica l'existència dels eixos principals d'inèrcia d'un sòlid rígid i el fet que sempre siguin perpendiculars entre ells.

(c) Si V també és no singular, aleshores $E^\perp$ és no singular.

(d) Si $V = E \perp F$, aleshores $F = E^\perp$.

IV.6 Sigui V un espai quadràtic.

(a) Sigui $\vec{v} \in V$ un vector no isòtrop. Demostreu que

$$V = \langle \vec{v} \rangle \perp \langle \vec{v} \rangle^\perp.$$

(b) Demostreu, per inducció sobre la dimensió, que V admet una base ortogonal.

IV.7 La identitat

$$x^2 + ay^2 + bxy = \left(x + \frac{b}{2}\, y \right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4} \right) y^2$$

(coneguda com a «compleció de quadrats») ens permet diagonalitzar la forma quadràtica $x^2 + ay^2 + bxy$. Generalitzeu aquest mètode a un nombre qualsevol de variables i demostreu per inducció que tota quàdrica es pot diagonalitzar, és a dir, tota quàdrica és equivalent a una quàdrica de la forma $a_1 x_1^2 + \cdots + a_r x_r^2$. Obtenim, així, una demostració alternativa al resultat de l'exercici anterior. Apliqueu aquest mètode a diagonalitzar la forma $x^2 - xy + xz - yz - z^2$ sobre el cos de tres elements.

IV.8 Sigui V un espai quadràtic i sigui $\vec{v} \in V$ un vector no isòtrop. Definim una aplicació lineal $\phi : V \to V$ així:

$$\phi(\vec{e}) = \vec{e} - 2 \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{e}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}.$$

Direm que ϕ és la reflexió ortogonal d'arrel $\vec{v}$. Demostreu que ϕ és una isometria.

IV.9 Sigui V un espai quadràtic i siguin $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tals que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v} \neq 0.$$

(a) Demostreu que algun d'aquests dos vectors $\vec{u} \pm \vec{v}$ és no isòtrop.

(b) Demostreu que existeix una isometria $\phi : V \to V$ tal que $\phi(\vec{u}) = \vec{v}$. Indicació: utilitzeu, si és possible, les reflexions d'arrels $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v}$.

IV.10 Sigui V un espai quadràtic de dimensió 3 i sigui e_1, e_2, e_3 una base de V de manera que la matriu em la forma quadràtica en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que hi ha una isometria $\langle \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \rangle \cong \langle \vec{e}_3 \rangle$ que no es pot estendre a cap isometria $V \cong V$.

IV.11 Sigui V un espai quadràtic no singular i sigui $E \subseteq V$ un subespai totalment isòtrop. Sigui $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ una base de E. Demostreu per inducció que existeixen vectors $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_r \in V$ tals que cada subespai $H_i := \langle \vec{e}_i, \vec{e}'_i \rangle$ és un pla hiperbòlic i $V = H_1 \perp \cdots \perp H_r \perp F$.

IV.12 Determineu els espais el·líptics sobre un cos finit. Demostreu que en dimensió ≥ 3 no n'hi ha cap, que n'hi ha exactament un (llevat d'equivalència) en dimensió 2 i que n'hi ha exactament dos (llevat d'equivalència) en dimensió 1.

IV.13 Considereu les formes quadràtiques $x^2 + 2xy + xz + 3yz$ i $x^2 + y^2 + 2yz$ sobre el cos de cinc elements. Determineu si són equivalents o no. Ho són com a còniques?

IV.14 Considereu aquestes formes quadràtiques de dimensió 3 sobre el cos $\mathbb{F}_q$ amb q senar:

$$Q_+ = xy + z^2, \quad Q_- = xy + vz^2$$
$$Q_s = x^2 + y^2 + z^2, \quad Q_n = x^2 + y^2 + vz^2$$

on $v \in \mathbb{F}_q$ no és un quadrat. Decidiu quines equivalències hi ha entre aquestes quatre formes quadràtiques. Feu el mateix en dimensió 2 amb les formes

$$Q_s = x^2 + y^2, \quad Q_+ = xy$$
$$Q_n = x^2 + vy^2, \quad Q_- = x^2 - vy^2$$

Finalment, repetiu aquest mateix exercici canviant «formes quadràtiques» per «quàdriques».

IV.15 Sigui ρ el rang d'una quàdrica i ρ^∞ el rang de la quàdrica restringida a un hiperplà. Demostreu que $\rho - 2 \leq \rho^\infty \leq \rho$. Demostreu que aquestes desigualtats no es poden millorar.

IV.16 Sigui $p(x)$ un polinomi de grau tres sobre el cos real. Observeu que

$$q(x, y) = \frac{p(x) - p(y)}{x - y}$$

és una cònica afí. Classifiqueu-la.

IV.17 Sigui Q una quàdrica afí. Direm que un punt P és un *centre* de Q si la simetria central respecte de P deixa invariant Q. Demostreu que P és un centre de Q si i només si $\nabla Q(P) = 0$.[2] Quines còniques reals tenen centre?

IV.18 Considereu la cònica real afí

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x + 10y - 10.$$

Classifiqueu-la i trobeu una afinitat que la transformi en la seva forma canònica. Feu-ho per dos mètodes: (1) per completió de quadrats (exercici 7); (2) aplicant el teorema que diu que tota matriu simètrica diagonalitza en una base ortonormal. Observeu la innegable superioritat (computacional) del mètode de completió de quadrats.[3]

IV.19 Classifiqueu aquesta quàdrica de l'espai afí real de dimensió tres:

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + 6y - z + 1.$$

IV.20 Considereu aquestes tres quàdriques d'un espai afí k^3:

$$(a)\, xy = z; \quad (b)\, x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad (c)\, x^2 + y^2 = z.$$

Decidiu quines d'aquestes quàdriques són equivalents (a l'espai afí, s'entén) i quines no ho són, en els casos $k = \mathbb{R}$ i $k = \mathbb{C}$.

IV.21 Sigui Q una quàdrica i sigui l una recta. Direm que l és *tangent* a Q si la intersecció de Q amb l és un *punt doble* (és a dir, és equivalent a la quàdrica x^2). Trobeu totes les rectes del pla afí real que passen pel punt $(1, -2)$ i són tangents a la cònica $2x^2 - y^2 - x - y = 3$.

IV.22 Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no degenerada del pla projectiu real i sigui P un punt del pla. Si pel punt P passen exactament dues rectes tangents a $\mathcal{C}$, que tallen la cònica en punts A i B, aleshores, la recta AB és, per definició, la *recta polar del punt P respecte de la cònica $\mathcal{C}$*. Sigui ara $\mathcal{C}$ la cònica $x^2 + y^2 = z^2$ i sigui $P = \{1, 0, 0\}$. Trobeu l'equació de la recta polar de P.

IV.23 Demostreu que la quàdrica real no degenerada de dimensió 3 i índex 2 és *doblement reglada* perquè per cada punt hi passen dues rectes contingudes a la quàdrica.

---

[2] Aquí el símbol ∇ indica l'operador *gradient* del càlcul diferencial.

[3] En aquest exemple resulta evident que el mètode de completió de quadrats és molt més eficient, però cal tenir en compte dues coses: (1) el mètode que es basa en el teorema de diagonalització de les matrius simètriques té importància teòrica de cara al càlcul de l'índex; (2) el mètode de completió de quadrats proporciona una *afinitat* mentre que el mètode de diagonalització proporciona un *moviment rígid* i, per tant, aquest mètode és important en un context de «classificació euclidiana de les quàdriques» (que no tenim temps de tractar aquí).

IV.24 Considereu la quàdrica $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ de l'espai projectiu real de dimensió 3. Per cada λ sigui H_λ l'hiperplà $x + y = \lambda t$. Classifiqueu, en funció de λ, la quàdrica afí que s'obté prenent H_λ com a hiperplà de l'infinit.

IV.25 Trobeu un espai quadràtic V, dos hiperplans H_1, H_2 i una similitud $\phi : H_1 \to H_2$ que no es pugui estendre a cap similitud $\psi : V \to V$.

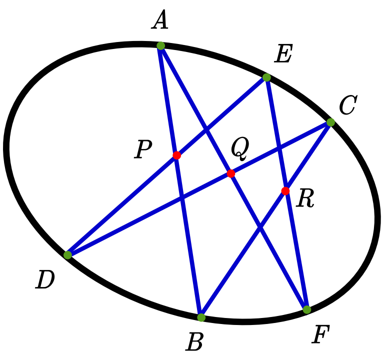
IV.26 Demostreu la regla dels signes de Descartes (pàgina 216) seguint aquests passos: sigui $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomi amb coeficients reals. No és restrictiu suposar que $a_0 > 0$. Procediu per inducció sobre n per demostrar que el nombre d'arrels positives de $q(x)$ és menor o igual al nombre de canvis de signe. Per fer-ho, compareu el nombre de canvis de signe de $p(x)$ amb els de la seva derivada $p'(x)$ i compareu el nombre d'arrels positives de $p(x)$ amb el nombre d'arrels positives de $p'(x)$ (apliqueu el teorema de Rolle). Suposeu ara que $p(x)$ té totes les seves arrels reals, apliqueu el resultat anterior a $p(x)$ i $p(-x)$ i arribeu a la conclusió que el nombre d'arrels positives de $p(x)$ és igual al nombre de canvis de signe de $p(x)$.

IV.27 Considerem les paràboles $y = \frac{1}{u} x^2$, $x = \frac{1}{u} y^2$ on $u \neq 0$ és una constant fixada. Per cada recta $y = \lambda x$ considerem els punts A_λ, B_λ on la recta talla cadascuna d'aquelles paràboles. Denotem per O l'origen de coordenades. Demostreu que els punts X tals que $A_\lambda, B_\lambda, O, X$ (en aquest ordre) formen quaterna harmònica són els punts del *folium* de Descartes $x^3 + y^3 - 2uxy = 0$.

IV.28 (Definició sintètica de cònica.) Una *cònica sintètica* en un pla projectiu axiomàtic X és el conjunt de punts de X on es tallen les rectes corresponents d'una projectivitat (que no sigui perspectivitat) $f : \mathcal{L}_P \to \mathcal{L}_Q$ entre dos feixos de rectes de centres diferents P i Q (exercici **II**.32). Demostreu que si $X = P_2(k)$, efectivament aquest conjunt de punts és una cònica no degenerada (segons el concepte de cònica que considerem al curs).

IV.29 Siguin P, Q dos punts diferents d'una cònica no degenerada del pla projectiu real. Demostreu que els punts de la cònica són els punts on es tallen les rectes corresponents per una projectivitat (que no és perspectivitat) entre el feix de rectes de centre P i el feix de rectes de centre Q.

IV.30 Demostreu el teorema de Pascal (pàgina 52): Si $ABCDEF$ és un hexàgon inscrit a una cònica no degenerada, el punts $P = AB \cap ED$, $Q = CD \cap FA$ i $R = BC \cap EF$ estan alineats. Per fer-ho, apliqueu l'exercici anterior i considereu la perspectivitat de centre D sobre la recta AB, la perspectivitat de centre F sobre la recta BC i una perspectivitat de centre Q entre les rectes AB i BC.



IV.31 (Ternes pitagòriques.) Volem determinar totes les *«ternes pitagòriques»*, és a dir, tots els enters x, y, z tals que $x^2 + y^2 = z^2$. Això és equivalent a trobar tots els *punts racionals* —és a dir, els punts de coordenades racionals— de la cònica $x^2 + y^2 = 1$. Podem procedir d'aquesta manera: trobem un punt racional concret P i considerem totes les rectes que passen per P. Per cada recta, trobem la seva intersecció amb la cònica, que serà un altre punt racional. D'aquesta manera els trobarem tots. Apliqueu aquest mètode a les ternes pitagòriques i recupereu la proposició 29 del llibre X d'Euclides que afirma que totes les ternes pitagòriques s'obtenen prenent enters arbitraris u, v i considerant $x = u^2 - v^2$, $y = -2uv$, $z = u^2 + v^2$.

Complements: demostració dels teoremes principals del curs

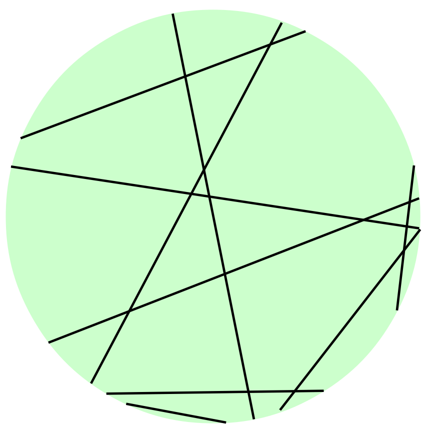
C.1. Models de la geometria hiperbòlica

Lamentablement, en aquest curs no tenim temps per desenvolupar, ni que sigui mínimament, la geometria hiperbòlica —que recordem que és la geometria que compleix tots els axiomes d'Euclides-Hilbert menys l'axioma de les paral·leles, que és fals en aquesta geometria— però sí que voldríem demostrar que la geometria hiperbòlica «existeix» en el sentit que és possible construir un *model* d'aquesta geometria. Ja sabem que construir un model de la geometria hiperbòlica vol dir donar definicions dels conceptes primitius de la geometria —punt, recta, ordre i congruència— dins de la matemàtica «estàndard», demostrar els diversos axiomes i veure que l'axioma de les paral·leles no es verifica.

Donarem **tres models** de la geometria hiperbòlica —els tres més coneguts— però només demostrarem tots els detalls en un d'ells. Per tal de simplificar l'exposició ens limitarem —tal com vam fer quan vam estudiar la geometria de Hilbert— al cas de la **geometria plana**.

El model del disc de Klein

El model de la geometria hiperbòlica que es coneix com a **model de Klein**, no va ser descobert per primera vegada per Felix Klein, sinó que va ser descobert tres anys abans per Eugenio Beltrami el 1868.[1]



[1] Un exemple més de la *llei de Boyer*.

Considerem, en el pla euclidià ordinari $\mathbb{R}^2$, els dos subconjunts següents:

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$

Els *punts* de la geometria seran els punts de $\mathcal{K}$ i les *rectes* de la geometria seran les rectes de $\mathbb{R}^2$ que tallen $\mathcal{K}$. La relació d'*incidència* i la relació d'*ordre* són les mateixes que al pla $\mathbb{R}^2$. Hem de tenir en compte, doncs, que només els punts de $\mathcal{K}$ són punts de la geometria i així, per exemple, dues rectes que es tallin en un punt exterior a $\mathcal{K}$ seran, en aquest model, disjuntes.

Ens adonem immediatament que en aquesta geometria es compleixen els axiomes d'incidència, els axiomes d'ordre i l'axioma de Dedekind. També és evident que l'axioma de les paral·leles *no* es compleix. Però no podem afirmar encara que tinguem un model de la geometria hiperbòlica, perquè no hem definit el concepte de *congruència* de segments i angles. La manera més senzilla d'abordar el problema de la congruència és abandonar el punt de vista d'Euclides-Hilbert i adoptar el punt de vista de Klein, és a dir, introduir el «moviment».

En primer lloc, mirem $\mathcal{K}$ des d'un punt de vista projectiu. Considerem el pla projectiu $P_2(\mathbb{R})$ i la cònica projectiva real no degenerada $X^2 + Y^2 - Z^2$ i considerem $\mathcal{K}$ i $\mathcal{C}$ com a subconjunts de $P_2(\mathbb{R})$. Realment, com que la cònica no té punts a l'infinit, no hem canviat res de $\mathcal{K}$ ni de $\mathcal{C}$: simplement hem ampliat l'espai ambient del pla afí real al pla projectiu real. Aleshores, definim un **moviment rígid** de $\mathcal{K}$ com una col·lineació $P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ que deixa invariant la cònica $\mathcal{C}$.[2]

A partir dels moviments rígids, definim la congruència de segments i angles d'aquesta manera completament natural:

- Dos segments AB i $A'B'$ de $\mathcal{K}$ són congruents si i només si existeix un moviment rígid f tal que $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$.
- Dos angles hk i $h'k'$ de $\mathcal{K}$ són congruents si i només si existeix un moviment rígid f tal que $f(h) = h'$ i $f(k) = k'$.

Exemple. *Les rectes $X = 0$ i $Y = 0$ són perpendiculars.*[3] En efecte, considerem aquesta referència del pla projectiu:

$$A = \{-1, 0, 1\},\ B = \{1, 0, 1\},\ C = \{0, 1, 1\},\ D = \{0, 1, 0\}.$$

[2] Observem una interessant similitud entre aquesta definició de moviment rígid al pla de la geometria hiperbòlica i el concepte de moviment rígid al pla euclidià: en tots dos casos es tracta de col·lineacions que deixen invariant una cònica. En el cas hiperbòlic és la cònica real no degenerada $X^2 + Y^2 - Z^2$, mentre que en el cas euclidià és la cònica imaginària no degenerada $X^2 + Y^2 + Z^2$.

[3] Curiosament, aquestes dues rectes també són perpendiculars a la geometria euclidiana. De fet, es pot demostrar que, en els angles que tenen el vèrtex a l'origen $(0, 0)$, no hi ha diferència entre la geometria hiperbòlica i la geometria ordinària. Això deixa de ser cert quan el vèrtex de l'angle és en algun altre punt de $\mathcal{K}$.

Observem que $A, B, C \in \mathcal{C}$, mentre que D és a la recta de l'infinit. Considerem ara la col·lineació $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(A) = B,\ f(B) = A,\ f(C) = C,\ f(D) = D.$$

Sabem que aquesta col·lineació existeix i és única. D'altra banda, si $O = \{0, 0, 1\}$ és el centre de la circumferència $\mathcal{C}$, es compleix que f transforma l'angle $\widehat{BOC}$ en el seu adjacent $\widehat{AOC}$. Si f és un moviment rígid —és a dir, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$— això implicarà que aquests dos angles adjacent seran congruents i, per tant, els dos seran rectes. Per demostrar que f és un moviment rígid utilitzarem aquesta propietat de les còniques reals no degenerades: *una cònica real no degenerada està determinada per tres punts i les rectes tangents en dos d'aquests punts*. Aquí «recta tangent» vol dir una recta que talla la cònica en un únic punt. Aleshores, $f(\mathcal{C})$ serà una cònica que passarà pels punts A, B, C i tal que la recta tangent a A serà la recta AD i la recta tangent a B serà la recta BD. Només hi ha una cònica amb aquestes propietats: la cònica $\mathcal{C}$.

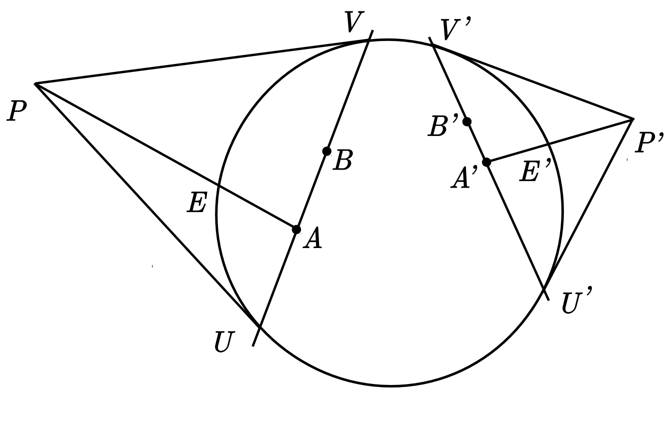
Per tal de comprovar que, amb la definició de congruència de segments i angles que hem donat, es compleixen els axiomes, definirem una **mesura** d'angles i segments que serà compatible amb els moviments rígids, de manera que dos segments o dos angles seran congruents si i només si tenen la mateixa mesura. L'eina fonamental per definir aquesta mesura és la *raó doble* de quatre punts alineats o de quatre rectes concurrents.

Siguin A i B dos punts de $\mathcal{K}$ i siguin U i V els punts d'intersecció de la recta que passa per A i B amb $\mathcal{C}$. Ordenem els punts U i V de manera que A estigui entre U i B. Definim:

$$\ell(AB) := (U, V, A, B).$$

Observem que això està ben definit, és a dir, no depèn de l'ordre dels punts A i B. Aquesta funció ℓ compleix

$$\ell(AB) = \ell(A'B') \text{ si i només si } AB \equiv A'B'.$$



Per demostrar aquesta propietat fem la construcció següent. Siguin U, V, U', $V' \in \mathcal{C}$ els punts que s'utilitzen per definir $\ell(AB)$ i $\ell(A'B')$. Sigui P el punt de $P_2(\mathbb{R})$ on es tallen les tangents a $\mathcal{C}$ per U i V i sigui P' el punt de $P_2(\mathbb{R})$ on es tallen les tangents a $\mathcal{C}$ per U' i V'. Sigui $E \in \mathcal{C}$ el punt on la recta PA talla $\mathcal{C}$ i sigui $E' \in \mathcal{C}$ el punt on la recta $P'A'$ talla $\mathcal{C}$. Sigui f l'única col·lineació de $P_2(\mathbb{R})$ que transforma U, V, E, P en U', V', E', P'. Resulta que f és un moviment rígid pel mateix raonament de l'exemple anterior. Ara, com que les col·lineacions conserven la raó doble, és evident que $f(B) = B'$ si i només si $(U, V, A, B) = (U', V', A', B')$.

Amb aquesta propietat ja tenim que la noció de congruència de segments compleix els axiomes **III.1**, **III.2** i **III.3**.

Observem que hem associat a cada segment AB un nombre real $\ell(AB)$ de manera que els segments congruents són aquells per als quals la funció ℓ pren el mateix valor. Per tant, seria lògic anomenar $\ell(AB)$ la *longitud hiperbòlica* del segment AB. Ara bé, aquesta funció ℓ és multiplicativa i pren valors a l'interval $(0, 1]$, de manera que el segment *nul* AA tindria longitud 1 i una semirecta tindria longitud 0. Tot això és perfectament coherent, però no s'adiu amb les propietats que té la funció distància de la geometria elemental. Per tal d'evitar això, s'acostuma a introduir la funció $-\log$ en la definició de la longitud hiperbòlica, de manera que la mesura hiperbòlica d'un segment —en aquest model de Klein que estem estudiant ara— s'acostuma a definir com

$$d_h(A, B) = -\frac{1}{2} \log (U, V, A, B).$$

Així, tenim una funció distància[4] que és additiva, el segment nul té longitud zero i una semirecta té longitud ∞. De tota manera, des del punt de vista que adoptem en aquest capítol, la introducció de $-\frac{1}{2}\log$ té un interès exclusivament estètic.

La definició de la **mesura d'angles** és lleugerament més complicada que la definició de la mesura de segments, però també es basa en la raó doble. Suposem, doncs, que tenim dues rectes diferents a, b que es tallen en un punt $P \in \mathcal{K}$. Siguin u i v les rectes que passen per P i són tangents a la cònica $\mathcal{C}$. Recordem que tenim el concepte de *raó doble de quatre rectes concurrents*. Considerem, doncs, la raó doble (u, v, a, b) i definim la mesura de l'angle format per les rectes a, b com

$$\ell(ab) := (u, v, a, b).$$

Tanmateix, aquesta definició té un problema: com que el punt P es troba a l'*interior* de la cònica $\mathcal{C}$, les rectes u i v *no existeixen*! Cal, doncs, fer alguna modificació a aquesta definició, preservant la idea original. La solució és senzilla: les rectes u i v

[4]Evidentment, res no canvia si en lloc del coeficient 1/2 utilitzem qualsevol altra constant positiva. Es tracta només d'una elecció arbitrària del «segment unitat». El coeficient 1/2 dóna lloc a unes fórmules lleugerament més senzilles i el motiu de fons és que, escollint aquest coeficient, la *curvatura* de la geometria és -1. No podem tractar aquests temes amb més detall.

no existeixen com a rectes del pla projectiu real, però sí que existeixen com a rectes del *pla projectiu complex* $P_2(\mathbb{C})$.[5] D'aquesta manera, podem definir $\ell(ab)$, que serà, en principi, un nombre complex. Tanmateix, cal fer algunes consideracions:

- Les rectes a i b tallen la recta de l'infinit en punts reals, mentre que les rectes u i v tallen la recta de l'infinit en dos punts no reals conjugats. En efecte, sigui $f : P_2(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ la col·lineació induïda per la conjugació complexa $z \mapsto \overline{z}$. És clar que f deixa invariants les rectes a i b (perquè estan definides sobre els reals) i converteix les rectes tangents u i v en rectes tangents. Com que u i v no són reals, l'única possibilitat és que f intercanviï les dues tangents. Per tant, si tallem les quatre rectes a, b, u, v amb la recta de l'infinit $Z = 0$, obtenim, com hem afirmat, dos punts reals i dos punts no reals conjugats.

- (u, v, a, b) és un nombre complex de mòdul u. Per calcular aquesta raó doble, tallem les quatre rectes amb la recta de l'infinit i obtenim quatre punts $z, \overline{z}, m, n$ amb m, n reals i z no real. Aleshores, $(u, v, a, b) = (z, \overline{z}, m, n)$, i un càlcul directe mostra que $(z, \overline{z}, m, n)\,\overline{(z, \overline{z}, m, n)} = 1$.

- La raó doble (u, v, a, b) està definida llevat d'una indeterminació, que prové de que les rectes a i b no estan ordenades, ni tampoc no ho estan les rectes u i v. Per tant, la raó doble (u, v, a, b) és un nombre complex de mòdul u, definit llevat de conjugació. Prenem l'ordenació convenient per tal que tingui part imaginària no negativa.

- Si ara fixem el punt P i la recta a, la correspondència $b \mapsto (u, v, a, b)$ dóna una funció bijectiva i contínua entre les rectes que passen per P i la semicircumferència
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}.$$

En conclusió, donades dues rectes concurrents a, b del pla hiperbòlic $\mathcal{K}$, els podem associar una *mesura* $\ell(ab)$ que és un nombre complex de mòdul 1 amb part imaginària no negativa.

Exemple. Calculem $\ell(a, b)$ quan a i b són les rectes $X = 0$, $Y = 0$. El punt d'intersecció és el punt $O = (0, 0)$ i hem de trobar les dues rectes que passen per

[5] Aquí tenim un exemple interessant d'una consideració que vam fer quan estudiàvem les còniques i insistíem en fer la distinció entre una cònica i els seus punts. La cònica $X^2 + Y^2 - Z^2$ és una cònica a coeficients racionals —diem que el seu *cos de definició* és $\mathbb{Q}$— i podem considerar els seus punts a qualsevol cos que contingui $\mathbb{Q}$. Per exemple, els punts reals de la cònica són precisament $\mathcal{C}$, però també podem considerar els seus punt complexos, és a dir, els seus punts a $P_2(\mathbb{C})$. De la mateixa manera, la recta a vindrà donada per una equació $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ amb coeficients reals i podem considerar els punts reals de la recta —que estaran a $P_2(\mathbb{R})$— o bé els punts complexos d'aquesta mateixa recta —que estaran a $P_2(\mathbb{C})$— o bé els seus punts a qualsevol cos que contingui els reals.

O i tallen la cònica en un únic punt. És fàcil veure que són les rectes $Y = iX$, $Y = -iX$. Tenim ja les quatre rectes a, b, u, v i hem de calcular la raó doble (u, v, a, b). Per fer-ho, tallem aquestes quatre rectes amb una recta, per exemple la recta de l'infinit $Z = 0$. Els punts que obtenim són

$$\{1, i\},\ \{1, -i\},\ \{0, 1\},\ \{1, 0\}.$$

La raó doble d'aquests quatre punts, en aquest ordre, és -1. Per tant, $\ell(X = 0, Y = 0) = -1$. Recordem que hem vist que aquestes dues rectes són perpendiculars. D'altra banda, es evident que si a és una recta qualsevol, $\ell(aa) = 1$.

Aquesta mesura que hem definit compleix una propietat similar a la de la mesura de segments:

> *$\ell(ab) = \ell(a'b')$ si i només si existeix un moviment rígid f tal que $f(a) = a'$ i $f(b) = b'$.*

La implicació en un sentit és immediata: si hi ha un moviment rígid que transforma les rectes a i b en les rectes a' i b', aleshores $\ell(ab) = \ell(a'b')$. La implicació interessant és la recíproca.

Suposem que tenim dues rectes a i b que es tallen en un punt de $\mathcal{K}$ i dues rectes a' i b' que es tallen en un punt de $\mathcal{K}$, de manera que $\ell(ab) = \ell(a'b')$. Hem de trobar un moviment rígid f tal que $f(a) = a'$ i $f(b) = b'$. La construcció és molt similar a la que vam fer en el cas de la congruència de segments, fins el punt que podem utilitzar el mateix dibuix anterior. La recta a serà la recta UV del dibuix anterior i el punt A del dibuix serà el punt on es tallen a i b. Anàlogament, la recta a' serà la recta $U'V'$ del dibuix anterior i el punt A' del dibuix serà el punt on es tallen a' i b'. Els punts $UPVE$ formen una referència del pla projectiu i els punts $U'P'V'E'$ serà una altra referència. En aquestes condicions, sigui f la col·lineació de $P_2(\mathbb{R})$ que transforma la primera referència en la segona. Per un argument que ja hem utilitzat dues vegades, f serà un moviment rígid. f també definirà una col·lineació de $P_2(\mathbb{C})$. Siguin u, v les rectes tangents a $\mathcal{C}$ des del punt A, ordenades de manera que

$$\ell(ab) = (u, v, a, b).$$

Aleshores, $f(u), f(v)$ seran les rectes tangents a $\mathcal{C}$ des del punts A'. Com que les col·lineacions conserven la raó doble, tindrem

$$\ell(a'b') = \ell(ab) = (u, v, a, b) = (f(u), f(v), a', f(b)) \in \mathbb{C}.$$

Ara hi ha dues possibilitats:

- Si $(f(u), f(v), a', b')$ té part imaginària ≥ 0, aleshores

  $$\ell(a'b') = (f(u), f(v), a', b')$$

  i, per tant, $(f(u), f(v), a', f(b)) = (f(u), f(v), a', b')$. Deduïm $f(b) = b'$.

- Si $(f(u), f(v), a', b')$ té part imaginària < 0, aleshores

$$\ell(a'b') = (f(v), f(u), a', b')$$

  i ens cal fer un pas més en la demostració. Sigui g la col·lineació que transforma la referència $U'P'V'E'$ en la referència $U'P'V'E''$, on E'' és el punt $\neq E'$ on la recta $P'A'$ talla $\mathcal{C}$. Aleshores, és senzill veure[6] que $g(a') = a'$ i g permuta les dues tangents a $\mathcal{C}$ per A'. Per tant,

$$\begin{aligned}(f(v), f(u), a', b') = \ell(a'b') = \ell(ab) &= (f(u), f(v), a', f(b)) \\ &= (gf(u), gf(v), a', gf(b)) = (f(v), f(u), a', gf(b))\end{aligned}$$

  i $h := gf$ és el moviment rígid que buscàvem.

Igual com passava amb la primera definició que hem donat de mesura d'un segment, la funció $\ell(ab)$ és perfectament vàlida per mesurar l'angle que formen dues rectes, però té l'inconvenient que és multiplicativa en lloc d'additiva, val -1 quan les rectes són perpendiculars i val 1 quan les rectes són iguals. Si volem una mesura d'angles additiva en la qual l'angle nul mesuri zero i l'angle recte mesuri $\pi/2$, la solució és molt senzilla: $\ell(ab)$ és un complex de mòdul 1 amb part imaginària no negativa, és a dir, és de la forma $\ell(ab) = \exp(2i\theta)$, per algun $\theta \in [0, \pi/2]$ ben definit. Podem redefinir la mesura de l'angle que formen les dues rectes a, b com el nombre real θ. La fórmula clàssica que apareix als llibres és

$$\ell(ab) := \frac{1}{2i}\,(u, v, a, b) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

De tota manera, cal recordar que dues rectes concurrents no és el mateix que un angle —que hem definit com a «dues semirectes del mateix vèrtex que no pertanyen a la mateixa recta»— per tant, estrictament parlant, la funció $\ell(ab)$ no és una *mesura d'angles*. Per mesurar angles, ho fem així: siguin h, k dues semirectes del mateix vèrtex que, per tant, determinen un angle, i siguin $\tilde{h} \neq \tilde{k}$ les rectes que contenen h, k, respectivament. Aleshores

- Si $\ell(\tilde{h}\tilde{k}) = \pi/2$, l'angle és recte i la seva mesura és $\pi/2$. Sabent quan un angle és recte, ja podem parlar d'angles aguts i d'angles obtusos.
- Si l'angle hk és agut, definim la seva mesura com $\ell(\tilde{h}\tilde{k})$. Si l'angle hk és obtús, definim la seva mesura com $\pi - \ell(\tilde{h}\tilde{k})$.

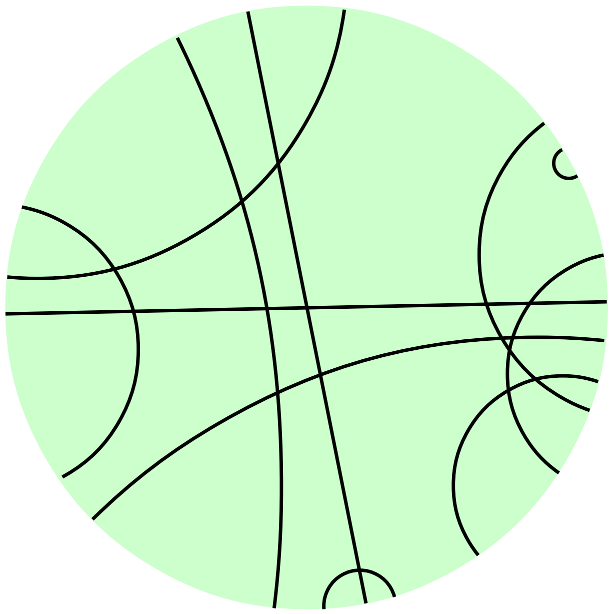
[6] En efecte, g transforma tangents en tangents. Per tant, o bé deixa les dues tangents tal qual o bé les permuta. Si les deixa tal qual, considerem els dos punts de tangència i, a més, els punts U', V'. g deixaria fixos quatre punts que formen una referència i g seria la identitat, però no ho és perquè $g(E') = E'' \neq E'$.

Ara ja podem afirmar que dos angles són congruents si i només si tenen la mateixa mesura.

De tot el que hem dit fins ara es dedueix que es compleix l'axioma **III.4** i només ens faltaria comprovar el crucial axioma **III.5** que és el criteri CAC que ens relaciona la congruència de segments amb la congruència d'angles. Però ara aquesta comprovació és immediata utilitzant el criteri que apareix a l'exercici **I**.38, perquè la comprovació de les hipòtesis de l'exercici l'hem fet al llarg de la discussió anterior.

Dos models de Poincaré

Un dels models més coneguts del pla hiperbòlic és el **disc de Poincaré**,[7] que és precisament el model que hem presentat en el capítol 7.



Els punts de la geometria són els mateixos que en el model de Beltrami-Klein, però ara els anomenarem $\mathcal{D}$ per evitar confusions:

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$

però les rectes són diferents en els dos models. Les rectes (hiperbòliques) del disc de Poincaré són

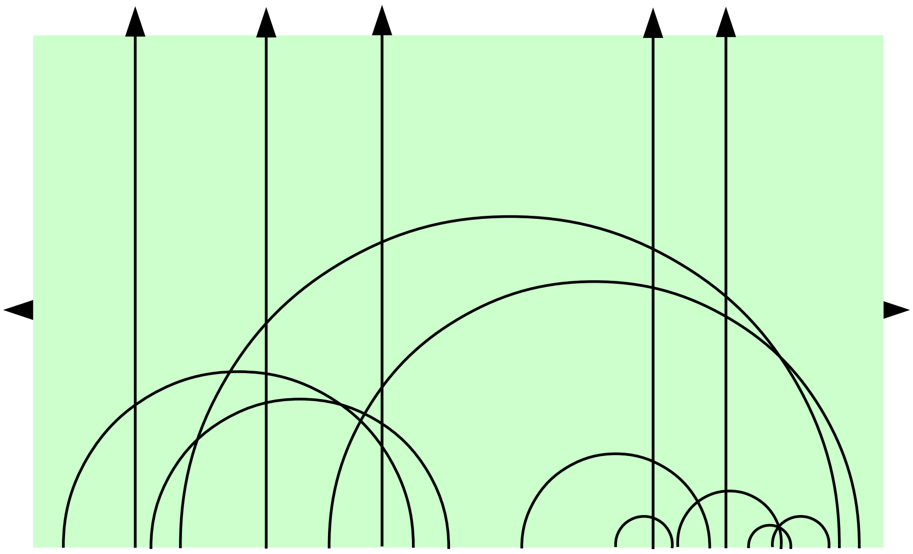
1. Les rectes ordinàries de $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen.
2. Les circumferències (ordinàries) de $\mathbb{R}^2$ que tallen ortogonalment la circumferència $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

[7] Descobert per Riemann.

Les relacions d'incidència i ordre al disc de Poincaré són les mateixes de la geometria euclidiana ordinària de $\mathbb{R}^2$. Una propietat molt interessant d'aquest model és que es tracta d'un model *conforme*: la mesura hiperbòlica d'un angle coincideix amb la mesura euclidiana d'aquest angle.[8] En canvi, la distància entre dos punts es mesura fent una mena de raó doble:

$$d_h(A, B) := -\log \frac{d(A, P)\, d(B, Q)}{d(A, Q)\, d(B, P)}$$

on $P, Q \in \mathcal{C}$ són els «punts a l'infinit» de la recta hiperbòlica que passa per A i B, ordenats de manera que A està entre P i B.[9]



L'altre model del pla hiperbòlic que duu el nom de Poincaré és el **semiplà de Poincaré**.[10] Els punts d'aquest model són

$$\mathcal{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

és a dir, els punts del semiplà superior del pla euclidià $\mathbb{R}^2$. Les rectes són

1. Les rectes verticals ordinàries de $\mathbb{R}^2$.
2. Les circumferències (ordinàries) de $\mathbb{R}^2$ que tenen el centre a l'eix x.

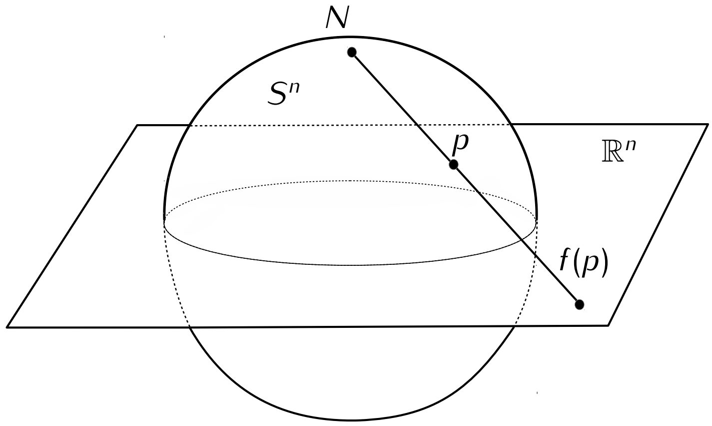
[8] Evidentment, definim l'angle (euclidià) que formen dues circumferències que es tallen com l'angle que formen les seves tangents.

[9] Igual que en el model de Beltrami-Klein, podem escollir arbitràriament el segment unitat introduint una constant positiva a la definició de distància, però la millor opció —la que simplifica les fórmules de la geometria— és, ara, prendre aquesta constant igual a 1.

[10] El primer que el va utilitzar va ser Beltrami.

També és un model *conforme* —els angles hiperbòlics es mesuren igual que els angles euclidians—, les relacions d'incidència i ordre són les mateixes del pla euclidià $\mathbb{R}^2$ i la distància entre dos punt es mesura amb la mateixa fórmula del disc de Poincaré —amb la interpretació òbvia, quan els punts estan sobre una recta vertical.

Tanmateix, els tres models que hem presentat $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$ són equivalents entre ells.[11] Per veure-ho, hem d'introduir el concepte de **projecció estereogràfica**, que és un concepte que té interès per ell mateix. Sigui S^n l'esfera unitat de $\mathbb{R}^{n+1}$ i sigui $N \in S^n$ un punt qualsevol. Considerem un hiperplà H de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $N \in H^{\perp}$. Aleshores, tenim una bijecció contínua $f : S^n - N \to H$ que transforma cada punt $p \in S^n - N$ en el punt $f(p)$ que s'obté tallant la recta Np amb H.



Projecció estereogràfica de $S^n - \{N\}$ a $\mathbb{R}^n$.

Considerem ara l'esfera unitat $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ i siguin $A = (0,0,-1)$, $B = (-1,0,0)$. Considerem les projeccions estereogràfiques

$$p : S^2 - A \longrightarrow \{z = 0\}$$

$$q : S^2 - B \longrightarrow \{x = 1\}.$$

Identifiquem així els tres models de la geometria hiperbòlica que hem estudiat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 < 1\} \\
\mathcal{D} &= \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\} \\
\mathcal{H} &= \{(1, y, z) : z > 0\}
\end{aligned}$$

[11] Ja hem dit que qualsevol model de la geometria euclidiana és equivalent a $\mathbb{R}^2$. També es pot demostrar que hi ha una única geometria hiperbòlica i, per tant, tots els models han de ser equivalents.

Sigui

$$\mathcal{U} := \{(x, y, z) \in S^2\}$$

l'hemisferi superior de S^2 i sigui

$$\pi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U}$$

la projecció vertical $\pi(x, y, 1) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Direm sense demostració que tenim isomorfismes de models[12]

$$p\pi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{D}$$
$$qp^{-1} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Galeria de meravelles

Ja hem lamentat que no podem desenvolupar, en aquest curs, la geometria hiperbòlica, però sí que estaria bé acabar aquest capítol amb una petita «galeria de meravelles» que presenti algunes propietats curioses i admirables de la geometria hiperbòlica que fan que sigui ben diferent de la geometria que ens va ensenyar Euclides.

- **Les rectes fan coses repugnants.**

  Adrien-Marie Legendre va ser un dels molts matemàtics que, al llarg de la història, van estar obsessionats en demostrar l'axioma de les paral·leles a partir dels altres axiomes d'Euclides. L'existència de la geometria hiperbòlica condemna aquests intents al fracàs: totes les «demostracions» del cinquè postulat han d'utilitzar, en un moment o altre, alguna propietat «evident» que només es pot demostrar amb l'axioma de les paral·leles. Legendre es va concentrar en demostrar que la suma dels angles d'un triangle no pot ser menor que dos rectes, sense utilitzar, és clar, l'axioma de les paral·leles. Les seves successives «demostracions» van apareixent en les diverses edicions —a partir del 1794— dels seus *Éléments de géométrie*.

  En una de les darreres edicions del seu llibre de geometria, Legendre presenta una demostració correcta que només utilitza el «fet» que una recta no pot estar continguda completament a l'interior d'un angle. En una nota del llibre justifica aquesta propietat i el primer «argument» que dóna diu, textualment: *«or, il répugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle»*. A continuació, dóna una «demostració» que aquest fet repugnant no és possible, basada en que una recta ha de dividir el pla en dues parts «iguals».

[12] Un isomorfisme entre dos models és una bijecció entre els punts i una bijecció entre les rectes, de manera que es conservin les relacions d'incidència, ordre i congruència.

Observant qualsevol dels tres models de la geometria hiperbòlica que hem estudiant en aquest capítol veiem que, a la geometria hiperbòlica, qualsevol angle conté al seu interior infinites rectes.

- **No hi ha plànols a escala**

  A la geometria hiperbòlica es compleix el criteri AAA de congruència de triangles: *Si dos triangles tenen els angles corresponents congruents, també tenen els costats congruents.* És a dir, no hi ha triangles «semblants» o, dit d'una altra manera, si tenim un triangle i en volem fer un altre d'igual però més gran o més petit, no podem. No hi ha plànols a escala.

  Si, per exemple, observem què passa en el model de Poincaré —recordem que és un model conforme i, per tant, els angles hiperbòlics són iguals que els angles euclidians— veiem que podem construir triangles amb angles molt i molt petits, sempre que els costats siguin molt i molt grans. D'alguna manera, a la geometria hiperbòlica els angles i les distàncies són interdependents i no gaudeixen de la «llibertat» que tenen a la geometria d'Euclides.

  Tanmateix, aquesta «estranya» propietat de la geometria hiperbòlica no ens hauria de sorprendre: tampoc no hi ha plànols a escala de la superfície de la Terra, és a dir, plànols que redueixin (exactament) totes les distàncies en un factor constant.[13]

- **Enrajolar és molt més interessant.**

  Si volem enrajolar un pla —en el nostre espai euclidià habitual— amb rajoles idèntiques que siguin polígons regulars, les possibilitats que tenim són molt poques. Podem fer-ho amb triangles equilàters i a cada vèrtex hi confluiran sis triangles; ho podem fer amb quadrats i a cada vèrtex hi confluiran quatre quadrats; ho podem fer amb hexàgons regulars i a cada vèrtex hi confluiran tres hexàgons. Cap altre enrajolat «regular» és possible en aquesta avorrida geometria euclidiana. També podríem fer ràpidament una llista de les escasses possibilitats que tenim per omplir un espai de dimensió tres amb políedres regulars.

[13] Aquest exemple que acabem de posar requereix una explicació. Normalment, entenem que un plànol d'una regió de la Terra és una reproducció d'aquesta regió en un pla, de manera que les distàncies al pla i a la Terra siguin proporcionals, és a dir, la distància a la Terra s'obté multiplicant la distància al plànol per un *factor d'escala* ($\neq 1$) constant. La teoria de la *curvatura de Gauss* que s'estudia als cursos de geometria diferencial ens mostra que això no és possible fer-ho de manera exacta, però resulta que tampoc no és possible fer-ho sobre una superfície esfèrica igual a la de la Terra —el problema no rau en voler que el mapa sigui pla— perquè a la geometria esfèrica també hi ha criteri AAA de congruència de triangles. Quan diem que a la geometria hiperbòlica no hi ha plànols a escala, volem dir exactament el mateix que en el cas dels mapes de la Terra: no és possible reproduir de manera exacta una regió del pla hiperbòlic en el mateix pla hiperbòlic (o en un pla euclidià) —a menys, és clar, que ho fem a escala 1:1.

En canvi, el que succeeix a la geometria hiperbòlica és absolutament extraordinari: podem enrajolar amb qualsevol polígon regular i podem decidir lliurement quantes rajoles volem que es toquin a cada vèrtex.[14] Are bé: el preu que cal pagar per tenir un enrajolat molt «exòtic» pot ser molt gran. Si volem que a cada vèrtex hi hagi moltes rajoles, cada rajola haurà de tenir uns angles molt petits i això només serà possible si la rajola és molt gran.

Aquest fet que acabem de descriure té una gran importància. Està relacionat amb les superfícies compactes i els seus recobriments, amb la teoria dels grups fuchsians, amb les varietats de dimensió tres...

Un enrajolat del disc de Poincaré amb pentàgons regulars iguals, de manera que a cada vèrtex hi conflueixen cinc pentàgons. Cada rajola conté un retrat de János Bolyai original de Ferenc Márkos. Els retrats de dues rajoles adjacents estan relacionats per una reflexió ortogonal respecte de la recta que forma la seva vora comuna. *[Generat amb les eines de Malin Chistersson (llicència Creative Commons).]*

[14] Només hi ha unes poques restriccions evidents: amb triangles n'hi ha d'haver més de sis a cada vèrtex; amb quadrats, més de quatre; amb pentàgons o amb hexàgons, més de tres.

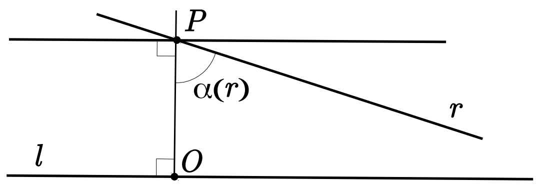
- **Hi ha un patró universal de longitud.**

  A la geometria euclidiana trobem natural que hi hagi un «patró universal» per mesurar angles però no hi hagi cap patró universal per mesurar longituds. És a dir, podem prendre l'angle recte, que és un angle unívocament definit per les seves propietats geomètriques, i utilitzar-lo —ell o qualsevol múltiple o submúltiple— com a «angle unitat». En canvi, no hi ha cap segment que tingui unes propietats geomètriques intrínseques que ens el singularitzin de manera que el puguem utilitzar com a unitat «universal» de longitud. El motiu de fons d'aquesta situació és que la geometria euclidiana admet «homotècies»: donada una figura, en podem construir una altra amb els mateixos angles i les longituds multiplicades per un factor constant.

  En canvi, a la geometria hiperbòlica hem vist que distàncies i angles estan íntimament relacionats i també hem vist que no és possible fer «homotècies». Això suggereix que a la geometria hiperbòlica hi podria haver un «patró universal» de longituds.[15] Per explicar quin és aquest patró de longituds cal fer algunes consideracions prèvies.

  Al pla hiperbòlic, per definició, hi ha una recta l, un punt $P \notin l$ i, com a mínim, dues rectes r_1, r_2 que passen per P i no tallen l. A partir d'aquí es pot estudiar el comportament de les rectes del pla que no es tallen i s'arriba a demostrar això:

  - Per cada recta l i cada punt $P \notin l$ hi ha infinites rectes r que passen per P i no tallen l.
  - Sigui r una semirecta de vèrtex P i sigui $\alpha(r)$ l'angle que forma r amb la perpendicular a l per P. Ja sabem que si $\alpha(r) = \pi/2$, aleshores r no talla l.

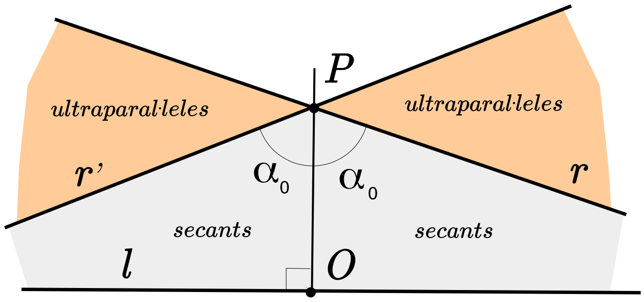
    

  - Podem dividir l'interval $[0, \pi/2]$ en dos subconjunts disjunts A i B, de manera que $\alpha(r) \in A$ si i només si r talla l.
  - No és difícil veure que A és un interval semiobert i B és un interval tancat. És a dir, existeix un angle $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $A = [0, \alpha_0)$ i $B = [\alpha_0, \pi/2]$. Dit d'una altra manera: les semirectes que formen un

[15] Si pensem en la geometria esfèrica —la de la superfície d'una esfera— no ens costa gens veure que aquest patró universal de longitud sí que existeix: la longitud d'una recta qualsevol, és a dir, la longitud d'un cercle màxim de l'esfera. De fet, la definició original del *metre* del sistema mètric es va fonamentar en aquest patró universal: un metre era 0.25×10^{-7} vegades la longitud d'un meridià.

angle més petit que α_0 tallen l i les que formen un angle més gran o igual a α_0 no tallen l.

- Les dues rectes amb $\alpha(r) = \pm\alpha_0$ direm que són les **paral·leles** a l per P. De les altres rectes que passen per P i no tallen l en direm *ultraparal·leles*.



- De l'angle α_0 que formen les dues paral·leles r i r' a l per P en direm l'**angle de paral·lelisme**. És clar que només depèn de la classe de congruència del segment PO.

En conclusió, podem assignar a cada segment un nombre real de $(0, \pi/2)$ que sigui l'angle de paral·lelisme corresponent al segment PO donat. Aquesta funció Π és decreixent i exhaustiva i ens permet **definir** una unitat de longitud com la d'un segment PO tal que (per exemple) $\Pi(PO) = \pi/3$.

És clar que aquest valor $\pi/3$ que, de manera arbitrària, hem utilitzat, pot substituir-se per qualsevol altre valor. Ens podem preguntar quina és la «millor» opció. En el cas de la mesura d'angles, assignem a l'angle recte el valor (arbitrari) $\pi/2$ perquè d'aquesta manera es simplifiquen moltíssim les fórmules de la trigonometria i del càlcul. D'una manera similar, resulta que la millor elecció és la que fa que el segment PO amb $\Pi(PO) = \pi/4$ tingui una longitud igual a $\log(1+\sqrt{2})$.[16] Amb aquesta elecció, la funció Π té una descripció relativament senzilla[17]

$$\Pi(x) = \arccos\tanh(x).$$

[16]Recordem que en el model de Klein definíem la longitud d'un segment AB amb la fórmula $\ell = -a\log(U, V, A, B)$ on a era una constant arbitrària que preníem igual a $1/2$. És un exercici senzill veure que aquella elecció de $a = 1/2$ és precisament la que és coherent amb aquesta elecció d'ara.

[17]Aquesta és la famosa **fórmula de l'angle de paral·lelisme**, descoberta independentment per Bolyai i Lobatxevski. Es diu que quan aquests matemàtics van trobar aquesta fórmula va ser quan finalment van arribar a la convicció que havien descobert una nova geometria plenament coherent i vàlida.

C.2. Plans no desarguesians

Hem vist que, en dimensió més gran que dos, els axiomes d'espai projectiu impliquen el teorema de Desargues —i, aleshores, el teorema de coordinació ens diu que aquests espais són de la forma $P_n(k)$— però, en canvi, hi pot haver plans projectius (axiomàtics) on el teorema de Desargues sigui fals.

En aquest capítol estudiarem amb més detall alguns plans projectius on falla el teorema de Desargues: són els plans no desarguesians.[1]

Plans lliures

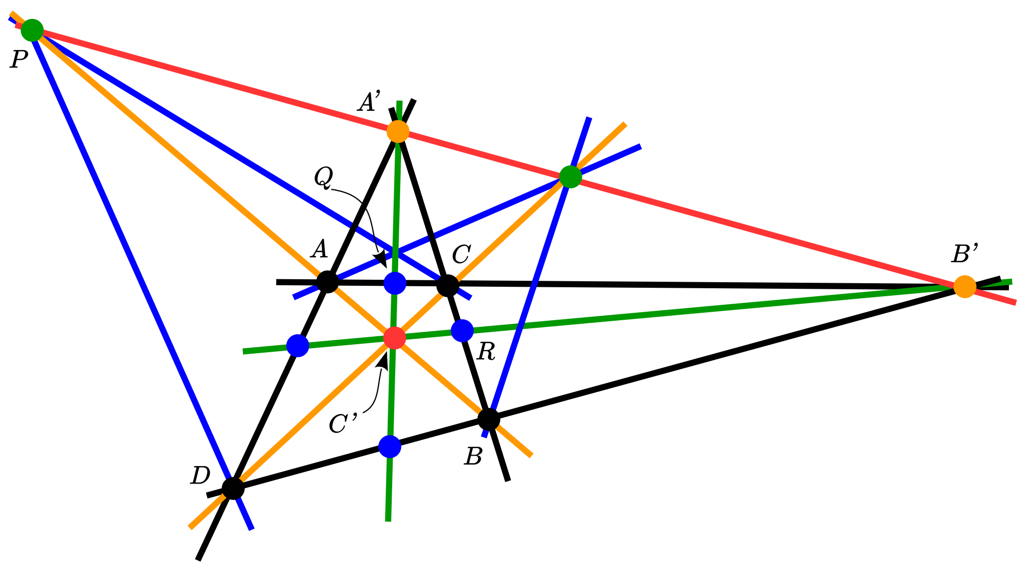
Els *plans lliures* són els exemples més senzills —i menys interessants— de plans no desarguesians. A l'exercici I.60 es demanava la construcció d'un d'aquests plans. La idea és ben senzilla:

1. Sigui X_0 la configuració formada per quatre punts A, B, C, D i quatre rectes $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{D, A\}$. Evidentment, X_0 no és un pla projectiu.
2. Definim $X_1 \supset X_0$ d'aquesta manera:
   - Els punts de X_1 són els punts de X_0 i, a més, per cada parella de rectes r, s de X_0 que no es tallin, un nou punt que serà incident només a les rectes r i s.
   - Les rectes de X_1 seran les de X_0 i, a més, per cada parella de punts A, B de X_0 que no estiguin alineats, una nova recta que serà incident només als punts A i B.
3. Repetim el procés i obtenim $X_2 \supset X_1$, $X_3 \supset X_2$, etc.

[1] Ens podem preguntar quin interès pot tenir estudiar aquests plans «estranys». Marshall Hall, en un article del 1943 justifica l'estudi dels plans projectius per la seves relacions amb l'anàlisi combinatòria, el *block design*, les àlgebres no associatives o no distributives, les identitats universals en grups i anells de divisió, els reticles, els conjunts parcialment ordenats («posets») i la física quàntica. Des del 1945 fins ara, amb l'eclosió de la revolució digital, aquesta llista s'ha ampliat moltíssim. En tot cas, un pla projectiu és una estructura que és conceptualment molt simple —punts, rectes, un quadrilàter, per dos punts una recta i per dues rectes un punt— i que, en canvi, ens permet «fer geometria» d'una manera plena.

4. Definim
$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i.$$

Per exemple, el dibuix següent representa l'etapa X_4. Els quatre punts inicials i les quatre rectes inicials són de color negre. A l'etapa X_1 introduïm els elements de color carbassa: dos punts i dues rectes. A l'etapa X_2 introduïm els elements de color vermell: un punt i una recta. A l'etapa X_3 apareixen els elements de color verd: dues rectes i dos punts. A l'etapa X_4 s'adjunten els elements de color blau, que són quatre punts i quatre rectes.



No és difícil demostrar per inducció aquestes dues propietats de la construcció anterior:

- A cada X_i es compleix que donats dos punts (diferents), hi ha com a màxim una recta que els uneix.
- Tres punts (diferents) de X_i estan alineats a algun X_j amb $j > i$ si i només si ja estan alineats a X_i.

X és un pla projectiu no desarguesià. Demostrar que és un pla projectiu és trivial. Per veure que no es compleix el teorema de Desargues observem els triangles ABC i $A'B'C'$ del dibuix anterior (que representa X_4). Estan en perspectiva respecte del punt D. Per tal que estiguessin en perspectiva respecte d'un eix caldria que els punts P, Q, R del dibuix estiguessin alineats a X. Com que a X_4 no estan alineats, per una propietat anterior, tampoc no estan alineats a X. Per tant, aquests dos triangles ens donen un contraexemple a Desargues.

Si fem la mateixa construcció anterior en lloc de començar a un quadrilàter comencem amb una configuració $\mathcal{C}$ arbitrària, obtindrem un pla projectiu X que contindrà $\mathcal{C}$. Això ens diu que *«cap configuració que contingui tres punts alineats pot ser un teorema a tots els plans projectius»* (exercici **I**.61).

Quanta àlgebra ens cal per construir un pla projectiu?

Si k és un cos, ja sabem com construir l'espai afí k^n i l'espai projectiu $P_n(k)$, però si ens fixem bé en la construcció d'aquests objectes geomètrics veiem que, de fet, la propietat commutativa de la multiplicació de k no s'utilitza en cap moment i, per tant, la mateixa construcció la podem fer quan k és un anell de divisió que no és cos. Obtenim espais projectius que no compleixen Pappos (però sí que compleixen Desargues). En podem preguntar ara quin seria un conjunt minimal de propietats de k que ens permetrien dotar k^n d'estructura d'espai afí axiomàtic i obtenir —per compleció com a la pàgina 62— un espai projectiu axiomàtic (encara que no complís el teorema de Desargues).

Si $n > 2$, la resposta és que k no pot ser menys que un anell de divisió, perquè sabem que tot espai projectiu de dimensió > 2 compleix Desargues i el teorema de coordinació ens diu que si es compleix Desargues aleshores l'espai projectiu *ha de ser* $P_n(k)$ per algun anell de divisió k.

Sabem (capítol 10) que tenir un pla projectiu és equivalent a tenir un pla afí. Suposem, doncs, que volem construir un pla afí (axiomàtic) k^2. Repassem bé la construcció d'aquest objecte per observar què és el que realment necessitem de k. Els punts, les rectes i la relació d'incidència de k^2 són:

Punts. Prenem com a conjunt de punts k^2, és a dir, les parelles (x, y), amb $x, y \in k$.

Rectes. Si descrivim una recta per la seva equació,[2] veiem que tenim les rectes $Y = Xm + b$ i les rectes $X = c$. Anomenarem aquestes rectes $R(m, b)$ i $R(c)$, respectivament, amb $m, b, c \in k$.

Incidència. Tenim dos casos d'incidència:

a) $(x, y) \in R(x)$ per tot $x, y \in k$.

b) $(x, y) \in R(m, b)$ si i només si $y = xm + b$.

Observem que l'únic moment en què utilitzem l'estructura algebraica de k és en el criteri d'incidència b) i aquest criteri només utilitza una única operació algebraica de k, l'operació[3]

$$(x, m, b) \mapsto xm + b.$$

[2] Escriurem els coeficients a la dreta perquè no volem utilitzar la propietat commutativa de la multiplicació.

[3] Aquesta operació de «multiplicar i després sumar» s'utilitza de manera important en els processadors digitals (unitats MAC).

Això ens suggereix que seria possible construir un pla projectiu a partir d'un conjunt k amb una operació $k^3 \to k$ que complís una sèrie de propietats necessàries i suficients perquè els criteris d'incidència anteriors donin lloc a un pla afí. Aquesta estructura algebraica «minimal» s'anomena un *anell ternari*:

Un *anell ternari* és un conjunt T (amb més d'un element) amb una operació ternària

$$(x, m, b) \mapsto \langle x, m, b \rangle$$

de manera que es compleixin aquests tres axiomes:[4]

1. Per tot $m, x, y \in T$, existeix un únic $b \in T$ tal que $\langle x, m, b \rangle = y$.
2. Per tot $m, m', b, b' \in T$ amb $m \neq m'$, existeix un únic $x \in T$ tal que $\langle x, m, b \rangle = \langle x, m', b' \rangle$.
3. Per tot $x, y, x', y' \in T$ amb $x \neq x'$, existeixen uns únics $m, b \in T$ tals que $\langle x, m, b \rangle = y$ i $\langle x', m, b \rangle = y'$.

És un exercici senzill veure que aquests tres axiomes són exactament les condicions necessàries i suficients perquè T^2, amb les rectes

$$R(c) := \{(c, y) : y \in T\}, \quad R(m, b) := \{(x, y) : y = \langle x, m, b \rangle\}, \quad c, m, b \in T$$

compleixi els axiomes de pla afí i, com a conseqüència, puguem definir un pla projectiu $P_2(T)$. En particular, si k és un anell de divisió, la definició $\langle x, m, b \rangle := xm + b$ ens dota k d'estructura d'anell ternari i aleshores el pla afí i el pla projectiu que obtenim coincideixen amb els plans afí i projectiu ordinaris que hem estudiat al llarg d'aquestes notes. Recíprocament, si $\mathcal{P}$ és un pla projectiu, r és una recta de $\mathcal{P}$ i ∞ és un punt de r, no és difícil introduir geomètricament una estructura d'anell ternari al conjunt $r - \infty$ de manera que $\mathcal{P}$ és el pla projectiu associat a aquest anell ternari.[5] Es tracta d'un procés de coordinació.

Una manera d'obtenir un anell ternari és a partir d'un **quasi-cos**. Un quasi-cos és un conjunt Q amb dues operacions (suma i producte) que tenen aquestes propietats:

1. Q és un grup abelià amb la suma.
2. Es compleix la propietat distributiva per l'esquerra: $a(b + c) = ab + ac$ per tot $a, b, c \in Q$. (Estem definint els quasi-cossos *per l'esquerra*.)

[4] Normalment, s'exigeix també que hi hagi dos elements $0, 1 \in T$ de manera que, per tot $a, b \in T$ es compleixi $\langle a, 0, b \rangle = \langle 0, a, b \rangle = b$ i $\langle a, 1, 0 \rangle = \langle 1, a, 0 \rangle = a$, però aquestes condicions no són necessàries per coordinar un pla afí.

[5] Aquest anell ternari que coordina el pla $\mathcal{P}$ depèn, en principi, de l'elecció de la recta r i del punt ∞.

3. Per tot $a, b, c \in Q$, $a \neq b$, existeix $x \in Q$ únic tal que $ax = bx + c$.
4. La multiplicació compleix aquestes propietats:
   (a) Té element neutre bilateral: $a1 = a = 1a$ per tot $a \in Q$.
   (b) $0a = 0$ per tot $a \in Q$.
   (c) Per tot $a, b \in Q$, $a \neq 0$, existeix un únic $x \in Q$ tal que $xa = b$.

És fàcil comprovar que si Q és un quasi-cos, aleshores $\langle x, m, b \rangle := xm + b$ defineix una estructura d'anell ternari sobre el conjunt Q.

El Pla de Veblen-Wedderburn

Es tracta del primer exemple descobert de pla projectiu finit no desarguesià. És un pla d'ordre nou, és a dir, té 91 punts i cada recta té 10 punts. Apareix en un treball de Veblen i Wedderburn del 1907, basat en uns treballs de Dickson del 1905.

Considerem el grup abelià $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ i denotem els seus 9 elements per 0, ± 1, $\pm i$, $\pm 1 \pm i$. Definim una multiplicació sobre A posant $0a = a0 = 0$, $a1 = 1a = a$ per tot a i de manera que la resta dels elements es multipliquin segons aquesta taula:

	-1	i	$-i$	$1+i$	$1-i$	$-1+i$	$-1-i$
-1	1	$-i$	i	$-1-i$	$-1+i$	$1-i$	$1+i$
i	$-i$	-1	1	$-1+i$	$1+i$	$-1-i$	$1-i$
$-i$	i	1	-1	$1-i$	$-1-i$	$1+i$	$-1+i$
$1+i$	$-1-i$	$1-i$	$-1+i$	-1	$-i$	i	1
$1-i$	$-1+i$	$-1-i$	$1+i$	i	-1	1	$-i$
$-1+i$	$1-i$	$1+i$	$-1-i$	$-i$	1	-1	i
$-1-i$	$1+i$	$-1+i$	$1-i$	1	i	$-i$	-1

Es pot comprovar —fent, per exemple, un programa senzill— que A és un *quasi-cos* associatiu. En canvi, la propietat distributiva per la dreta no es compleix i A no és un anell:

$$(1+i)\,i = 1 - i \neq i + i^2.$$

Com hem dit abans, l'operació $\langle x, m, b\rangle = xm + b$ dota A d'una estructura d'anell ternari i permet definir un pla projectiu $P_2(A)$, que tindrà ordre 9. El fet que A no sigui un anell de divisió ens indueix a pensar que aquest pla projectiu no serà desarguesià. La manera més elemental de veure-ho seria mostrar una configuració de X que contradigui Desargues. Considerem (en el pla afí A^2) aquests dos triangles

$$A = (0, i), \quad B = (1, i), \quad C = (i, 1)$$
$$A' = (-1 - i, -1 - i), \quad B' = (-i, -1 - i), \quad C' = (1 - i, i).$$

La recta AA' és $Y = xi + i$, la recta BB' és $Y = -Xi - i$ i la recta CC' és $Y = X(-1 + i) - 1 + i$. Per tant, els dos triangles estan en perspectiva respecte del punt $(-1, 0)$. D'altra banda, les rectes AB i $A'B'$ són, respectivament, $Y = i$ i $Y = -1 - i$, que són paral·leles, les rectes AC i $A'C'$ són, respectivament, $Y = X(-1 - i) + i$ i $Y = X(-1 - i) - i$, que també són paral·leles. Per tant, si es complís Desargues, els dos triangles estarien en perspectiva respecte de la recta de l'infinit i, per tant, les rectes BC i $B'C'$ també haurien de ser paral·leles. Però aquestes rectes són, respectivament, $Y = -X + 1 + i$ i $Y = Xi + 1 - i$, que no són paral·leles. En conclusió, el pla projectiu de Veblen-Wedderburn no és desarguesià.

Es coneix que hi ha exactament (llevat d'isomorfisme) quatre plans projectius finits d'ordre 9: el pla desarguesià $P_2(\mathbb{F}_9)$, el pla de Veblen-Wedderburn que acabem de construir, el seu dual, i un quart pla anomenat *pla de Hughes*, construït també per Veblen i Wedderburn i redescobert per Hughes cinquanta anys més tard. Que només n'hi ha quatre es va demostrar fent una cerca exhaustiva per ordinador.

El pla de Cayley

El pla projectiu no desarguesià més significatiu és el pla $P_2(\mathbb{O})$ construït sobre els *octonions* $\mathbb{O}$. En aquest apartat explicarem breument com es construeix aquest pla —però quedarem ben lluny de dilucidar amb profunditat les seves (transcendentals) propietats.[6]

[6] És impossible explicar en una nota a peu de pàgina la immensa importància d'aquests dos objectes: els octonions i el pla projectiu que defineixen (el «pla de Cayley»). Tampoc no en tindríem prou amb tot un capítol d'aquest llibre. Si ho haguéssim de fer amb una única frase, potser diríem que *«el pla de Cayley és el responsable últim de les cinc àlgebres de Lie excepcionals»* però justificar aquesta frase també ens duria molt lluny.

Pensem que el pla de Cayley és un pla projectiu «continu» (en llenguatge més tècnic: una varietat riemanniana), com ho són el pla real o el pla complex i que la geometria que s'hi pot fer pot ser tan rica com la que es fa sobre els reals (que és la geometria d'Euclides, directament relacionada amb el grup ortogonal), la que es fa sobre els complexos (que és la geometria complexa, relacionada amb l'anàlisi complexa, la geometria algebraica i el grup unitari) o la que es fa sobre els quaternions (que és la geometria *simplèctica* que apareix, per exemple, a la mecànica hamiltoniana). Aquestes tres grans geometries –la importància de les quals no requereix demostració— «només» guanyen la geometria dels octonions en el fet que són vàlides en qualsevol dimensió, mentre que sobre els octonions, com que falla la propietat de Desargues, només podem fer geometria plana (...i no oblidem

Els octonions —també coneguts com a *«nombres de Cayley»*— van ser descoberts independentment per John T. Graves (1843) i Arthur Cayley (1845) i formen el quart terme d'una successió que comença

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \cdots$$

i que continua indefinidament. Els dos primers termes de la successió són cossos ben coneguts i el tercer és un anell de divisió —els quaternions de Hamilton— del qual hem parlat molt breument en aquest curs. Estudiem ara què tenen en comú els termes de la successió i com el procés que passa d'un terme al següent pot repetir-se indefinidament.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, etc. són espais vectorials reals i cadascun té dimensió doble de l'anterior. En cada cas, tenim un multiplicació que és $\mathbb{R}$-bilineal i tenim una «conjugació» $x \mapsto \overline{x}$ que també és $\mathbb{R}$-lineal i és compatible amb la multiplicació en el sentit que $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$. Finalment, el pas d'un terme al següent s'aconsegueix afegint un nou element de quadrat -1. Per exemple, per passar de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ introduïm i amb $i^2 = -1$ i per passar de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ introduïm j amb $j^2 = -1$. Ja veiem que aquest procés sembla que es pugui iterar indefinidament: es coneix com el *«procés de Cayley-Dickson»*. Expliquem-ho amb més detall:

- Comencem amb una «àlgebra» A, que ara voldrà dir un $\mathbb{R}$-espai vectorial euclidià de dimensió finita amb una «multiplicació» $(x, y) \mapsto xy$ que és $\mathbb{R}$-bilineal. Aquesta bilinealitat ens diu que es compleixen les propietats distributives (per la dreta i per l'esquerra) i també es compleix

$$x(\lambda y) = \lambda(xy), \qquad (\lambda x)y = \lambda(xy), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in A.$$

la geometria de dimensió 1!). Això explica que a la classificació de les àlgebres de Lie simples (Killing, 1887) hi apareguin tres famílies infinites —corresponents a les geometries ortogonal, unitària i simplèctica— i cinc àlgebres «excepcionals» que Freudenthal, el 1951, va intuir que havien de procedir de la geometria del pla de Cayley.

Si, en lloc d'una nota a peu de pàgina o d'un capítol sencer, disposéssim de seixanta pàgines per explicar la importància d'aquests objectes que estem estudiant ara, la millor cosa que podríem fer seria reproduir les seixanta pàgines del magnífic article *«The Octonions»* de John C. Baez (Bull. Amer. Math. Soc. 2001). En aquest article es parla de la relació dels octonions i el seu pla projectiu amb: àlgebres de Jordan, periodicitat de Bott, grups i àlgebres de Lie, àlgebres de Clifford, espinors, trialitat, model estàndard de la física de partícules, invariant de Hopf, geometria de Lorentz, espai-temps de Minkowski, relativitat especial, el «quadrat màgic» de Freudenthal, supergravetat, teoria de cordes,...

Però encara podríem prendre un punt de vista més «conceptual» que ens duria a entendre el pla de Cayley com una «manifestació» d'un esquema molt profund que potser apareix per primera vegada al llibre 13 d'Euclides, quan es classifiquen els cinc sòlids platònics. El 1976, V. I. Arnold va incloure a la llista dels «grans problemes de la matemàtica actual» el *«problema A-D-E»* que demana trobar la raó última de l'aparició, a moltes àrees de les matemàtiques, d'una classificació de tipus A-D-E com la de les àlgebres de Lie simples. Per a més detalls sobre això, vegeu l'article *«The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams»* (Hazewinkel *et. al.*, Nieuw Arch. Wisk. 1977).

Aquesta multiplicació tindrà un element neutre (bilateral, únic) $1 \in A$ que ens permet incloure $\mathbb{R} \subset A$ identificant $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda 1 \in A$, de manera que l'expressió λx no és ambigua perquè el producte del vector $x \in A$ per l'escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ coincideix amb el producte λx de A. Observem que no postulem la propietat associativa de la multiplicació i, per tant, A pot no ser un anell. D'altra banda, els elements de $\mathbb{R}$ commuten amb tots els elements de A i també «associen» amb tots els elements de A, en el sentit que es compleix la propietat associativa $x(yz) = (xy)z$ sempre que algun dels tres elements $x, y, z \in A$ sigui real.

- A més, A tindrà una «conjugació» $x \mapsto \overline{x}$ amb aquestes propietats:
  - És $\mathbb{R}$-lineal: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ i $\overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}$, per tot $x \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ per tot $x, y \in A$. En particular, $\overline{1} = 1$.
  - És una involució: $\overline{\overline{x}} = x$.
  - $x + \overline{x} \in \mathbb{R}$ per tot $x \in A$.
  - Per tot $x \in A$, $x\overline{x} = ||x||^2$, on $||x||$ indica la norma euclidiana a A.
- En aquestes condicions podem definir $B := A \oplus A$ (suma ortogonal) que, d'entrada, és un $\mathbb{R}$-espai vectorial euclidià de dimensió doble de la dimensió de A. Definim una multiplicació a B a través d'aquesta fórmula

$$(a_1, a_2) \cdot (a_3, a_4) := (a_1 a_3 - a_4 \overline{a}_2, \overline{a}_1 a_4 + a_3 a_2).$$

En particular, si definim $v := (0, 1) \in B$, els elements de B es poden escriure en la forma $a_1 + v a_2$, amb $a_1, a_2 \in A$ i la multiplicació de B ve caracteritzada per aquestes fórmules

$$v^2 = -1, \quad a_1(v a_2) = v(\overline{a}_1 a_2),$$

$$(v a_1)(v a_2) = -(a_2 \overline{a}_1), \quad (v a_1) a_2 = v(a_2 a_1).$$

- La multiplicació de B té element neutre $1 := (1, 0)$ i tenim una inclusió $A \subset B$ donada per $a \mapsto (a, 0)$, que respecta la multiplicació: A és una subàlgebra de B.
- Podem estendre la conjugació de A a una conjugació de B per

$$\overline{a_1 + v a_2} := \overline{a}_1 - v a_2.$$

- Finalment, podem comprovar que la nova àlgebra B torna a estar en les mateixes condicions de A i li podem tornar a aplicar el mateix procediment. En conclusió, si comencem amb l'àlgebra $\mathbb{R}$ amb conjugació trivial ($\overline{x} = x$) i apliquem repetidament el procés de Cayley-Dickson que acabem de descriure obtindrem una successió d'àlgebres

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{A}_3 \subset \mathbb{A}_4 \subset \cdots$$

- Ara podem comprovar fàcilment que $\mathbb{A}_1$ és isomorfa al **cos** complex $\mathbb{C}$ i que $\mathbb{A}_2$ és isomorfa a l'**anell de divisió** dels quaternions $\mathbb{H}$. En particular, podem *definir* els quaternions com $\mathbb{A}_2$. Finalment, podem definir els **octonions** $\mathbb{O}$ com l'àlgebra $\mathbb{A}_3$.

- Tanmateix, podríem dir que *«a cada bugada perdem un llençol»* perquè les propietats de les successives àlgebres que anem obtenint són cada vegada més febles.[7] Comencem amb un cos ordenat amb conjugació trivial ($\mathbb{R}$). En el pas següent tenim $\mathbb{C}$, que encara és un cos, però ja no és ordenat i té conjugació no trivial. En el pas següent, $\mathbb{H}$, hem perdut la propietat commutativa de la multiplicació: $ij \neq ji$. En el pas següent, $\mathbb{O}$, perdem també la propietat associativa de la multiplicació i en el pas següent apareixen divisors de zero.

En particular,

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus v\mathbb{H}$$

i un octonió u s'escriu com a vuit nombres reals —d'aquí els ve el nom— o com a quatre nombres complexos, o com a dos quaternions

$$u = q_1 + vq_2.$$

Els octonions es multipliquen segons aquestes regles

$$qv = v\overline{q}, \quad v^2 = -1, \quad p(vq) = v(\overline{p}q), \quad (vp)q = v(qp), \quad (vp)(vq) = -q\overline{p}$$

on $p, q \in \mathbb{H}$. Veim, doncs, que la multiplicació de $\mathbb{O}$ no és associativa i no podem definir «espais vectorials» ni «espais projectius» sobre $\mathbb{O}$, ni podem fer «geometria lineal» sobre $\mathbb{O}$, si més no geometria lineal de dimensió > 2.

L'observació crucial és que $\mathbb{O}$ té prou estructura per poder definir un pla projectiu, en la línia dels apartats anteriors. Aquest pla $P_2(\mathbb{O})$ és el **pla de Cayley**. De fet, $\mathbb{O}$ és un quasi-cos. Per arribar a veure això, estudiem algunes propietats específiques de $\mathbb{O}$.

- *Si $x, y \in \mathbb{O}$, es compleix $(x\overline{x})y = x(\overline{x}y)$.*

  Posem $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ on a, b, c, d són quaternions. Recordem que els quaternions sí que són associatius i recordem també que, com que $q\overline{q} = \overline{q}q \in \mathbb{R}$, es compleix que $q\overline{q}$ commuta amb qualsevol quaternió. Aleshores, un càlcul immediat ens dóna la igualtat que volem.

[7] John C. Baez ho explica de manera humorística a l'article que hem citat a la nota anterior: *«$\mathbb{R}$ és el puntal de la família, el cos ordenat i complet en què tots confiem; $\mathbb{C}$ és el germà més jove, una mica fatxenda, però encara ben respectable perquè, si bé no és ordenat, és algebraicament complet; $\mathbb{H}$, com que no és commutatiu, és el cosí excèntric al que mai no es convida a les reunions familiars importants; però $\mathbb{O}$, que ni tan sols és associatiu, és el vell oncle guillat que ningú permet que surti del seu cau a les golfes.»*

- *$\mathbb{O}$ compleix la propietat alternativa.*

  Aquesta propietat és una forma feble de la propietat associativa que ens diu que, per tot $x, y \in \mathbb{O}$ es compleix

  $$x^2 y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x, \quad (xy)x = x(yx).$$

  Per demostrar la primera identitat, posem $\lambda := x + \overline{x} \in \mathbb{R}$. Aleshores,

  $$0 = (x\overline{x})y - x(\overline{x}y) = (x\lambda)y - x^2 y - x(\lambda y) + x(xy) = x(xy) - x^2 y.$$

  La segona identitat es demostra igual. Per demostrar la tercera, desenvolupem la identitat

  $$(x + y)\big((x + y)x\big) = \big((x + y)(x + y)\big)x.$$

- *Qualsevol subàlgebra de $\mathbb{O}$ generada*[8] *per dos elements és associativa.*

  Això és conseqüència immediata de la propietat anterior. En particular, a $\mathbb{O}$ estan ben definides les potències x^r (no calen parèntesis).

- $||xy|| = ||x||\,||y||$ *per tot* $x, y \in \mathbb{O}$.

  Aquesta propietat essencial —direm que $\mathbb{O}$ és una *àlgebra normada*— es compleix (evidentment) a les subàlgebres de $\mathbb{O}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$) i, com veurem, deixa de complir-se a les àlgebres següents que anem obtenint per procés de Cayley-Dickson. Es tracta de comprovar que

  $$(xy)(\overline{y}\,\overline{x}) = (x\overline{x})(y\overline{y}).$$

  Observem aquestes igualtats i recordem que $a + \overline{a} \in \mathbb{R}$:

  $$a = \frac{a + \overline{a}}{2} + \frac{a - \overline{a}}{2}; \qquad \overline{a} = \frac{a + \overline{a}}{2} - \frac{a - \overline{a}}{2}.$$

  Això ens diu que els elements $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{O}$ pertanyen a la subàlgebra generada per $(x - \overline{x})/2, (y - \overline{y})/2$ que, pel que hem vist abans, és associativa.

- *$\mathbb{O}$ no té divisors de zero.*

  Això és evident per la propietat anterior. En canvi, *més enllà* de $\mathbb{O}$ en la successió de les àlgebres de Cayley-Dickson, sempre hi ha divisors de zero i ja no és possible utilitzar aquelles àlgebres per construir plans projectius. Per veure això, observem que a $\mathbb{A}_4$ es compleix

  $$(i, j)\,(v, v(ij)) = 0.$$

[8] Recordem que estem considerant $\mathbb{R}$-àlgebres i, per tant, la *subàlgebra generada per* dos elements, és també una $\mathbb{R}$-àlgebra i, en particular, conté els nombres reals.

- $\mathbb{O}$ *és quasi-cos.*

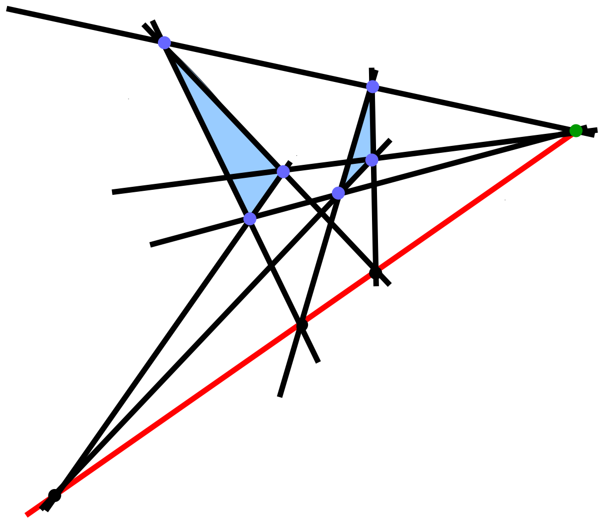
  Si repassem les condicions que ha de complir un quasi-cos, veiem que amb tot el que ja sabem de $\mathbb{O}$ n'hi ha prou amb demostrar que si $a, b \neq 0$, existeixen x, y tals que $ax = b$ i $ya = b$. En efecte, n'hi ha prou amb prendre

  $$x := \frac{1}{||a||^2}\,\overline{a}b, \quad y := \frac{1}{||a||^2}\,b\overline{a}$$

  i recordar que per tot octonió q es compleix que $q, \overline{q}$ pertanyen a l'àlgebra generada per $(q - \overline{q})/2$. La unicitat de x, y és evident per la propietat distributiva de $\mathbb{O}$.

- $\mathbb{O}$ *compleix la identitat de Moufang:* $(xy)(zx) = x(yz)x$.

  Observem que l'expressió de la dreta és unívoca, per la propietat alternativa. Aquesta versió feble de la propietat associativa —que no demostrarem aquí— té una significació geomètrica: gràcies a aquesta propietat, el pla de Cayley $P_2(\mathbb{O})$ compleix el que es coneix com la *configuració restringida de Desargues* que és la configuració de Desargues afegint la condició que *l'eix de perspectiva dels dos triangles passi pel centre de perspectiva.*



Per acabar, demostrem que $P_2(\mathbb{O})$ no compleix Desargues, posant un exemple concret de dos triangles en perspectiva respecte d'un punt que no tinguin un eix de perspectiva. Considerem aquests dos triangles del pla afí:

$$\begin{aligned} A &= (0,0), \quad B = (v,0), \quad C = (1,v) \\ A' &= (0,j), \quad B' = (v,j), \quad C' = (1, i+j+v). \end{aligned}$$

La recta AA' és $X = 0$, la recta BB' és $X = v$ i la recta CC' és $X = 1$. Per tant, els dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt de l'infinit. D'altra banda, les rectes AB i $A'B'$ són, respectivament, $Y = 0$ i $Y = j$, que són paral·leles. Les rectes AC i $A'C'$ són, respectivament, $Y = Xv$ i $Y = X(i+v)+j$, que es tallen en el punt $(-k, vk))$ on, com és habitual, $k := ij$. La recta BC és $2Y = X(v-1)+v+1$ i la recta $B'C'$ és $2Y = Xu + 2j - vu$ amb $u = (1+v)(i+v)$. Per tant, si els dos triangles estiguessin en perspectiva respecte d'una recta, aquesta recta hauria de ser la recta $Y = vk$, que talla la recta BC en el punt $P = (-k + v(1-k), vk)$. Però aquest punt P no pertany a la recta $B'C'$.

C.3. El teorema de coordinació

El **teorema de coordinació** ens diu que el concepte d'espai projectiu entès com un sistema de punts i rectes que compleixen tres axiomes molt simples —als que cal afegir, si la dimensió és 2, l'axioma de Pappos que afirma que la configuració de Pappos és un teorema— és equivalent al concepte d'espai projectiu d'un espai vectorial $\mathcal{P}(V)$ sobre un cos k. D'una manera més general, si en lloc de la configuració de Pappos posem com a axioma la configuració de Desargues, també tenim equivalència entre el concepte axiomàtic d'espai projectiu i els objectes $\mathcal{P}(V)$ on ara k és un *anell de divisió*.

És molt interessant entendre quines línies de treball cal seguir per arribar a demostrar un teorema com aquest. Per tant, abans d'entrar en la demostració, pensarem quina pot ser l'estratègia natural per atacar el problema.

- Comencem amb un objecte geomètric amb molt poca estructura: un espai projectiu X. Només tenim punts i rectes, res més. Si volem arribar a demostrar que $X \cong \mathcal{P}(V)$ ens cal construir, a partir de X, dos objectes algebraics prou sofisticats: un cos k i un k-espai vectorial V. Aquest ha de ser el primer pas. Després, ja veurem com podem demostrar que $X \cong \mathcal{P}(V)$.

- Ara intervé una idea crucial, de caràcter general, que és una de les idees més importants i fecundes de les matemàtiques:

  > *Si X és una estructura matemàtica qualsevol, el* **grup** *dels seus automorfismes és un objecte algebraic que, sovint, conté una informació molt valuosa sobre X.*

  És a dir, si volem estudiar uns objectes que, aparentment, tenen poca estructura, sempre podem considerar el grup dels seus automorfismes i els seus subgrups i ja tenim tota una quantitat d'informació algebraica molt estructurada que ens pot informar sobre les propietats dels objectes inicials.

  En el nostre cas, si tenim un espai projectiu X, podem considerar les seves **col·lineacions**, que formen un grup, i podem considerar els seus subgrups. Per exemple, el subgrup de les afinitats, el subgrup de les translacions, etc.

- Si tenim X, d'on podem treure un espai vectorial V? Col·loquem-nos en una situació **afí** —que ja sabem que és equivalent a la situació projectiva— i preguntem-nos com podem identificar en un espai afí A l'espai vectorial associat V. La resposta s'obté aplicant la idea expressada al punt anterior: V s'identifica al grup de les **translacions** de A (incloent la identitat).

- Ja tenim l'espai vectorial V, però ara ens cal trobar el **cos d'escalars** k. Una pregunta ben curiosa, oi? Tenim un espai vectorial i hem de trobar el seu cos d'escalars. La manera de fer-ho és tornar a utilitzar la idea fonamental que hem discutit abans. Considerem els automorfismes de V. Un escalar serà un automorfisme de V que no canviï la direcció de les translacions. I què pot voler dir que dues translacions tenen la mateixa direcció? Doncs vol dir que tenen les mateixes rectes invariants, que és un concepte purament geomètric.

- D'aquesta manera ja tenim un esquema clar de com podem atacar la demostració del teorema de coordinació.

  - Dins del grup de les col·lineacions de X identifiquem el subgrup de les translacions V. Demostrem que és un grup abelià.
  - Definim els escalars com els automorfismes de V que conserven la direcció. Sigui k el conjunt dels escalars. Demostrem que k és un cos (o, en el cas més general, un anell de divisió) i que V és un k-espai vectorial (o un k-mòdul lliure) de la mateixa dimensió que X.
  - Si fem tot això amb l'espai projectiu $\mathcal{P}(E)$ i amb un hiperplà de l'infinit $\mathcal{P}(H)$ es compleix que $V = H$. Això ens permet creure que potser serem capaços de demostrar que $X \cong \mathcal{P}(V \oplus k)$.
  - Finalment, ja sabem que $\mathcal{P}(V)$ compleix Pappos si i només si V és un espai vectorials sobre un cos.

Un cop assimilades aquestes idees, ja podem procedir a la demostració formal del teorema de coordinació que enunciarem com ho fem a la pàgina 106:

> *[**Teorema de coordinació**] Sigui X un espai projectiu axiomàtic de dimensió finita $n > 1$ on es verifiqui el teorema de Pappos. Existeix un cos k i un isomorfisme $X \cong P_n(k)$. Si no es verifica el teorema de Pappos però sí que es verifica el teorema de Desargues, també tenim $X \cong P_n(k)$ per algun anell de divisió k.*

Dilatacions i translacions

Sigui X un espai projectiu axiomàtic de dimensió finita $n > 1$ i escollim un hiperplà H de X que anomenarem *hiperplà de l'infinit*. Les col·lineacions de X formen un grup $\mathcal{C}$ amb l'operació de composició. Recordem que una col·lineació és una aplicació bijectiva $f : X \to X$ que compleix que $A, B, C \in X$ estan alineats si i només si $f(A), f(B), f(C) \in X$ estan alineats. Considerem aquests dos subgrups de $\mathcal{C}$ (que, en principi, depenen de l'elecció de H):

- Una *dilatació* és una col·lineació que deixa fixos (un a un) tots els punts de l'infinit. Les dilatacions formen un subgrup $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$.
- Una *translació* és una dilatació que no té cap punt fix fora de l'infinit. Si hi afegim també la identitat, tenim un subconjunt $V \subseteq \mathcal{D}$ que demostrarem que és un subgrup.

Demostrem ara algunes primeres propietats de les dilatacions i les translacions.

- *Si una dilatació té dos punts fixos fora de l'infinit, és la identitat.*

  Això és evident perquè si x és un punt de X, podem unir x amb cada un dels dos punts fixos fora de l'infinit. Obtenim dues rectes, cadascuna de les quals conté dos punts fixos. Per tant, són rectes invariants i el punt x on es tallen serà un punt fix.

- *Si τ és una translació, les rectes $x\tau(x)$, $x \in X - H$, són concurrents en un punt de l'infinit, anomenat la* direcció *de τ.*

  Sigui $z = x\tau(x) \cap H$ i $y \in X - H$. La recta xy es transformarà en la recta $\tau(x)\tau(y)$ i això implica que aquestes dues rectes es tallen en un punt de l'infinit. Per l'axioma projectiu, les rectes $x\tau(x)$ i $y\tau(y)$ es tallaran. El punt $x\tau(x) \cap y\tau(y)$ és un punt fix de τ. Per tant, és a l'infinit i ha de coincidir amb el punt z.

- *Una translació ve determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit.*

  Si coneixem $\tau(x)$ per a un punt $x \in X - H$, també coneixem la direcció $z \in H$ de τ. Aleshores, $\tau(y)$ es pot calcular de la manera següent. Si $u = xy \cap H$, aleshores $\tau(y) = u\tau(x) \cap yz$.

- *V és un subgrup normal de $\mathcal{D}$.*

  Per demostrar que V és un subgrup de $\mathcal{D}$ només cal veure que si τ_1, τ_2 són translacions aleshores $\tau_1\tau_2$ és una translació o és la identitat. Si $\tau_1\tau_2$ tingués un punt fix $x \notin H$, tindríem $\tau_1\tau_2(x) = x$ i $\tau_2(x) = \tau_1^{-1}(x)$. Si apliquem la propietat anterior a les translacions τ_2 i τ_1^{-1} obtenim $\tau_2 = \tau_1^{-1}$ i$\tau_1\tau_2 = 1$

  Per veure que V és normal a $\mathcal{D}$ cal veure que si $\sigma \in \mathcal{D}$ i $\tau \in V$, aleshores $\sigma\tau\sigma^{-1} \in V$. Suposem que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tingués un punt fix x fora de l'infinit. Aleshores, $\sigma^{-1}(x)$ seria un punt fix de τ fora de l'infinit. Això només pot passar si $\tau = 1$ i, aleshores $\sigma\tau\sigma^{-1} = 1 \in V$.

- *Si hi ha translacions de direccions diferents, aleshores V és un grup abelià.*

  Suposem que τ_1 i τ_2 tenen direccions diferents z_1, z_2. Aleshores,

  $$\tau_1\tau_2(x) = \tau_1(x)z_2 \cap \tau_2(x)z_1 = \tau_2\tau_1(x).$$

  Si τ_1 i τ_2 tenen la mateixa direcció, escollim una translació τ que tingui una direcció diferent. Aleshores, també $\tau_2\tau$ té direcció diferent de la de τ_1 i τ_2

(perquè $\tau = \tau_2^{-1}(\tau_2\tau)$). Per tant, com que hem vist que les translacions de direccions diferents commuten, tenim

$$\tau_1(\tau_2\tau) = (\tau_2\tau)\tau_1 = \tau_2(\tau\tau_1) = \tau_2\tau_1\tau,$$

d'on $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

Si $\sigma \neq 1$ és una dilatació, definim el seu *centre* de la manera següent. Si σ és una translació, el seu centre és la seva direcció. Si σ no és una translació, el seu centre és l'únic punt fix fora de l'infinit. Observem que si Z_σ és el centre de σ, aleshores per tot $x \notin H$ es compleix que $\sigma(x)$ pertany a la recta que passar per x i Z_σ.

Observem que encara no hem utilitzat la configuració de Desargues i, per tant, tot això que hem dit fins ara també és cert en els plans no desarguesians com els que hem estudiat al capítol anterior. Però perquè el teorema que volem demostrar sigui cert cal que es compleixi Desargues, i en un moment o altre de la demostració ens caldrà utilitzar la configuració de Desargues. En aquell moment entendrem quin és exactament el paper que juga Desargues en tot el programa que estem desenvolupant per demostrar el teorema de coordinació: podem dir, de manera informal, que el teorema de Desargues és equivalent a l'existència de *prou dilatacions* a l'espai X. Més exactament:

> *Direm que X té* ***prou dilatacions*** *si per tota elecció de H es compleix que donats tres punts (diferents) alineats a, x, y tals que $x, y \notin H$, existeix una dilatació σ de centre a tal que $\sigma(x) = y$.*
>
> *A X es compleix la configuració de Desargues si i només si X té prou dilatacions.*

Demostrem-ho. Suposem que X té prou dilatacions, en el sentit de l'enunciat del teorema, i siguin ABC, $A'B'C'$ dos triangles amb un centre de perspectiva O. Siguin P, Q, R els punts d'intersecció dels costats homòlegs,

$$P = BC \cap B'C', \quad Q = AC \cap A'C', \quad R = AB \cap A'B'.$$

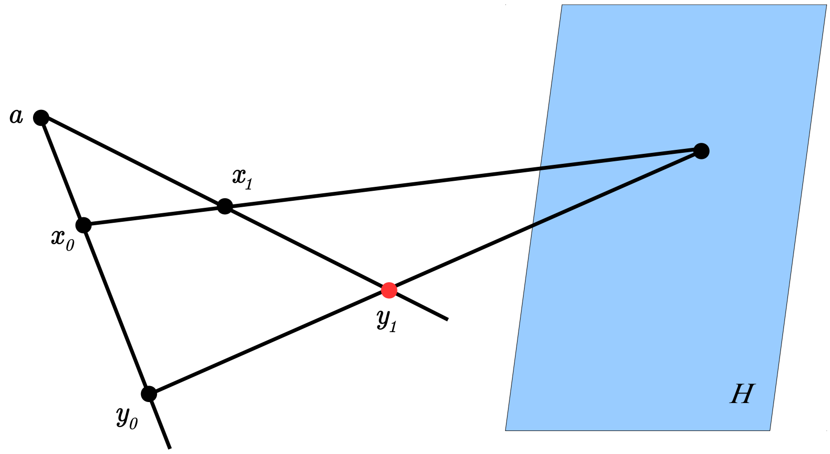
Volem veure que P, Q, R estan alineats. Com que ja sabem que això és automàticament cert en dimensió > 2, suposem que X és un pla projectiu i escollim la recta PQ com a recta de l'infinit. Sigui σ una dilatació de centre O tal que $\sigma(A) = A'$, que existeix per hipòtesi. Com que P i Q estan a l'infinit, tindrem $\sigma(P) = P$ i $\sigma(Q) = Q$. Aleshores, és clar que s'ha de complir $\sigma(C) = C'$ i $\sigma(B) = B'$. Per tant, $\sigma(R) = R$ i R ha de ser a l'infinit, és a dir, R està alineat amb P i Q.

Recíprocament, suposem que Desargues és cert i que tenim tres punts a, x_0, y_0 com a l'enunciat. Cal definir una dilatació σ de centre a amb $\sigma(x_0) = y_0$. Comencem posant

$$\sigma|_H = 1, \quad \sigma(a) = a, \quad \sigma(x_0) = y_0.$$

Escollim ara $x_1 \notin H$ fora de la recta $x_0 y_0$ i, aplicant el mètode que hem usat quan hem vist que una translació ve determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit, trobem un punt y_1 i definim $\sigma(x_1) = y_1$. Més concretament,

$$y_1 := \big[[x_1 x_0 \cap H] + y_0\big] \cap a x_1.$$



Això que hem fet amb x_1 per definir $\sigma(x_1) = y_1$ ho podem fer amb qualsevol punt $x \neq a$ fora de l'infinit que no estigui alineat amb x_0, y_0. Si x sí que està alineat amb x_0, y_0, per definir $\sigma(x)$ apliquem el mateix mètode, però respecte de x_1, y_1. En conclusió, sempre podem definir $\sigma(x)$, però per a la majoria de punts tenim dues maneres de fer-ho: a partir de x_0, y_0 o a partir de x_1, y_1 i aquestes dues maneres podrien donar resultats diferents. El punt interessant és quan intentem demostrar que les dues maneres donen el mateix resultat ens apareix una configuració de Desargues i, en conclusió, si es compleix Desargues tenim ben definida una bijecció $\sigma : X \to X$ que deixa fix a i els punts de l'infinit i envia x_0 a y_0.

Cal veure ara que la transformació σ que hem pogut definir gràcies a la configuració de Desargues és una col·lineació, és a dir que x, x', z estan alineats si i només si ho estan $\sigma(x), \sigma(x'), \sigma(z)$. Observem que no és restrictiu suposar que $z \in H$. Aleshores, si dibuixem els nou punts $x_0, y_0, a,\ x, x', z,\ \sigma(x), \sigma(x'), \sigma(z) = z$ veiem que, el el pitjor dels casos,[1] tenim una configuració de Desargues i arribem a la conclusió que σ és, efectivament, una col·lineació.

Com a corol·lari d'aquesta propietat crucial obtenim que, si es compleix Desargues, V és sempre un grup abelià. D'altra banda, de tot el que hem dit es dedueix que si $x, y \notin H$, existeix una *única* translació $\tau \in V$ tal que $\tau(x) = y$. És natural denotar aquesta translació per $t_{x,y}$.

[1] Si la configuració que obtenim no és plana, un raonament senzill com el de la demostració de Desargues quan els triangles no són coplanars ens resol el problema, però quan la configuració és plana cal específicament el teorema de Desargues.

Escalars

Tenim, doncs, un grup abelià V. Recordem que els elements de V són unes certes col·lineacions $\tau : X \to X$ anomenades translacions i que l'operació de V és la composició de col·lineacions. Ens cal anar en compte amb les notacions perquè, com que hem vist que V és un grup abelià, la seva operació l'anomenarem «suma», encara que sigui una «composició» d'aplicacions. Per complicar-ho encara una mica més, ara ens interessa considerar l'*anell d'endomorfismes* $\mathcal{R}$ del grup abelià V. Recordem que les operacions d'aquest anell són

$$(\phi + \psi)(\tau) = \phi(\tau) \circ \psi(\tau); \qquad (\phi \cdot \psi)(\tau) = \phi(\psi(\tau)).$$

L'element $0 \in \mathcal{R}$ és l'endomorfisme $\tau \mapsto 1$ per tota translació τ i l'element $1 \in \mathcal{R}$ és l'endomorfisme $\tau \mapsto \tau$ per tota translació τ. Evidentment, el grup abelià V adquireix una estructura natural de $\mathcal{R}$-mòdul donada per $\phi \cdot \tau := \phi(\tau)$. Com que V és un subgrup normal de $\mathcal{D}$ (el grup de totes les dilatacions), cada dilatació σ dóna, per conjugació, un element c_σ de l'anell $\mathcal{R}$:

$$c_\sigma(\tau) := \sigma\tau\sigma^{-1}.$$

Un **escalar** serà un element $\lambda \in \mathcal{R}$ que *conservi la direcció*, és a dir, tal que la direcció de $\lambda \cdot \tau$ sigui la mateixa que la de τ per tot $\tau \in V$, $\tau \neq 1$. Com a exemple d'escalar, un raonament geomètric senzill mostra que si σ és una dilatació, aleshores c_σ és un escalar. Com que els escalars seran el «cos base» de la geometria, denotarem per $k \subset \mathcal{R}$ el conjunt dels escalars. És immediat que k és un subanell de $\mathcal{R}$ i, per tant, V és un k-mòdul.

Demostrem ara algunes propietats dels escalars i de les translacions.

- *Dues translacions de la mateixa direcció «difereixen» en un escalar c_σ.*

  Siguin $\tau, \tau' \in V$ dues translacions de la mateixa direcció i x un punt fora de l'infinit. Demostrarem que existeix una dilatació σ tal que $c_\sigma\tau = \tau'$. Escollim una dilatació σ de centre x tal que $\sigma(\tau(x)) = \tau'(x)$ (ho podem fer perquè, com que estem suposant que es compleix Desargues, sabem que hi ha prou dilatacions). Aleshores, $(\sigma\tau\sigma^{-1})(x) = \tau'(x)$ i, donat que una translació queda determinada per la imatge d'un punt fora de l'infinit, tenim que $c_\sigma\tau = \tau'$.

- *k és un anell de divisió.*

  Aquest resultat és el punt clau en la coordinació de X. Recordem que un anell de divisió és un anell que compleix els axiomes de cos, excepte la commutativitat de la multiplicació. Com que k és un anell, l'única cosa que cal comprovar és que donat un escalar diferent de zero $\lambda \in k$, existeix un altre escalar $\mu \in k$ tal que $\lambda\mu = \mu\lambda = 1$. De fet, demostrarem més que això. Escollim un punt qualsevol x fora de l'infinit i sigui $\lambda \in k$ un escalar qualsevol diferent de zero. Demostrarem que existeix una dilatació σ de centre x tal que $\lambda = c_\sigma$. Com que és evident que els escalars del tipus c_σ tenen invers, el teorema estarà demostrat.

Sigui, doncs, $\lambda \neq 0$ un escalar. El fet que sigui $\lambda \neq 0$ voldrà dir que existirà una translació τ tal que $\lambda\tau \neq 1$. Prenem un punt x fora de l'infinit i siguin $y = \tau(x)$, $y' = (\lambda\tau)(x)$. Tenim que x, y, y' són tres punts alineats i podem trobar una dilatació σ de centre x que enviï y' a y. Definim $\mu = c_\sigma\lambda$, i haurem acabat la demostració si veiem que $\mu = 1$ perquè aleshores $\lambda = c_{\sigma^{-1}}$ i λ tindrà inversos pels dos costats.

Tenim $\tau = t_{x,y}$, $\lambda\tau = t_{x,y'}$ i

$$(\mu t_{x,y})(x) = (c_\sigma\lambda t_{x,y})(x) = \sigma(\lambda t_{x,y})\sigma^{-1}(x) = \sigma(\lambda t_{x,y})(x) = \sigma(y') = y$$

i, per tant, $\mu(t_{x,y}) = t_{x,y}$. A partir d'aquí demostrarem $\mu = 1$. Sigui z un punt qualsevol fora de l'infinit, no alineat amb x, y. Considerem

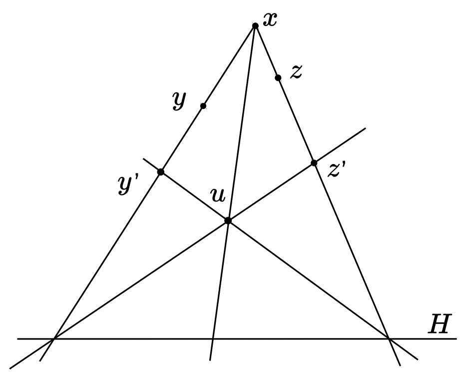
$$(\mu t_{x,z})(x) = (\mu t_{x,y} + \mu t_{y,z})(x) = (\mu t_{y,z})(\mu t_{x,y}(x)) = (\mu t_{y,z})(y)$$

i observem que el membre de d'esquerra pertany a la recta xz mentre que el membre de la dreta pertany a la recta yz. Deduïm que $(\mu t_{x,z})(x) = z$, és a dir, $\mu t_{x,z} = t_{x,z}$ per tot z no alineat amb xy.

Si ara z és arbitrari, podem escriure $t_{x,z} = t_{x,a} + t_{x,b}$ amb a i b no alineats amb x, y. Aleshores, $\mu t_{x,a} = t_{x,a}$, $\mu t_{x,b} = t_{x,b}$ i $\mu t_{x,z} = t_{x,z}$. Per tant, veiem que $\mu = 1$.

- *$V \cong k^n$ com a k-mòdul. En particular, si la multiplicació de k és commutativa, V és un k-espai vectorial de dimensió n.*

Fins ara, la dimensió de l'espai projectiu X no ha intervingut. Ara sí que ho fa. Recordem que havíem començat amb un espai projectiu axiomàtic X de dimensió $n > 1$. La demostració s'entendrà millor en el cas $n = 2$. Escollim, fora de l'infinit, tres punts no alineats x, y, z. Demostrarem que les translacions $t_{x,y}$, $t_{x,z}$ generen V. Considerem una translació $t_{x,u}$ i prenem els punts y', z' donats per la configuració del dibuix següent.



Aleshores, $t_{x,u} = t_{x,y'} + t_{x,z'}$. D'altra banda, com que $t_{x,y'}$ té la mateixa direcció que $t_{x,y}$, hauran de diferir en un escalar, i el mateix podrem dir de $t_{x,z'}$. Per tant, $t_{x,u} = \lambda t_{x,y} + \mu t_{x,z}$ per uns certs escalars $\lambda, \mu \in k$.

En el cas de dimensió n arbitrària, la idea de la demostració és la mateixa però els detalls són més complicats. En conclusió, si X té dimensió n, podem trobar translacions $t_{x,x_1}, \ldots, t_{x,x_n}$ que generin V, prenent els punts $x, x_1, \ldots, x_n$ fora de l'infinit, de manera que no estiguin en cap subvarietat de dimensió $n-1$. Per tenir una base de V cal encara demostrar que aquestes translacions són linealment independents. Es dedueix d'aquest criteri:

Siguin $\tau_1, \ldots, \tau_n \neq 1$ translacions i siguin $z_1, \ldots, z_n \in H$ les reves respectives direccions. Es compleix que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ són linealment dependents si i només si $z_1, \ldots, z_n$ estan en una mateixa subvarietat de deimensió $n-2$.

Novament, perquè la idea de la demostració es vegi més clara, considerarem $n = 3$. Escollim un punt $e \in X - H$. Si $\tau_1 = \lambda\tau_2 + \mu\tau_3$ per alguns escalars $\lambda, \mu \in k$, tindrem

$$\tau_1(e) = \lambda(\tau_2)(\mu\tau_3(e)).$$

El punt de l'esquerra pertany a la recta que uneix e amb z_1, mentre que el punt de la dreta pertany al pla que conté e, z_2 i z_3. Per tant, els punts z_1, z_2, z_3 estan alineats. Recíprocament, posem $\tau_1 = t_{e,x_1}$ i definim els punts x_2, x_3 de la següent manera:

$$x_2 = ez_2 \cap x_1z_3, \qquad x_3 = ez_3 \cap x_1z_2.$$

Aleshores,

$$\tau_1 = t_{e,x_1} = t_{e,x_2} + t_{e,x_3}$$

però és clar que existeixen escalars λ, μ tals que $t_{e,x_2} = \lambda\tau_2$ i $t_{e,x_3} = \mu\tau_3$.

Conclusió de la demostració

Hem començat amb un espai projectiu axiomàtic X de dimensió $n > 1$ i hem construït un anell de divisió k i un k-mòdul lliure V de dimensió n. Ara la intenció és acabar la demostració del teorema de coordinació veient que $X \cong \mathcal{P}(V \oplus k)$.

Escollim un punt $w_0 \in X - H$. Definirem una aplicació

$$f : \mathcal{P}(V \oplus k) \longrightarrow X$$

que serà una col·lineació. Ho fem en dues etapes:

- Definim primer $f : \mathcal{P}(V) \to H$ per $f(\langle\tau\rangle) = d(\tau)$ on $d(\tau)$ indica la direcció de τ, que és un punt de H. És clar que aquesta aplicació està ben definida i, pel criteri d'independència lineal que acabem de veure, és una col·lineació.

- Definim ara $f(x)$ per qualsevol $x \in \mathcal{P}(V \oplus k) - \mathcal{P}(V)$. Podem escriure $x = \langle(\tau, 1)\rangle$ amb $\tau \in V$ unívocament determinat per x. Aleshores, definim

$$f(x) := \tau(w_0).$$

Tenim ja definida l'aplicació $f : \mathcal{P}(V \oplus k) \to X$ i no és difícil veure que és efectivament bijectiva. Comprovem, per acabar, que és una col·lineació: x, y, z estan alineats si i només si $f(x), f(y), f(z)$ estan alineats. Observem que n'hi ha prou amb demostrar-ho si $z \in \mathcal{P}(V)$ i $x, y \notin \mathcal{P}(V)$. Posem

$$x = \langle(\tau, 1)\rangle, \quad y = \langle(\tau', 1)\rangle, \quad z = \langle(\tau'', 0)\rangle.$$

És immediat que aquests tres punts estan alineats si i només si existeix un escalar $\mu \neq 0$ tal que $\tau'' = \mu(\tau' - \tau)$. D'altra banda, $f(x) = \tau(w_0)$, $f(y) = \tau'(w_0)$, $f(z) = d(\tau'')$ i aquests tres punts estan alineats si i només si τ'' i $t_{f(x),f(y)}$ tenen la mateixa direcció. Però $t_{f(x),f(y)} = \tau' - \tau$ i, per tant $f(x), f(y), f(z)$ estan alineats si i només si τ'' i $\tau' - \tau$ difereixen en un escalar. Hem demostrat que f és una col·lineació, i això acaba la demostració del teorema.

C.4. El teorema de representació

El *teorema de coordinació* ens diu que si tenim una geometria projectiva axiomàtica X de dimensió $n > 1$, podem introduir coordenades en un anell de divisió k de manera que $X \cong P_n(k)$. És a dir, els punts de X vénen donats per les seves coordenades homogènies i les rectes per les seves equacions algebraiques. Aquell teorema justifica, doncs, la utilització de mètodes algebraics a la geometria. El teorema que volem demostrar ara —que, tradicionalment, es coneix com «teorema fonamental de la geometria projectiva»— va un pas més enllà i ens diu que les *col·lineacions* d'una geometria projectiva es poden representar per *matrius*. Enunciem amb precisió el teorema, tal com el vam introduir a la pàgina 108:

> *[**Teorema de representació**] Sigui $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ una col·lineació entre espais projectius de dimensió > 1. Aleshores, existeix un isomorfisme semi-lineal $\psi : E \to E'$ tal que $f = \mathcal{P}(\psi)$.*

Aquí suposarem que E i E' són espais vectorials sobre cossos K, K', respectivament. Res no canviaria a la demostració si suposéssim que K i K' són anells de divisió.

A la demostració d'aquest teorema s'hi arriba aprofundint una mica més en els mètodes que hem utilitzat per demostrar el teorema de coordinació: translacions i escalars.

Translacions i escalars a $\mathcal{P}(E)$

En aquest apartat la idea que volem seguir és aplicar tota la maquinària de la demostració del teorema de coordinació al cas $X = \mathcal{P}(E)$ i arribar a identificar el grup de les translacions i el cos d'escalars. Esperaríem que el grup de les translacions fos (isomorf a) un hiperplà de E i que el cos d'escalars fos (isomorf a) K.

Suposem, doncs, que E és un K-espai vectorial de dimensió $n + 1 > 2$ i definim $X := \mathcal{P}(E)$. Escollim un hiperplà $F \subset E$ i sigui $H = \mathcal{P}(F)$ l'hiperplà de X corresponent a F. Sigui V el grup abelià de les translacions de X respecte de H i sigui k el cos d'escalars associat, segons hem estudiat al capítol anterior. L'objectiu d'aquesta primera part de la demostració és veure que $F \cong V$ i $K \cong k$.

Com que F és un hiperplà de E, podem escriure $E = F \oplus K\overrightarrow{e}$ per un cert vector $\overrightarrow{e} \in E - F$, de manera que tot vector $\overrightarrow{v} \in E$ s'expressa de manera única com $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{e}$ per algun $\overrightarrow{u} \in F$ i algun $\lambda \in K$. Definim

$$\phi_{\overrightarrow{v}} : E \longrightarrow E$$

com l'única aplicació lineal que és la identitat sobre F i compleix que

$$\phi_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{v}.$$

Clarament, $\mathcal{P}(\phi_{\overrightarrow{v}})$ és una translació per tot $\overrightarrow{v} \neq 0$ i, per tant, l'assignació $\overrightarrow{v} \mapsto \mathcal{P}(\phi_{\overrightarrow{v}})$ dóna una aplicació ben definida

$$\Phi : F \longrightarrow V$$

que compleix aquestes propietats:

- Φ és homomorfisme de grups abelians. És a dir,

$$\Phi(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \Phi(\overrightarrow{v}) + \Phi(\overrightarrow{w})$$

  (on la suma del terme de la dreta indica l'operació del grup abelià V, que és la composició de translacions). Aquest fet és evident.

- Φ és injectiva. En efecte,

$$\Phi(\overrightarrow{v})(\langle \overrightarrow{e} \rangle) = \langle \phi_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{e}) \rangle = \langle \overrightarrow{e} + \overrightarrow{v} \rangle.$$

  Per tant, si $\Phi(\overrightarrow{v}) = \Phi(\overrightarrow{w})$, aleshores $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

- Φ és exhaustiva. En efecte, suposem que $\tau \in V$ és una translació de X respecte de H. Recordem que això vol dir que τ és una col·lineació de X que deixa fixos els punts de H i cap més. Aleshores, existiran $\overrightarrow{u} \in F$ i $\lambda \in K$ tals que

$$\tau(\langle \overrightarrow{e} \rangle) = \langle \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{e} \rangle.$$

  Si ara considerem la translació $\tau' := \Phi(\lambda^{-1}\overrightarrow{u}) \in V$, veiem que τ i τ' coincideixen en el punt $\langle \overrightarrow{e} \rangle \in X - H$. Per tant, $\tau = \tau'$.

- La *direcció* de $\Phi(\overrightarrow{v})$ és $\langle \overrightarrow{v} \rangle \in H$. Això és evident perquè els punts $\langle \overrightarrow{e} \rangle$, $\Phi(\overrightarrow{v})(\langle \overrightarrow{e} \rangle) = \langle \overrightarrow{e} + \overrightarrow{v} \rangle$ i $\langle \overrightarrow{v} \rangle$ estan alineats.

- $\Phi : F \to V$ és un isomorfisme semi-lineal. Observem que F és un K-espai vectorial i V és un k-espai vectorial. D'altra banda, si $\lambda \in K$, podem considerar l'endomorfisme de V donat per

$$\mathcal{P}(\phi_{\overrightarrow{v}}) \mapsto \mathcal{P}(\phi_{\lambda\overrightarrow{v}})$$

  que, clarament, conserva la direcció i és, per tant, un element de k. Això dóna lloc a un homomorfisme de cossos

$$\alpha : K \longrightarrow k$$

i, trivialment, $\Phi : F \to V$ és una aplicació semi-lineal amb homomorfisme de cossos associat α. Com que Φ és bijectiva, és molt senzill deduir que α és exhaustiva i Φ és un isomorfisme semi-lineal. Hem demostrat el que volíem: hi ha un isomorfisme de cossos $\alpha : K \cong k$ i un isomorfisme semilineal d'espais vectorials $\Phi : F \cong V$.

Demostració del teorema

Suposem ara que tenim una col·lineació

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E')$$

i apliquem els resultats de l'apartat anterior a cadascun dels dos espais $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E')$.

- Escollim un hiperplà $H = \mathcal{P}(F)$ de $\mathcal{P}(E)$ i un punt $x = \langle \vec{e} \rangle \in \mathcal{P}(E) - H$. Tindrem un cos d'escalars k i un k-espai vectorial de translacions V que estaran relacionats amb K i F a través d'isomorfismes

$$\Phi : F \to V; \qquad \alpha : K \to k.$$

- Prenem l'hiperplà $H' := f(H) = \mathcal{P}(F')$ de $\mathcal{P}(E')$ i el punt $x' := f(x) = \langle \vec{e}\,' \rangle \in \mathcal{P}(E') - H'$. Tindrem un cos d'escalars k' i un k'-espai vectorial de translacions V' que estaran relacionats amb K' i F' a través d'isomorfismes

$$\Phi' : F' \to V'; \qquad \alpha' : K' \to k'.$$

- L'aplicació f ens permet relacionar els objectes anteriors a través de dues aplicacions

$$f_* : V' \longrightarrow V, \qquad f_*(\tau') := f^{-1}\tau' f$$
$$f^* : F' \longrightarrow F, \qquad f^* := \Phi^{-1} f_* \Phi'$$

que és fàcil comprovar que són isomorfismes semi-lineals: f_* té associat un isomorfisme de cossos $\beta : k' \to k$, $\beta(\lambda) = f_* \lambda f_*^{-1}$, i f^* té associat l'isomorfisme de cossos $\gamma := \alpha^{-1}\beta\alpha' : K' \to K$.

- *La direcció de la translació $f_*\Phi'(\vec{v}\,')$ és el punt $f^{-1}(\langle \vec{v}\,' \rangle)$.*

Escrivim $\tau' := \Phi'(\vec{v}\,')$ i sigui z la direcció de $f_*(\tau')$. Considerem els punts x, x' que havíem escollit. El punt z és la intersecció de la recta que uneix x i $(f_*(\tau'))(x)$ amb l'hiperplà H. Els tres punts

$$x, \; f^{-1}\tau'(x'), \; z$$

estan alineats a $\mathcal{P}(E)$. Com que f és una col·lineació, els tres punts

$$f(x), \; \tau'(x'), \; f(z)$$

estaran alineats a $\mathcal{P}(E')$ i això implica que $f(z)$ és la direcció de la translació $\tau' = \Phi'(\vec{v}\,')$, que ja hem vist abans que és igual a $\langle \vec{v}\,' \rangle$.

Amb aquests preliminars ja estem en situació de trobar una aplicació semi-lineal $\psi : E \to E'$ tal que $f = \mathcal{P}(\psi)$. Per comoditat, definirem l'aplicació en el sentit contrari. Definim $\varphi : E' \to E$ per la fórmula

$$\varphi(\lambda \overrightarrow{e}' + \overrightarrow{v}') := \gamma(\lambda)\overrightarrow{e} + f^*(\overrightarrow{v}'); \qquad \lambda \in K', \overrightarrow{v}' \in F'.$$

Observem que és un isomorfisme semi-lineal ben definit amb isomorfisme de cossos associat $\gamma : K' \to K$. Sigui ara

$$h : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E); \quad h := \mathcal{P}(\varphi) \circ f.$$

Acabarem la demostració si veiem que h és la identitat.

- *h deixa fixos els punts de l'hiperplà H.*

  En efecte, sigui $\overrightarrow{v} \in F$. Aleshores, si utilitzem la notació $d(-)$ per indicar la direcció d'una translació, tenim

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\varphi)f\left(\langle \overrightarrow{v}\rangle\right) &= \mathcal{P}(\varphi)f\left(d(\Phi(\overrightarrow{v}))\right)\\ &= \mathcal{P}(\varphi)f\left(d(f_*\Phi'(f^*)^{-1}(\overrightarrow{v}))\right)\\ &= \mathcal{P}(\varphi)f\left(f^{-1}\langle (f^*)^{-1}(\overrightarrow{v})\rangle\right)\\ &= \mathcal{P}(\varphi)\left(\langle (f^*)^{-1}(\overrightarrow{v})\rangle\right)\\ &= \langle f^*(f^*)^{-1}(\overrightarrow{v})\rangle = \langle \overrightarrow{v}\rangle.\end{aligned}$$

- *h commuta amb les translacions.*

  Suposem que τ és una translació (diferent de la identitat) de $\mathcal{P}(E)$. Volem demostrar que $h^{-1}\tau h = \tau$. En primer lloc, observem que $h^{-1}\tau h$ és clarament una translació que té la mateixa direcció que τ. Per tant, com que dues translacions de la mateixa direcció difereixen en un escalar, existirà $\lambda \in k$ tal que $h^{-1}\tau h = \lambda\tau$. Volem demostrar $\lambda = 1$. Comencem observant que, aplicant les definicions de h i f_*, la igualtat $h^{-1}\tau h = \lambda\tau$ es tradueix en

$$\mathcal{P}(\varphi^{-1})\tau\mathcal{P}(\varphi) = f_*^{-1}(\lambda\tau). \tag{*}$$

  Escrivim ara $\tau = \Phi(\overrightarrow{v})$ per un cert vector $\overrightarrow{v} \in F - \{0\}$. Aleshores, $\lambda\tau = \Phi(\alpha^{-1}(\lambda)\overrightarrow{v}) = \Phi(\mu\overrightarrow{v})$. Apliquem la igualtat $(*)$ al punt $x' = \langle \overrightarrow{e}'\rangle$. tenim

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\varphi^{-1})\,\Phi(\overrightarrow{v})\,\mathcal{P}(\varphi)\,(x') &= \mathcal{P}(\varphi^{-1})\,\Phi(\overrightarrow{v})\,(x) = \mathcal{P}(\varphi^{-1})\,\langle \overrightarrow{e} + \overrightarrow{v}\rangle\\ &= \langle \overrightarrow{e}' + (f^*)^{-1}(\overrightarrow{v})\rangle = \Phi'(f^*)^{-1}(\overrightarrow{v})(x').\\ f_*^{-1}(\lambda\tau)(x') &= \Phi'(f^*)^{-1}\Phi^{-1}\Phi(\mu\overrightarrow{v})(x')\\ &= \Phi'(f^*)^{-1}(\mu\overrightarrow{v})(x').\end{aligned}$$

  Com que una translació ve determinada per la imatge del punt x' i com que Φ i f^* són isomorfismes, deduïm que $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{v}$ i, per tant, $\lambda = 1$.

Evidentment, si h deixa fixos els punts d'un hiperplà i un punt exterior (observem que $h(x) = x$) i commuta amb totes les translacions, h és la identitat i $f = \mathcal{P}(\varphi^{-1})$.

C.5. Del projectiu a l'afí i viceversa

Al llarg d'aquestes notes hem posat èmfasi en la relació que hi ha entre la geometria afí i la geometria projectiva. Hem mirat l'espai afí com una part de l'espai projectiu —més exactament, com el complement d'un hiperplà de l'espai projectiu— i hem mirat l'espai projectiu com una compleció de l'espai afí —afegint-hi els «punts de l'infinit». Tanmateix, no hem tingut temps d'estudiar a fons aquestes transicions projectiu→afí i afí→projectiu i, per motius d'eficiència, hem acabat tractant per separat les dues geometries. En aquest capítol de la secció de complements omplirem aquest buit amb tots els detalls que no han trobat lloc a les notes.

De l'espai projectiu a l'espai afí

Sigui $X = \mathcal{P}(V)$ un espai projectiu de dimensió n i sigui $\mathcal{P}(H)$ un hiperplà de X. Ja hem estudiat (pàgina 139) com podem dotar el complement $A := \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$ d'una estructura natural[1] d'espai afí. Volem estudiar ara aquella construcció amb més detall. El primer pas és veure quin és l'espai vectorial associat a l'espai afí A. Es tracta de l'espai $E := \mathcal{L}(V/H, H)$ format per totes les aplicacions lineals $V/H \to H$. L'acció de E sobre A de donada per

$$[\vec{v}] + \omega := [\vec{v} + \omega\pi(\vec{v})], \quad \vec{v} \in V,\ \omega \in \mathcal{L}(V/H, H)$$

on $\pi : V \to V/H$ és la projecció canònica. Amb aquesta definició no és difícil veure que es compleixen els axiomes d'espai afí (exercici **III.**6). D'altra banda, com que V/H té dimensió 1, l'espai vectorial E té la mateixa dimensió que H i, per tant, la dimensió de l'espai afí A és la mateixa que la dimensió de l'espai projectiu X.

En conclusió, a partir d'una parella $(\mathcal{P}(V), \mathcal{P}(H))$ formada per un espai projectiu i un hiperplà seu podem definir de manera canònica un espai afí de la mateixa

[1]Aquí, i en moltes altres ocasions al llarg d'aquest llibre, hem utilitzat les paraules *natural* o *canònic* en un sentit poc precís, per indicar una construcció que depèn només de les dades del problema sense utilitzar cap element extern com pugui ser una elecció arbitrària. Dit d'una altra manera, una construcció canònica és aquella que sempre que la duem a terme amb els mateixos inputs obtenim el mateix resultat, exactament. Hi ha una altra interpretació més formal de *construcció natural* que té a veure amb el concepte de *functor* i la teoria de categories. No entrarem en aquest camp però si coneixeu aquest concepte de functor podeu llegir la nota 4).

dimensió que l'espai projectiu $\mathcal{P}(V)$ que té com a conjunt de punts els punts de l'espai projectiu que no pertanyen a l'hiperplà.

De les subvarietats projectives a les subvarietats afins

Volem anar ara un pas més enllà i estudiar quina relació hi ha entre les subvarietats projectives de X i les subvarietats afins de A. Aquesta correspondència ja la vam establir a la pàgina 145. Vegem-la ara amb més detall.

1. Sigui $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{P}(V)$ una subvarietat projectiva no continguda a $\mathcal{P}(H)$ i sigui $L := \mathcal{P}(W) \cap A$. Es compleix que L és una subvarietat afí de A de manera que si P és un punt qualsevol de L, aleshores

$$L = P + \mathcal{L}(V/H, W \cap H).$$

   Per veure-ho, posem $P = [\overrightarrow{v}]$ amb $\overrightarrow{v} \in W - H$. Aleshores, si $Q = [\overrightarrow{v} + \phi\pi(\overrightarrow{v})]$ amb $\phi \in \mathcal{L}(V/H, W \cap H)$, és evident que $Q \in L$. Recíprocament, sigui $Q = [\overrightarrow{w}] \in L$ i sigui $\phi := \overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(V/H, H)$. A l'exercici **III**.7 es demanava descriure l'homomorfisme ϕ. La solució és aquesta:

$$\phi(\overrightarrow{e} + H) = \mu\overrightarrow{w} - \lambda\overrightarrow{v}$$

   on λ, μ estan determinats per la propietat $\overrightarrow{e} - \lambda\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{e} - \mu\overrightarrow{w} \in H$. Aleshores, és evident que $\phi \in \mathcal{L}(V/H, W \cap H)$.

2. Recíprocament, sigui $L = P + F$ una subvarietat afí de A, amb $P = [\overrightarrow{v}]$, $\overrightarrow{v} \in V - H$. Definim

$$F[\overrightarrow{v}] := \left\{\phi\pi(\overrightarrow{v}) : \phi \in F\right\}, \quad \overline{L} := \mathcal{P}\left(\langle\overrightarrow{v}\rangle \oplus F[\overrightarrow{v}]\right).$$

   Es veu fàcilment que $F[\overrightarrow{v}]$ és un subespai vectorial de V de la mateixa dimensió que F. Demostrem ara que $\overline{L}$ no depèn de l'elecció de $P \in L$. Sigui $Q = [\overrightarrow{v}'] \in L$. Això vol dir que existirà $\phi_0 \in F$ tal que $\overrightarrow{v}' = \lambda\overrightarrow{v} + \phi_0\pi(\overrightarrow{v})$ per algun $\lambda \neq 0$. Aleshores, $\phi\pi(\overrightarrow{v}') = \lambda\phi\pi(\overrightarrow{v})$ i $\mathcal{P}\left(\langle\overrightarrow{v}\rangle \oplus F[\overrightarrow{v}]\right) = \mathcal{P}\left(\langle\overrightarrow{v}'\rangle \oplus F[\overrightarrow{v}]\right)$.

3. Les construccions dels dos apartats anteriors són inversa una de l'altra. Demostrem que $\overline{\mathcal{P}(W) \cap A} = \mathcal{P}(W)$. Sigui $\overrightarrow{v} \in W - H$. Aplicant les definicions, tenim

$$\overline{\mathcal{P}(W) \cap A} = \mathcal{P}\left(\langle\overrightarrow{v}\rangle \oplus \{\phi\pi(\overrightarrow{v}) : \phi \in \mathcal{L}(V/H, W \cap H)\}\right) = \mathcal{P}(W')$$

   i volem veure que això és el mateix que $\mathcal{P}(W)$. És evident que $W' \subseteq W$. Si calculem les dimensions de W i W' veurem que són iguals. La igualtat $\overline{L} \cap A = L$ és senzilla.

Comportament respecte de la suma i la intersecció

Entre subvarietats projectives i també entre subvarietats afins tenim definides les operacions de suma i intersecció.[2] La correspondència anterior es comporta *bé* respecte d'aquestes dues operacions, i ara explicarem què volem dir exactament.

Designem per $\mathcal{SP}\,(\mathcal{P}(V)\,|\,\mathcal{P}(H))$ el conjunt de les subvarietats (projectives) de $\mathcal{P}(V)$ que no estan contingudes a $\mathcal{P}(H)$ (incloent-hi el conjunt buit) i designem per $\mathcal{SA}\,(\mathcal{P}(V)-\mathcal{P}(H))$ el conjunt de les subvarietats afins de l'espai afí $\mathcal{P}(V)-\mathcal{P}(H)$ (incloent-hi el conjunt buit). Hem definit una bijecció entre aquests dos conjunts

$$\phi : \mathcal{SP}\,(\mathcal{P}(V)\,|\,\mathcal{P}(H)) \to \mathcal{SA}\,(\mathcal{P}(V)-\mathcal{P}(H))$$

que té la propietat que $Y \subseteq Z$ si i només si $\phi(Y) \subseteq \phi(Z)$.[3] Com que la suma i la intersecció de subvarietats es poden definir exclusivament a partir de la inclusió — la suma és la subvarietat més petita que conté les dues subvarietats i la intersecció és la subvarietat més gran que està continguda en totes dues— obtenim, sense que calgui cap més demostració:

$$\phi(Y+Z) = \phi(Y)+\phi(Z), \qquad \phi(Y \Cap Z) = \phi(Y)\cap\phi(Z)$$

$$\phi^{-1}(Y+Z) = \phi^{-1}(Y)+\phi^{-1}(Z), \qquad \phi^{-1}(Y\cap Z) = \phi^{-1}(Y)\Cap\phi^{-1}(Z)$$

Observem que hem utilitzat el símbol $\Cap$ per indicar la intersecció de dos elements de $\mathcal{SP}\,(\mathcal{P}(V)\,|\,\mathcal{P}(H))$. El motiu és que la intersecció ordinària no està ben definida a $\mathcal{SP}\,(\mathcal{P}(V)\,|\,\mathcal{P}(H))$ perquè podria donar una subvarietat continguda a $\mathcal{P}(H)$ que no és un element de $\mathcal{SP}\,(\mathcal{P}(V)\,|\,\mathcal{P}(H))$. Així, $X \Cap Y = X\cap Y$ si $X\cap Y$ no està contingut a $\mathcal{P}(H)$ i $X\Cap Y = \varnothing$ en cas contrari.

Vegem ara què podem dir sobre $\phi^{-1}(L_1)\cap\phi^{-1}(L_2)$ quan $L_1 = P_1+F_1$, $L_2 = P_2+F_2$ són varietats afins disjuntes. Posem $P_1 = [\overrightarrow{v}_1]$, $P_2 = [\overrightarrow{v}_2]$. Siguin

$$E_i := \langle\overrightarrow{v}_i\rangle \oplus F_i[\overrightarrow{v}_i], \quad i = 1,2$$

[2]No hem tingut temps d'explicar amb detall quin tipus d'estructura abstracta sobre el conjunt de les subvarietats d'un espai projectiu ens proporcionen aquestes dues operacions. Donem ara unes breus indicacions sobre aquest tema. Si X és un espai projectiu de dimensió finita i designem per $\mathcal{S}(X)$ el conjunt de totes les subvarietats de X, incloent el conjunt buit, és evident que $\mathcal{S}(X)$ és un *conjunt parcialment ordenat* (*«poset»*) per la relació d'inclusió. Les operacions de suma i intersecció doten $\mathcal{S}(X)$ d'una estructura de *reticle* (anglès: *lattice*) i les propietats d'aquestes dues operacions que hem anat estudiant ens diuen que aquest reticle és complet (qualsevol conjunt de subvarietats té suma i intersecció), complementat (donada una subvarietat Y existeix una subvarietat Z tal que $Y+Z = X$ i $Y\cap Z = \varnothing$), modular (la propietat de modularitat apareix a l'exercici **II**.54) i de dimensió finita. En qualsevol reticle amb aquestes propietats es pot desenvolupar una teoria de la dimensió que, en particular, inclou les fórmules de Grassmann. D'altra banda, es pot demostrar que qualsevol reticle amb aquestes propietats és isomorf al reticle de les subvarietats d'algun espai projectiu de dimensió finita. Si $X = \mathcal{P}(V)$, és clar que $\mathcal{S}(X)$ és isomorf al reticle dels subespais vectorials de V.

[3]Amb el llenguatge de la nota anterior, diríem que ϕ és un *isomorfisme de reticles*.

De manera que $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \mathcal{P}(E_1 \cap E_2)$, però voldríem relacionar això amb F_1, F_2. Definim $f : F_1 \cap F_2 \to E_1 \cap E_2$ per

$$f(\phi) := \phi\pi(\overrightarrow{v}_1).$$

Aleshores, f està ben definida i és un isomorfisme. En efecte, sigui $\phi_0 := \overrightarrow{P_2P_1}$. Tindrem

$$\lambda\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}_2 + \phi_0\pi(\overrightarrow{v}_2)$$

amb $\lambda \neq 0$. D'aquí es dedueix que $\phi\pi(\overrightarrow{v}_1) = \lambda\phi\pi(\overrightarrow{v}_2)$ i realment $f(\phi) \in E_1 \cap E_2$. f és clarament una aplicació lineal. Si $f(\phi) = 0$, aleshores $\phi\pi(\overrightarrow{v}_1) = 0$ i com que ϕ està definida sobre l'espai vectorial de dimensió 1 V/H, tindrem $\phi = 0$ i hem vist que f és injectiva. Vegem ara que f és exhaustiva. Sigui $\overrightarrow{e} \in E_1 \cap E_2$. Això vol dir que

$$\overrightarrow{e} = \alpha\overrightarrow{v}_1 + \phi_1\pi(\overrightarrow{v}_1) = \beta\overrightarrow{v}_2 + \phi_2\pi(\overrightarrow{v}_2), \quad \phi_1 \in F_1,\ \phi_2 \in F_2.$$

Si els coeficients α, β són tots dos diferents de zero obtenim immediatament

$$P_1 + \frac{1}{\alpha}\phi_1 = P_2 + \frac{1}{\beta}\phi_2$$

i això és impossible perquè estem sota la hipòtesi que L_1 i L_2 són disjuntes. Per tant, per exemple, $\beta = 0$. Aleshores,

$$\alpha\overrightarrow{v}_1 = \phi_2\pi(\overrightarrow{v}_2) - \phi_1\pi(\overrightarrow{v}_1) \in H$$

i això implica $\alpha = 0$. Hem demostrat

$$\overrightarrow{e} = \phi_1\pi(\overrightarrow{v}_1) = \phi_2\pi(\overrightarrow{v}_2)$$

i això implica $\phi_1 = \phi_2 \in F_1 \cap F_2$ i $\overrightarrow{e} = f(\phi_1)$.

Deduïm que, en el cas que L_1 i L_2 siguin disjuntes, hi ha un isomorfisme $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cong \mathcal{P}(F_1 \cap F_2)$.

La conclusió de tot això és que hi ha una correspondència bijectiva entre les subvarietats afins de $A = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$ i les subvarietats projectives de $X = \mathcal{P}(V)$ que no estan contingudes a l'hiperplà $\mathcal{P}(H)$, i aquesta correspondència conserva la dimensió i respecta la suma i la intersecció de subvarietats.

De les homografies a les afinitats

Per completar el «diccionari» que ens permet passat de l'espai projectiu a l'espai afí volem veure ara quina relació hi ha entre aquests dos mons a nivell de les transformacions de cadascun dels objectes: les afinitats dels espais afins i les homografies dels espais projectius.

Suposem, doncs, que tenim una homografia $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$ i volem veure que, sota unes hipòtesis molt naturals, f dóna lloc a una afinitat $\widetilde{f} : A \to A'$ entre els espais afins que hem construït a partir de $\mathcal{P}(V)$ i $\mathcal{P}(V')$. Voldríem considerar el cas més general possible, que és aquell en que f és una *homografia singular*, una generalització senzilla del concepte d'homografia que vam considerar a l'exercici **II**.3. Recordem-ne la definició. Si $\phi : V \to V'$ és una aplicació lineal diferent de zero, podem definir

$$\mathcal{P}(\phi)\,([\overrightarrow{v}]) := [\phi(\overrightarrow{v})]$$

que és una aplicació ben definida sempre que $\overrightarrow{v} \notin \ker\phi$. Per tant, obtenim una aplicació

$$\mathcal{P}(\phi) : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker\phi) \longrightarrow \mathcal{P}(V').$$

Observem que l'aplicació lineal ϕ està determinada llevat del producte per una constant no nul·la. La relació entre homografies singulars i afinitats ve donada per aquest resultat:

> *Sigui f una homografia singular de $\mathcal{P}(V)$ a $\mathcal{P}(V')$ tal que f doni lloc, per restricció, a una aplicació $\widetilde{f} : A \to A'$. Aleshores, $\widetilde{f}$ és una afinitat.*

Demostrem aquest resultat. Sigui $\phi : V \to V'$ una aplicació lineal que representi l'homografia singular f i siguin H, H' hiperplans de V i V', respectivament, de manera que $A = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(H)$, $A' = \mathcal{P}(V') - \mathcal{P}(H')$ siguin els espais afins que obtenim. La condició que la restricció de f ens doni una aplicació $\widetilde{f} : A \to A'$ és equivalent a

$$\phi(\overrightarrow{v}) \in H' \iff \overrightarrow{v} \in H.$$

Això és senzill de veure i l'únic pas de la demostració que requereix un comentari és veure que si f està ben definida aleshores $\phi(H) \subseteq H'$. Suposem, doncs, que f està ben definida i considerem $H'' := H' \cap \phi(V)$. Com que $H' + \phi(V) = V'$, un càlcul de dimensions ens diu que H'' és un hiperplà de $\phi(V)$. D'altra banda, com que $\phi^{-1}(H') \subseteq H$, tenim que $H'' \subseteq \phi(H)$. Aleshores

$$H'' \subseteq \phi(H) \subseteq \phi(V)$$

i, com que H'' és un hiperplà de $\phi(V)$, una d'aquestes dues inclusions ha de ser una igualtat. Si $\phi(H) = \phi(V)$, prenem $\overrightarrow{v} \in V - H$ i sigui $\overrightarrow{u} \in H$ tal que $\phi(\overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{u})$. Aleshores, $\phi(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = 0$ i això és absurd perquè $f([\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}])$ ha d'estar definit. Per tant $H'' = \phi(H)$ i ja hem demostrat que $\phi(H) \subseteq H'$.

Pel que acabem de veure, ϕ indueix una aplicació

$$\overline{\phi} : V/H \to V'/H'$$

que no pot ser zero. Com que els dos espais vectorials involucrats són de dimensió 1, $\overline{\phi}$ ha de ser un isomorfisme. Recordem ara que els espais vectorials associats als espais afins A i A' els hem definit com

$$E := \mathcal{L}(V/H, H), \quad E' := \mathcal{L}(V'/H', H').$$

Ara definim una aplicació lineal $\psi : E \to E'$ així:

$$\psi(\omega) = \phi\omega\overline{\phi}^{-1} : V'/H' \to V/H \to H \to H'.$$

Observem

- Si, en lloc de ϕ, prenem $\lambda\phi$ per algun $\lambda \neq 0$, l'aplicació ψ que obtenim és la mateixa. Per tant, ψ només depèn de f i no del representant ϕ que hem escollit.
- L'aplicació $\widetilde{f} : A \to A'$ i l'aplicació lineal $\psi : E \to E'$ formen una afinitat $A \to A'$. La comprovació és immediata:

$$f(P) + \psi(\omega) = [\phi(\overrightarrow{v}) + \phi\omega\overline{\phi}^{-1}\pi\phi(\overrightarrow{v})] = [\phi(\overrightarrow{v}) + \phi\omega\pi(\overrightarrow{v})] = f(P + \overrightarrow{\omega}).$$

La conclusió de tot el que hem vist fins ara és que hi ha una manera natural de passar dels espais projectius als espais afins i de les homografies (possiblement singulars) a les afinitats, i que aquest pas es comporta bé respecte de les subvarietats lineals i les operacions de suma i intersecció de subvarietats.[4]

De l'espai afí a l'espai projectiu

Si ara tenim un espai afí A sobre un espai vectorial de dimensió finta V, construirem una mena de «compleció» de A que serà un espai projectiu $\mathcal{P}(E)$ de manera que A s'identificara a l'espai afí $\mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(H)$ per un cert hiperplà H de E. Per fer-ho d'una manera natural utilitzarem el concepte de **camp vectorial** sobre un espai afí.

Un camp vectorial sobre A és una aplicació $X : A \to E$. Intuïtivament, es tracta de «posar un vector a cada punt de l'espai». El conjunt de tots els camps vectorials sobre A forma un espai vectorial que denotarem per $\mathcal{X}(A)$. Les operacions de suma de camps i producte d'un camp per un escalar es defineixen de la manera òbvia.

Dins de l'espai vectorial $\mathcal{X}(A)$ identifiquem aquests dos subconjunts:

[4] Qui conegui la teoria de categories es pot qüestionar si aquest *pas* dels espais projectius als espais afins i de les homografies a les afinitats que hem qualificat de *natural* és realment un *functor*. La resposta és sí, però cal plantejar-ho amb una certa cura. Fixem un cos k i considerem aquestes dues categories:

1. La categoria $\mathcal{P}_n$ que té per objectes les parelles (V, H) on V és un k-espai vectorial de dimensió $n + 1 > 1$ i H és un subespai de V de codimensió 1, i té per morfismes les aplicacions lineals $\phi : V \to V'$ tals que $\phi(\overrightarrow{v}) \in H' \iff \overrightarrow{v} \in H$.
2. La categoria $\mathcal{A}_n$ que té per objectes els espais afins de dimensió $n > 0$ sobre el cos k i per morfismes les afinitats.

Aleshores, en aquest context, és cert que les construccions que hem fet ens donen un functor $F : \mathcal{P}_n \to \mathcal{A}_n$.

- Els **camps constants** són els que assignen a cada punt un mateix vector. Si $\overrightarrow{v} \in V$, denotarem el camp constant $P \mapsto \overrightarrow{v}$ per $X_{\overrightarrow{v}}$. El conjunt de tots els camps constants forma un subespai vectorial $\mathcal{K}(A) \subset \mathcal{X}(A)$ que és clarament isomorf a V.

- Un **camp central** és un camp vectorial X que té la propietat que existeixen $C \in A$ (anomenat el *centre* del camp) i $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ tals que

$$X(P) = \lambda \overrightarrow{PC} \text{ per tot } P \in A.$$

  És fàcil veure que el punt C i l'escalar λ estan unívocament determinats per X i això ens permet designar el camp central X amb la notació $X_{C,\lambda}$. El conjunt de tots els camps centrals el denotarem per $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{X}(A)$ i s'identifica clarament al conjunt $A \times k^*$. No és un subespai vectorial de $\mathcal{X}(A)$.

Definim $\mathcal{E}$ com la unió

$$\mathcal{E} := \mathcal{K}(A) \cup \mathcal{C}(A).$$

Resulta que $\mathcal{E}$ és un subespai vectorial de $\mathcal{X}(A)$. Per comprovar-ho n'hi ha prou amb verificar aquestes igualtats senzilles.

$$\begin{aligned}
\mu X_{C,\lambda} &= X_{C,\mu\lambda} \\
X_{\overrightarrow{v}} + X_{C,\lambda} &= X_{D,\lambda} \text{ amb } D = C + \lambda^{-1}\overrightarrow{v} \\
X_{C,\lambda} + X_{D,\mu} &= X_{P,\lambda+\mu} \text{ amb } P = D + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{DC}, \text{ si } \lambda+\mu \neq 0 \\
X_{C,\lambda} + X_{D,-\lambda} &= X_{\lambda\overrightarrow{DC}}.
\end{aligned}$$

Quina dimensió té aquest espai vectorial $\mathcal{E}$? Per contestar aquesta pregunta prenem un punt qualsevol $P \in A$ i observem que cada element no nul de $\mathcal{E}/\mathcal{K}$ té un únic representant de la forma $X_{P,\lambda}$ per algun $\lambda \in k^*$. És a dir, $\mathcal{E}/\mathcal{K}$ te dimensió 1 i, per tant, $\dim(\mathcal{E}) = \dim V + 1$.

Considerem ara l'espai projectiu $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ i l'hiperplà $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ i observem que l'assignació $P \mapsto X_{P,1}$ dóna una bijecció

$$f : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}) - \mathcal{P}(\mathcal{K}).$$

Acabarem aquesta discussió veient que f és una afinitat. Recordem que, segons la construcció de l'apartat anterior, $\mathcal{P}(\mathcal{E}) - \mathcal{P}(\mathcal{K})$ és un espai afí sobre l'espai vectorial $W := \mathcal{L}(\mathcal{E}/\mathcal{K}, \mathcal{K})$. Per demostrar que f és una afinitat hem de definir la seva diferencial $df : V \to W$. Ho fem així:

$$df(\overrightarrow{v})\big([X_{P,\lambda}]\big) := X_{\lambda\overrightarrow{v}}.$$

Aplicant amb cura les definicions anteriors es pot comprovar que df està ben definit, és una aplicació lineal i compleix que $f(P + \overrightarrow{v}) = f(P) + df(\overrightarrow{v})$. Per tant, f és un isomorfisme afí.

En conclusió, donat un espai afí l'hem inclòs, de manera natural, com el complement d'un hiperplà en un espai projectiu.

De les afinitats a les homografies

Vegem ara com es comporta el pas d'afí a projectiu respecte de les afinitats. Suposem que tenim una afinitat $h : A \to A'$ amb diferencial $dh : V \to V'$. Fem la construcció anterior als dos espais afins A, A' i obtenim isomorfismes afins

$$f : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}) - \mathcal{P}(\mathcal{K})$$
$$f' : A' \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}') - \mathcal{P}(\mathcal{K}')$$

A partir d'aquesta afinitat podem definir una aplicació $\widetilde{h} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ d'aquesta manera:

$$\widetilde{h}(X_{\overrightarrow{v}}) := X_{dh(\overrightarrow{v})}$$
$$\widetilde{h}(X_{P,\lambda}) := X_{h(P),\lambda}$$

Aleshores, és un exercici senzill comprovar que $\widetilde{h}$ és una aplicació lineal i que $\mathcal{P}(\widetilde{h})$ restringida a A coincideix amb h. En conclusió, quan completem un espai afí a un espai projectiu, cada afinitat s'estén a una homografia (que pot ser singular).

Equivalències

Hem vist com passar del projectiu (amb un hiperplà distingit) a l'afí i de l'afí al projectiu, sempre de manera natural. Per acabar de veure que tenim una equivalència entre el món projectiu i el món afí hauríem de comprovar que les dues transformacions afí-projectiu i projectiu-afí són realment inverses una de l'altra.

Si comencem amb un espai afí A, el completem a un espai projectiu $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ i, a continuació, prenem l'espai afí $\overline{A} := \mathcal{P}(\mathcal{E}) - \mathcal{P}(\mathcal{K})$, ja hem vist que hi ha un isomorfisme afí natural $A \to \overline{A}$. És a dir, si passem de l'afí al projectiu i novament a l'afí retrobem, llevat d'isomorfisme natural, l'espai afí inicial.

Recíprocament, comencem amb un espai projectiu $\mathcal{P}(E)$ i un hiperplà $\mathcal{P}(H)$ i construïm l'espai afí associat $A := \mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(H)$. Recordem que l'espai vectorial d'aquest espai afí A és $\mathcal{L}(E/H, H)$. A continuació, prenem la compleció projectiva d'aquest espai afí A que sabem que és $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ on $\mathcal{E}$ és un cert subespai de l'espai vectorial dels camps vectorials sobre A. Voldríem veure que amb aquestes dues operacions hem retornat a l'espai projectiu inicial. Dit amb més precisió, volem trobar un isomorfisme natural $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Ho farem construint un isomorfisme lineal $\Phi : E \to \mathcal{E}$.

Escollim un vector $\overrightarrow{v}_0 \in E - H$ i definim $\Phi(\overrightarrow{v}) \in \mathcal{E}$ d'aquesta manera:

- Si $\overrightarrow{v} \in H$, sigui $\omega : E/H \to H$ l'únic homomorfisme tal que $\omega\pi(\overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{v}$. Definim $\Phi(\overrightarrow{v}) = X_\omega \in \mathcal{K}$.

- Si $\overrightarrow{v} \notin H$, escrivim $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{e}$ amb $\overrightarrow{e} \in H$ i observem que $\lambda \neq 0$ està ben determinat. Definim $\Phi(\overrightarrow{v}) = X_{[\overrightarrow{v}],\lambda} \in \mathcal{C}$.

Comprovem ara que Φ és una aplicació lineal.

- Φ és clarament lineal sobre el subespai H i també és fàcil comprovar que $\Phi(\mu \overrightarrow{v}) = \mu \Phi(\overrightarrow{v})$ per tot $\overrightarrow{v} \in E$.
- Siguin $\overrightarrow{u} \in H$, $\overrightarrow{v} \in E - H$ i escrivim $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{e}$ amb $\overrightarrow{e} \in H$. Sigui $\omega : E/H \to H$ l'únic homomorfisme tal que $\omega\pi(\overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{v}$. Tenim

$$\Phi(\overrightarrow{u}) + \Phi(\overrightarrow{v}) = X_\omega + X_{[\overrightarrow{v}],\lambda} = X_{[\overrightarrow{v}]+\lambda^{-1}\overrightarrow{u},\lambda} = X_{[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}],\lambda} = \Phi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

- Siguin ara $\overrightarrow{v}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{v}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{e}_2$ amb $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2 \in H$ i $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En aquests cas tenim

$$\Phi(\overrightarrow{v}_1) + \Phi(\overrightarrow{v}_2) = X_{[\overrightarrow{v}_1],\lambda_1} + X_{[\overrightarrow{v}_2],\lambda_2} = X_{[\overrightarrow{u}],\lambda_1+\lambda_2}$$

on el punt $[\overrightarrow{u}]$ ve definit per

$$[\overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{v}_2] + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \overrightarrow{[\overrightarrow{v}_2][\overrightarrow{v}_1]}.$$

Observem que el vector $\overrightarrow{[\overrightarrow{v}_2][\overrightarrow{v}_1]}$ és l'homomorfisme $\omega : E/H \to H$ tal que

$$\omega\pi(\overrightarrow{v}_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$$

i, per tant, $[\overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2]$ i $\Phi(\overrightarrow{v}_1) + \Phi(\overrightarrow{v}_2) = \Phi(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2)$.

En definitiva, Φ és un isomorfisme lineal i dóna lloc a una homografia

$$\mathcal{P}(\Phi) : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

tal com volíem. Observem, però, que a l'inici de la construcció de Φ hem escollit un cert vector $\overrightarrow{v}_0$, de manera que la construcció de Φ no és natural perquè una elecció diferent ens duria a una aplicació Φ' diferent. De tota manera, si estudiem l'efecte de canviar el vector $\overrightarrow{v}_0$ per un altre vector $\overrightarrow{v}'_0$, és fàcil veure que l'isomorfisme Φ es transformaria en un altre isomorfisme Φ' que seria un múltiple no nul de Φ. En conseqüència, les aplicacions induïdes $\mathcal{P}(\Phi)$ i $\mathcal{P}(\Phi')$ serien iguals i podem afirmar que l'isomorfisme $\mathcal{P}(E) \cong \mathcal{P}(\mathcal{E})$ sí que és natural.

Amb coordenades tot és molt més senzill

Fins ara hem vist com hi ha transformacions naturals entre els conceptes afins i els conceptes projectius i no negarem que els detalls de tot plegat són relativament complicats. Aquesta complicació ve de la insistència en voler tenir transformacions *naturals*. Si renunciem a aquesta exigència, si, per exemple, treballem en un cert sistema de coordenades, aleshores —com ja hem dit a la nota 9 de la pàgina 140— tot el que hem estudiat en aquest capítol es simplifica extraordinàriament. Repassem-ho breument.

Si prenem un sistema de referència en un espai projectiu, aquest espai projectiu es converteix en $P_n(k)$ i els seus punts són $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ on $x_1, \ldots, x_{n+1} \in k$ i entenem que $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \{\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}\}$ si $\lambda \neq 0$. Considerem ara l'hiperplà H d'equació $x_{n+1} = 0$. Els punts de $\mathcal{P}_n(k) - H$ són els punts $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \in P_n(k)$ tals que $x_{n+1} \neq 0$. És clar que, dividint totes les coordenades per x_{n+1}, aquests punts es poden representar, de manera única, com $\{y_1, \ldots, y_n, 1\}$ i, per tant, tenim una bijecció entre $\mathcal{P}_n(k) - H$ i l'espai afí k^n donada per

$$
\begin{aligned}
\{y_1, \ldots, y_n, 1\} &\longleftarrow (y_1, \ldots, y_n) \\
\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

Aquests processos s'anomenen, respectivament, *homogeneïtzació* i *deshomogeneïtzació* i ens permeten la transició entre l'espai projectiu $P_n(k)$ i l'espai afí k^n, en un sentit i en l'altre.

Estudiem ara el cas de les subvarietats afins i les subvarietats projectives. Una subvarietat projectiva de $P_n(k)$ ve donada per unes equacions lineals homogènies

$$
\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\
\vdots \\
a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{r,n+1}x_{n+1} = 0
\end{gathered}
$$

Els punts de la subvarietat són els que tenen coordenades $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ que compleixen aquestes equacions. Si ara suprimim els punts de l'hiperplà $x_{n+1} = 0$ i passem a l'espai afí k^n, això és el mateix que considerar els punts amb $x_{n+1} = 1$ i les equacions anteriors es transformen en les equacions de la subvarietat afí

$$
\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \\
\vdots \\
a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{r,n}x_n + a_{r,n+1} = 0
\end{gathered}
$$

Recíprocament, si partim d'una subvarietat afí amb unes equacions cartesianes, la subvarietat projectiva corresponent s'obtindrà multiplicant els termes de grau zero de les equacions per la nova variable x_{n+1}.

A nivell de transformacions, una afinitat de k^n ve donada per una matriu $(n+1)\times(n+1)$ de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} & \rho_1 \\ M & \vdots \\ & \rho_m \\ \hline 0\cdots\cdots 0 & 1 \end{array}\right).$$

Aquesta matriu ens dóna, automàticament, una aplicació lineal $k^{n+1}\to k^{n+1}$ i, per tant, una homografia $P_n(k)\to P_n(k)$ (que pot ser singular). Recíprocament, si tenim una homografia (potser singular) $\mathcal{P}(\phi): P_n(k)\to P_n(k)$ que tingui la propietat que

$$\phi(\overrightarrow{v})\in\{x_{n+1}=0\}\Longleftrightarrow \overrightarrow{v}\in\{x_{n+1}=0\}$$

aleshores ϕ vindrà donada per una certa matriu

$$\left(\begin{array}{c|c} & \rho_1 \\ M & \vdots \\ & \rho_m \\ \hline 0\cdots\cdots 0 & \lambda \end{array}\right)$$

amb $\lambda\neq 0$. Aleshores, com que $\mathcal{P}(\phi)$ no canvia si dividim per λ, obtenim la matriu d'una afinitat $k^n\to k^n$.

C.6. Col·lineacions afins i classificació de les afinitats

En el capítol 22 vam enunciar dos teoremes importants de geometria afí. El primer feia referència a que (amb algunes poques excepcions) tota col·lineació entre dos espais afins és una semi-afinitat. El segon ens donava un criteri de similitud entre afinitats basat en la similitud de les diferencials i en la igualtat del nivell d'invariància. En aquest capítol demostrarem aquests dos teoremes.

El teorema de representació per a col·lineacions afins

Recordem l'enunciat del teorema que sovint s'anomena «teorema fonamental de la geometria afí»:

> *Si X és un espai afí de dimensió finita > 1 sobre un cos de més de dos elements i $f : X \to X$ és una col·lineació, aleshores f és una semi-afinitat.*

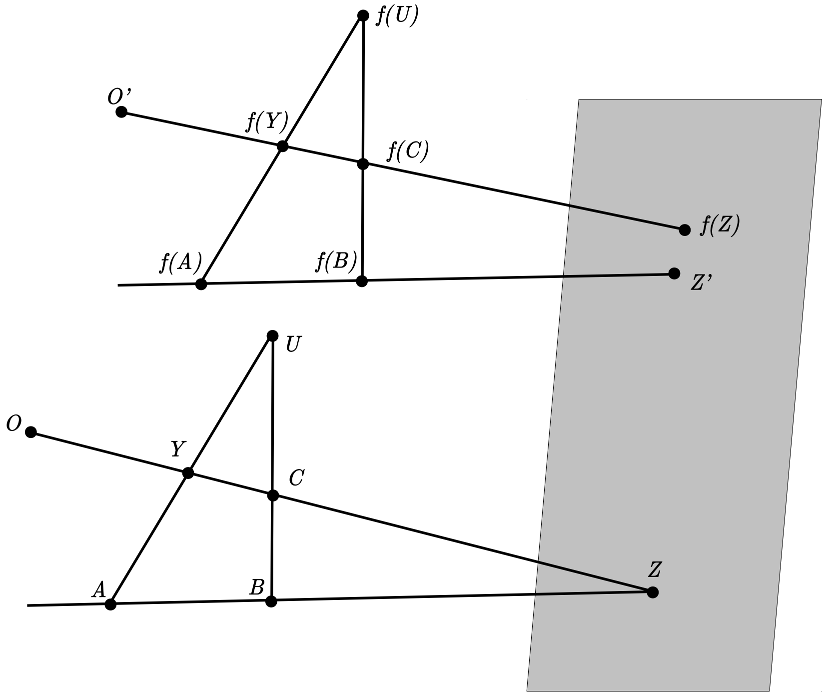
Observem que aquest teorema s'assembla molt al *teorema de representació* de la geometria projectiva (pàgina 108) i que la correspondència entre la geometria projectiva i la geometria afí que hem estudiat al capítol anterior suggereix que aquest teorema afí es podria deduir del teorema projectiu, sense gaire esforç. Ho farem així.

Per tot el que hem estudiat al capítol anterior, podem suposar que tenim un espai projectiu $\overline{X} = \mathcal{P}(V)$ i un hiperplà $H = \mathcal{P}(W) \subset \overline{X}$ de manera que $X = \overline{X} - H$. El que farem serà estendre l'aplicació $f : X \to X$ a una col·lineació $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{X}$. Definim $\overline{f}$ d'aquesta manera:

- Escollim un punt $O \in X$ i denotem $O' := f(O)$.
- Si $Z \in H$, considerem la recta OZ i escollim un punt $Y \in OZ$, $Y \neq O, Z$. Definim $\overline{f}(Z)$ que sigui el punt on la recta $O'f(Y)$ talla H.
- Cal veure que $\overline{f}(Z)$ no depèn de l'elecció del punt $Y \in OZ$. Això és evident perquè f és una col·lineació.

Tenim, per tant, una aplicació $\overline{f} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ que, restringida a X, coincideix amb la col·lineació inicial $f : X \to X$. El pas següent consisteix en demostrar que $\overline{f}$ és també una col·lineació. Que $\overline{f}$ és bijectiva és clar.

Considerem aquesta construcció. Comencem amb tres punts alineats qualssevol A, B, Z, amb $Z \in H$ i $A, B \in X$. Escollim un punt $Y \in X$ arbitrari tal que O, Y, Z estiguin alineats i determinem, pel mètode anterior, el punt $\overline{f}(Z) \in H$. Escollim un punt $U \notin H$ alineat amb A i Y. Per poder fer això necessitem que les rectes tinguin com a mínim quatre punts i això és cert precisament per la hipòtesi que el cos base té més de dos elements. Apliquem ara f a tot el diagrama i obtenim la situació representada en aquest gràfic:



Per l'axioma projectiu, les rectes $f(A)f(B)$ i $f(Y)f(C)$ s'han de tallar a $\overline{X}$, però no poden tallar-se a X perquè les seves antiimatges no es tallen a X i f és una col·lineació. Per tant, s'han de tallar a H i això implica que $f(Z) = Z'$. Amb tot això hem demostrat que per calcular $f(Z)$ podem prescindir del punt O i prendre punts qualsevol $A, B \in X$ alineats amb Z a $\overline{X}$. També hem demostrat que si tenim $A, B \in X$, $Z \in H$, aleshores A, B, Z estan alineats si i només si $f(A), f(B), f(Z)$ estan alineats.

Per acabar la demostració que $\overline{f}$ és una col·lineació hem d'estudiar el cas $Z_1, Z_2, Z_3 \in H$ i demostrar que estan alineats si i només si $f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3)$ estan alineats. Suposem que Z_1, Z_2, Z_3 estan alineats i escollim Y_1 sobre la recta OZ_1 i Y_2 sobre la recta OZ_2, tals que $Y_1 \neq O, Z_1$, $Y_2 \neq O, Z_2$. És clar que la recta

Y_1Y_2 tallarà la recta OZ_3 en un punt Y_3. Aplicant $\overline{f}$ veiem que $f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3)$ pertanyen a la intersecció de l'hiperplà H amb el pla que conté les rectes $Of(Y_1)$, $O, f(Y_2)$ i $Of(Y_3)$. Aquesta intersecció és una recta i $f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3)$ estan alineats. La implicació recíproca es demostra de la mateixa manera.

Apliquem ara el teorema de representació de col·lineacions projectives: existirà una aplicació semi-lineal $\phi : V \to V$ tal que $\overline{f} = \mathcal{P}(\phi)$. Aleshores, $f : X \to X$ serà també una semi-afinitat.[1]

Bases de Jordan

La demostració del teorema de classificació de les afinitats (pàgina 160) utilitza de manera fonamental la teoria de les *bases de Jordan*, una mica més enllà del que s'estudia habitualment als cursos d'àlgebra lineal. Per aquest motiu, abans d'entrar en la demostració del teorema de classificació, repassarem la teoria de les bases de Jordan des del punt de vista que ens interessa.

Suposem que tenim un endomorfisme $\phi : V \to V$ d'un espai vectorial de dimensió finita V i considerem el seu *polinomi anul·lador* $p(x)$. La primera observació important és que una descomposició de $p(x)$ en polinomis primers entre ells dóna lloc a una descomposició de V en suma directa de subespais invariants per ϕ. Més concretament

> *Si $p(x) = q_1(x)q_2(x)$ i els polinomis $q_1(x), q_2(x)$ són polinomis mònics no constants primers entre ells, aleshores existeixen subespais $E_1, E_2 \subset V$ invariants per ϕ, tals que $V = E_1 \oplus E_2$, $q_1(x)$ és el polinomi anul·lador de $\phi|_{E_1}$ i $q_2(x)$ és el polinomi anul·lador de $\phi|_{E_2}$.*

La demostració és senzilla i utilitza la identitat de Bézout. Aquest teorema ens permet reduir l'estudi d'un endomorfisme al cas en que el polinomi anul·lador sigui una potència d'un polinomi irreductible. Per exemple, $q(x) = (x - a)^r$. La teoria de les bases de Jordan estudia precisament aquest cas.

Suposem a partir d'ara que el polinomi anul·lador de l'endomorfisme ϕ tingui la forma $q(x) = (x - a)^r$ per algun escalar $a \in k$ i algun enter $r > 0$. A cada vector $\overrightarrow{e} \in V$ li podem associar aquests dos enters

$$\eta(\overrightarrow{e}) := \text{mín}\{i : (\phi - a)^i(\overrightarrow{e}) = 0\}$$
$$h(\overrightarrow{e}) := \text{mín}\{i : (\phi - a)^i(\overrightarrow{e}) \in \text{Im}(\phi - a)^{i+1}\}.$$

[1]Estrictament parlant, no podem aplicar la teoria del capítol anterior perquè només havíem considerat el cas de les homografies i no el cas de les projectivitzacions d'aplicacions semi-lineals, però els resultats segueixen essent vàlids en aquesta situació lleugerament més general.

Clarament, $h(\vec{e}) \leq \eta(\vec{e})$. Direm que un vector $\vec{e}$ té *alçada màxima* si $h(\vec{e}) = \eta(\vec{e})$.

En aquesta situació, trobar una **base de Jordan** per a ϕ vol dir trobar vectors

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \in V$$

(anomenats *generadors* de la base de Jordan) de manera que si posem $r_i := \eta(\vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, k$, aleshores

$$\begin{cases} \vec{e}_1, (\phi - a)(\vec{e}_1), \dots, (\phi - a)^{r_1 - 1}(\vec{e}_1), \\ \qquad\qquad\vdots \\ \vec{e}_k, (\phi - a)(\vec{e}_k), \dots, (\phi - a)^{r_k - 1}(\vec{e}_k) \end{cases}$$

és una base de V. Observem que, d'aquesta manera, la matriu de ϕ en una base de Jordan té una forma ben senzilla:

$$\begin{pmatrix} J_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}, \quad \text{amb } J_i = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 1 & a & 0 & & & \\ 0 & 1 & a & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a & 0 \\ & & & & 1 & a \end{pmatrix} \text{ matriu } r_i \times r_i.$$

Cada matriu J_i direm que és un *bloc de Jordan*. La teoria de les bases de Jordan ens diu que sempre podem trobar una base de Jordan. Aleshores, quan expressem ϕ en una base de Jordan i obtenim una matriu com l'anterior, direm que hem expressat ϕ en la seva *forma normal de Jordan*. Aquesta expressió està justificada perquè la forma normal de Jordan és única, en el sentit que el nombre k de blocs de Jordan i la mida r_i de cada bloc de Jordan estan determinats per l'endomorfisme ϕ i no canvien si substituïm ϕ per un endomorfisme conjugat $\psi\phi\psi^{-1}$. Evidentment, l'ordre en què apareixen els blocs sí que el podem canviar arbitràriament, però no el seu nombre ni la seva mida.

Com ja hem dit, l'existència de bases de Jordan —que s'estudia als cursos bàsics d'àlgebra lineal— juga un paper important en el teorema de classificació de les afinitats, però necessitarem una propietat de les bases de Jordan que va una mica més enllà de la seva existència i que normalment no es té en compte en els cursos d'àlgebra lineal: ens cal saber que si tenim un vector d'alçada màxima prefixat (diferent de zero), podem trobar una base de Jordan que contingui aquest vector com a generador. Concretament:

> *Sigui $\vec{e} \in V$ un vector d'alçada màxima. Existeix una base de Jordan per a ϕ. A més, si $\vec{e} \neq 0$, existeix una base de Jordan per a ϕ de la qual $\vec{e}$ n'és un generador.*

Aquest resultat es demostra sense gaire dificultat per inducció sobre r (que és el grau del polinomi anul·lador $(x - a)^r$). Repassem aquesta demostració. Si $r = 1$, aleshores $\phi(\vec{v}) = a\vec{v}$ per tot $\vec{v} \in V$ i el teorema és trivialment cert. Suposem $r > 1$ i considerem $V' := \mathrm{Im}(\phi - a)$. És evident que V' és un subespai vectorial de V invariant per ϕ i que el polinomi anul·lador de $\phi|_{V'} : V' \to V'$ és $(x-a)^{r-1}$. Definim $\vec{e}\,' := (\phi - a)(\vec{e}) \in V'$ i observem que $\eta(\vec{e}\,') = h(\vec{e}\,')$. Per tant, $\vec{e}\,'$ és també un vector d'alçada màxima i podem aplicar la hipòtesi d'inducció.

Tindrem una base de Jordan de V' amb generadors $\vec{e}\,'_1, \dots, \vec{e}\,'_k \in V'$. Aquesta base de Jordan tindrà la forma

$$\mathcal{J}' = \begin{cases} \vec{e}\,'_1, (\phi - a)(\vec{e}\,'_1), \dots, (\phi - a)^{r_1 - 1}(\vec{e}\,'_1), \\ \qquad\qquad\vdots \\ \vec{e}\,'_k, (\phi - a)(\vec{e}\,'_k), \dots, (\phi - a)^{r_k - 1}(\vec{e}\,'_k) \end{cases}$$

on $r_i = \eta(\vec{e}\,'_i)$ per $i = 1, \dots, k$. A més, si $\vec{e}\,' \neq 0$, podem aconseguir $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}\,'$. Com que aquests vectors són a $V' = \mathrm{Im}(\phi - a)$, podem trobar vectors $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \in V$ tals que $\vec{e}\,'_i = (\phi - a)(\vec{e}_i)$ per $i = 1, \dots, k$. Novament, si $\vec{e}\,' \neq 0$, podem prendre $\vec{e}_1 = \vec{e}$. Considerem ara aquests vectors:

$$(\phi - a)^{r_1 - 1}(\vec{e}\,'_1), \dots, (\phi - a)^{r_k - 1}(\vec{e}\,'_k).$$

Aquests vectors són linealment independents (formen part d'una base de V') i pertanyen a $\ker(\phi - a)$. Per tant, els podem completar amb vectors

$$\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_m$$

fins obtenir una base de $\ker(\phi - a)$. Aleshores,

$$\mathcal{J} = \begin{cases} \vec{e}_1, (\phi - a)(\vec{e}_1), \quad \dots, (\phi - a)^{r_1}(\vec{e}_1), \\ \qquad\qquad\vdots \\ \vec{e}_k, (\phi - a)(\vec{e}_k), \quad \dots, (\phi - a)^{r_k}(\vec{e}_k), \\ \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_m \end{cases}$$

és una base de Jordan de V i si $\vec{e}\,' \neq 0$ podem aconseguir $\vec{e}_1 = \vec{e}$, com volíem. Per veure que $\mathcal{J}$ és una base, observem que la quantitat de vectors que hi ha coincideix amb la dimensió de V, mentre que el fet que són linealment independents es pot comprovar fàcilment d'aquesta manera. Suposem que tenim

$$\sum_{\substack{j=1\cdots k \\ i=0\cdots r_j}} \alpha_{ij}\,(\phi - a)^i(\vec{e}_j) + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j \vec{e}_j = 0.$$

Apliquem $\phi - a$ i obtenim

$$\sum_{\substack{j=1\cdots k \\ i=0\cdots r_j - 1}} \alpha_{ij}\,(\phi - a)^i(\vec{e}\,'_j) = 0.$$

Per tant, com que $\mathcal{J}'$ és una base, tenim $\alpha_{ij} = 0$ per $i = 0, \cdots, r_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$ i la combinació lineal inicial es redueix a

$$\sum_{j=1\cdots k} \alpha_{r_j j} (\phi - a)^{r_j - 1}(\overrightarrow{e}'_j) + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j \overrightarrow{e}_j = 0.$$

Però aquests vectors són linealment independents per construcció.

Per acabar la demostració cal encara considerar el cas en que $\overrightarrow{e} \neq 0$ però $\overrightarrow{e}' = 0$. Seguim el mateix procediment anterior. En primer lloc tenim, igual que abans, la base de Jordan de V' amb generadors $\overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_k \in V'$. Aleshores, prenem antiimatges $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_k \in V$, com hem fet abans. A continuació considerem, igual que abans, els vectors

$$(\phi - a)^{r_1 - 1}(\overrightarrow{e}'_1), \ldots, (\phi - a)^{r_k - 1}(\overrightarrow{e}'_k) \in \ker(\phi - a) \cap \operatorname{Im}(\phi - a).$$

Si $\overrightarrow{e}$ fos combinació lineal d'aquests vectors, tindríem que $\overrightarrow{e} \in \operatorname{Im}(\phi - a)$ i $h(\overrightarrow{e}) = 0$. Però $\overrightarrow{e}$ és, per hipòtesi, un vector d'alçada màxima. Per tant, $\eta(\overrightarrow{e}) = h(\overrightarrow{e}) = 0$ i $\overrightarrow{e} = 0$, que no és el cas. Per tant, en la construcció anterior podem prendre $e_{k+1} = \overrightarrow{e}'$ i arribem a la conclusió que volíem.[2]

Nivell d'invariància i classificació de les afinitats

El teorema de classificació de les afinitats diu això:

> *[**TCA**] Dues afinitats $f, g : X \to X$ són similars si i només si les aplicacions lineals df, dg són similars i f i g tenen el mateix nivell d'invariància.*

D'altra banda, hem afirmat (pàgina 162):

> *[**NI**] El nivell d'invariància d'una afinitat $f : X \to X$ es pot definir d'aquestes dues maneres equivalents.*
>
> - *És la mínima dimensió d'una subvarietat de X invariant per f.*
> - *És el mínim i tal que*
>
> $$(df - 1)^i \left(\overrightarrow{Pf(P)}\right) \in \operatorname{Im}(df - 1)^{i+1}$$
>
> *per a qualsevol punt $P \in X$.*

[2]Observem que aquesta demostració és perfectament constructiva i ens permet, per exemple, fer un petit programa que trobi efectivament aquestes bases de Jordan.

En aquest apartat demostrarem aquests dos resultats. Observem que l'enter i que apareix a la segona definició del nivell d'invariància és precisament la funció h que hem considerat quan hem estudiat les bases de Jordan. Suposem, doncs, que tenim una afinitat $f : X \to X$ i fem aquestes observacions:

- L'enter i definit a la segona part de [**NI**] depèn només de f i no del punt P escollit. Diguem
$$\overline{\rho}(f) := \min\{i : (df-1)^i\big(\overrightarrow{Pf(P)}\big) \in \operatorname{Im}(df-1)^{i+1}\}.$$
Aleshores, si Q és un altre punt qualsevol, un càlcul senzill ens diu que
$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \overrightarrow{Pf(P)} + (df-1)(\overrightarrow{PQ})$$
i és clar que el valor de $\overline{\rho}(f)$ serà el mateix si el calculem a partir de P o a partir de Q.

- Els dos teoremes [**TCA**] i [**NI**] són certs quan el nivell d'invariància és zero (és a dir, quan hi ha punts fixos). En efecte, en el cas del teorema de classificació, si f i g tenen punts fixos, escollim un punt fix P de f i un punt fix Q de g i sigui ψ un isomorfisme lineal que transformi df en dg (és a dir, $\psi\, df\, \psi^{-1} = dg$). Aleshores, si prenem una afinitat h que tingui diferencial $dh = \psi$ i tal que $h(P) = Q$, és clar que $g = hfh^{-1}$ i f i g són similars.

  Pel que fa al teorema [**NI**], és clar que si f té un punt fix, aleshores $\overline{\rho}(f) = 0$. Recíprocament, si $\overline{\rho}(f) = 0$ això vol dir que si prenem un punt qualsevol P, existeix un vector $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = (df-1)(\overrightarrow{v})$ i aleshores es veu immediatament que $P - \overrightarrow{v}$ és un punt fix de f.

  Per tant, a partir d'ara podem suposar que el nivell d'invariància és > 0 i, en particular, $r := \overline{\rho}(f) > 0$.

- Existeix un punt $Q \in X$ tal que $\overrightarrow{e} := \overrightarrow{Qf(Q)}$ és un vector d'alçada màxima amb polinomi anul·lador $(x-1)^r$.

  En efecte, sigui $P \in X$ un punt qualsevol i, com que $r = \overline{\rho}(f)$, existirà un vector $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $(df-1)^r\big(\overrightarrow{Pf(P)}\big) = (df-1)^{r+1}(\overrightarrow{v})$. Prenem $Q := f(P - \overrightarrow{v})$. Aleshores, és fàcil comprovar que $\overrightarrow{Qf(Q)}$ compleix les condicions que hem dit: té anul·lador $(x-1)^r$ i té alçada màxima.

- Apliquem ara la teoria de les bases de Jordan a l'endomorfisme $df : V \to V$. El polinomi anul·lador de df el podem escriure com a un producte $(x-1)^N q(x)$ on $q(x)$ és un polinomi primer amb $(x-1)$. Aleshores, podem descompondre V com a suma directa $V = E_1 \oplus E_q$ de dos subespais invariants de manera que l'anul·lador de df sobre E_1 sigui $(x-1)^N$ i l'anul·lador de df sobre E_q sigui $q(x)$. També, podem trobar una base de Jordan de E_1 amb generadors $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_k$ de manera que $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}$.

Prenem ara el sistema de referència de X format pel punt Q i la base formada per la base de Jordan que acabem de trobar, completada amb una base qualsevol de E_q. La matriu de f en aquesta referència tindrà aquesta forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} J & 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & M & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on J és una matriu amb anul·lador $(x-1)^N$ que està en la seva forma normal de Jordan i en la qual el primer bloc de Jordan té mida $r \times r$, i M és una matriu quadrada amb polinomi anul·lador $q(x)$.

- Calculem ara la dimensió mínima d'una subvarietat invariant per f utilitzant la matriu anterior. Evidentment, la subvarietat

$$x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$$

és invariant i té dimensió r, per tant, el nivell d'invariància és $\leq r$. D'altra banda, suposem que $R + F$ és una subvarietat invariant i sigui $\overrightarrow{w} := \overrightarrow{Rf(R)}$. Tindrem que F és un subespai invariant per df i que $\overrightarrow{w} \in F$. Per tant, tots aquests vectors són a F:

$$\overrightarrow{w}, (df-1)(\overrightarrow{w}), \ldots, (df-1)^{r-1}(\overrightarrow{w}).$$

Si ara calculem la primera coordenada diferent de zero d'aquests vectors observarem que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} &= (1, *, \ldots, *) \\ (df-1)(\overrightarrow{w}) &= (0, 1, *, \ldots, *) \\ &\vdots \\ (df-1)^{r-1}(\overrightarrow{w}) &= (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots, *) \end{aligned}$$

i d'aquí deduïm que aquests vectors són linealment independents. En conseqüència, la dimensió de F és $\geq r$ i així hem vist que el nivell d'invariància de f és igual a $r = \overline{\rho}(f)$ i ja hem demostrat [**NI**].

Amb tot el que hem vist fins ara ja tenim els ingredients necessaris per a la demostració de [**TCA**]. Suposem que f i g són dues afinitats amb el mateix nivell d'invariància, que podem suposar que és > 0 perquè en el cas que hi hagi punts fixos ja hem vist abans que [**TCA**] és evident. Tindrem que $r = \overline{\rho}(f) = \overline{\rho}(g)$ i podem aplicar a g el mateix procediment que hem aplicat fins ara a f per obtenir que, en una certa referència, la matriu de g té la forma

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} J' & 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & M' & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que el primer bloc de Jordan de la matriu J' ha de tenir mida r. Com que df i dg són aplicacions lineals similars, existeix un isomorfisme lineal ψ tal que $\psi df \psi^{-1} = dg$. En particular, els polinomis anul·ladors de df i dg seran iguals i tindran la forma $(x-1)^N q(x)$ amb $q(x)$ primer amb $x-1$. Ara fem l'observació crucial que ψ transformarà $\ker(df-1)^N$ en $\ker(dg-1)^N$ i també transformarà $\ker q(df)$ en $\ker q(dg)$. És a dir, les matrius J i J' seran similars i les matrius M i M' seran similars. Però la matriu de Jordan d'un endomorfisme és única (llevat de l'ordre dels blocs) i, per tant, podem suposar $J = J'$. Tot això ens demostra que existeix una matriu

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & 0 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & U & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tal que $\mathcal{U}\mathcal{M}\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{M}'$. En conclusió: f i g són afinitats similars, com volíem demostrar. La implicació contraria —afinitats similars tenen diferencials similars i tenen el mateix nivell d'invariància— és trivial. Per tant, ja hem demostrar [**TCA**].

El grup afí

Si X és un espai afí amb espai vectorial associat V, les afinitats bijectives $V \to V$ formen un grup amb l'operació de composició. Direm que és el **grup afí** de X.

$$\mathrm{Af}(X) := \{f : X \to X : \ f \text{ afinitat bijectiva}\}.$$

Si assignem a cada afinitat la seva diferencial obtenim un homomorfisme de grups

$$d : \mathrm{Af}(X) \longrightarrow GL(V).$$

Aquest homomorfisme és clarament exhaustiu: si tenim un isomorfisme lineal ϕ i escollim un punt qualsevol $P \in X$, hi ha una afinitat bijectiva f tal que $f(P) = P$ i $df = \phi$. El nucli de d està format per les translacions de X que formen, per tant, un subgrup normal de $\mathrm{Af}(X)$ que és clarament isomorf al grup additiu de V. Podem escriure

$$GL(V) \cong \mathrm{Af}(V)/V$$

o també podem dir que tenim una *extensió de grups*

$$V \rightarrowtail \mathrm{Af}(X) \twoheadrightarrow GL(V).$$

En el llenguatge de la teoria de grups es diu que $\mathrm{Af}(X)$ és una extensió de $GL(V)$ per V. De fet, aquesta extensió pertany a un tipus especial d'extensions que s'anomenen *productes semidirectes*. Es diu que $\mathrm{Af}(X)$ és el producte semidirecte de $GL(V)$ per V amb l'acció natural de $GL(V)$ sobre V. De tota manera, aquests conceptes s'escapen del contingut d'aquest curs i no donarem més detalls.

C.7. El teorema de Witt i la classificació afí de les quàdriques

En aquest capítol donarem demostracions de les diverses versions del **teorema de Witt** que hem esmentat a la pàgina 208 i també dels aspectes que han quedat pendents de demostració a la classificació de les quàdriques afins: teorema d'extensió de similituds i relacions entre els invariants ρ, ι d'una forma quadràtica i els invariants $\rho^\infty, \iota^\infty$ de la seva restricció a l'hiperplà de l'infinit.

El teorema de Witt

Comencem estudiant algunes propietats generals dels espais quadràtics. Considerem un espai quadràtic V.

- Sigui $E \subseteq V$ un subespai **no singular**. Aleshores,

  (a) $\dim E + \dim E^\perp = \dim V$.

  (b) $V = E \perp E^\perp$.

  (c) Si $V = E \perp F$, aleshores $F = E^\perp$.

  Comprovar aquestes propietats és senzill (exercici **IV.**5).

- Sigui E un subespai qualsevol d'un espai quadràtic **no singular** V. Aleshores,

  (a) $\dim E + \dim E^\perp = \dim V$.

  (b) $E^{\perp\perp} = E$.

  (c) $E^\perp$ és no singular si i només si E és no singular.

  (d) Si E és un hiperplà, el seu radical té dimensió ≤ 1.

  Només la part (a) requereix demostració perquè les altres propietats són conseqüències directes de (a). Denotem per V^*, E^* els espais vectorials duals de V i E, respectivament. La inclusió $E \subseteq V$ dóna una aplicació lineal exhaustiva $i^* : V^* \twoheadrightarrow E^*$. Considerem l'aplicació lineal $\phi : V \to V^*$ donada per

$$\vec{v} \mapsto \{\vec{e} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{e}\}$$

que, com que V és no singular, és injectiva i, per tant, és un isomorfisme. La composició $i^*\phi : V \to E^*$ és una aplicació lineal exhaustiva amb nucli $E^\perp$. D'aquí es dedueix que $\dim V = \dim E + \dim E^\perp$.

- Si $\vec{v} \in V$ és un vector no isòtrop, el subespai $\langle \vec{v} \rangle$ és no singular i, per una propietat anterior, podem escriure

$$V = \langle \vec{v} \rangle \perp \langle \vec{v} \rangle^\perp.$$

Aleshores, inductivament, podem demostrar (exercici **IV**.6) que V admet una **base ortogonal** tal que el primer vector de la base sigui $\vec{v}$.

- Si $\vec{w} \in V$ és un vector no isòtrop, podem considerar la reflexió ortogonal d'arrel $\vec{w}$ (exercici **IV**.8)

$$\vec{e} \mapsto \vec{e} - 2\left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{e}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\right)\vec{w}.$$

Aquestes reflexions ens permeten demostrar que *hi ha prou isometries*, en aquest sentit: si tenim dos vectors $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tals que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v} \neq 0,$$

aleshores existeix una isometria $\phi : V \to V$ tal que $\phi(\vec{u}) = \vec{v}$ (exercici **IV**.9).

Demostrem ara el **teorema de Witt** de la pàgina 208:

> *Sigui V un espai quadràtic i siguin $V = E_1 \perp F_1 = E_2 \perp F_2$ dues descomposicions de V en suma ortogonal. Si E_1 i E_2 són isomètrics, aleshores F_1 i F_2 també són isomètrics.*

La demostració segueix aquests passos:

- Considerem primer el cas que E_1 (i, per tant, també E_2) és totalment isòtrop. Sigui $R_1 := F_1 \cap F_1^\perp$ i sigui F_1' un complement qualsevol de R_1 a F_1. En aquestes circumstàncies, és evident que

$$E_1 \perp R_1 = \mathrm{Rad}(V)$$
$$V = E_1 \perp R_1 \perp F_1' = \mathrm{Rad}(V) \perp F_1'$$

Fem la mateixa construcció amb E_2 per obtenir $V = E_2 \perp R_2 \perp F_2' = \mathrm{Rad}(V) \perp F_2'$. Aleshores, sigui $\phi' : F_1' \to F_2'$ la composició de la inclusió $F_1' \subseteq V$ amb la projecció $V = \mathrm{Rad}(V) \perp F_2' \to F_2'$. Es veu fàcilment que ϕ' és una isometria. Si ara completem ϕ' amb qualsevol isomorfisme $R_1 \to R_2$ (que és automàticament una isometria), obtenim la isometria $\phi : F_1 \to F_2$ que volíem.

- Hem demostrat que el teorema és cert si els subespais E_1, E_2 tenen rang zero. Procedim ara per inducció sobre el rang d'aquests espais. Suposem que tenen rang > 0 i sigui $\vec{e}_1 \in E_1$ un vector no isòtrop. Segons hem vist abans, aquest vector no isòtrop ens permet descompondre E_1 en suma ortogonal $E_1 = \langle \vec{e}_1 \rangle \perp G_1$. Sigui ara $\phi : E_1 \to E_2$ la isometria que existeix per hipòtesi i sigui $\vec{e}_2 := \phi(\vec{e}_1)$. Podem escriure, anàlogament, $E_2 = \langle \vec{e}_2 \rangle \perp G_2$ amb $G_2 = \phi(G_1)$ i, en particular, $G_1 \cong G_2$. Per una propietat que hem vist anteriorment, existeix una isometria $\psi : V \to V$ tal que $\psi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$. Tindrem

$$G_2 \perp F_2 = \langle \vec{e}_2 \rangle^{\perp} = \psi(\langle \vec{e}_1 \rangle)^{\perp} = \psi(G_1 \perp F_1) = \psi(G_1) \perp \psi(F_1).$$

  Com que $G_2 \cong G_1 \cong \psi(G_1)$ i el rang de G_2 és menor que el de E_1, podem aplicar la hipòtesi d'inducció i obtenim que $F_2 \cong \psi(F_1) \cong F_1$. Això acaba la demostració del teorema de Witt.

Hem demostrat el teorema de Witt en la versió **teorema de cancel·lació**. Demostrem ara les altres versions que hem esmentat a la nota al peu de la pàgina 208.

1. **Teorema d'extensió**. *Siguin $V_1 = E_1 \perp F_1$ i $V_2 = E_2 \perp F_2$ dos espais quadràtics isomètrics i sigui $\phi : E_1 \to E_2$ una isometria. Existeix una isometria $\widetilde{\phi} : V_1 \to V_2$ que coincideix amb ϕ sobre E_1 i tal que $\widetilde{\phi}(F_1) = F_2$.*

   Sigui $\psi : V_1 \to V_2$ la isometria que existeix per hipòtesi i apliquem el teorema de Witt a les dues descomposicions

$$V_2 = E_2 \perp F_2 = \psi(E_1) \perp \psi(F_1).$$

   Obtindrem una isometria $\eta : \psi(F_1) \to F_2$. Definim $\widetilde{\phi} := \phi \perp \eta\psi$.

2. **Teorema original de Witt**. *Si $E_1, E_2 \subseteq V$ són subespais isomètrics no singulars d'un espai quadràtic V, aleshores $E_1^{\perp}$ i $E_2^{\perp}$ també són isomètrics.*

   Trivial perquè podem escriure $V = E_1 \perp E_1^{\perp} = E_2 \perp E_2^{\perp}$.

3. **Extensió en subespais no singulars**. *Si E_1, E_2 són subespais no singulars d'un espai quadràtic V i $\phi : E_1 \cong E_2$ és una isometria, aleshores existeix una isometria $\psi : V \cong V$ tal que $\psi|_{E_1} = \phi$.*

   També és una conseqüència trivial del teorema de Witt perquè podem escriure $V = E_1 \perp E_1^{\perp} = E_2 \perp E_2^{\perp}$ i el teorema de Witt ens diu que existeix una isometria $\rho : E_1^{\perp} \to E_2^{\perp}$. Aleshores, $\psi = \phi \perp \rho$ és la isometria que volem.

4. **Extensió en un espai no singular**. *Si E_1, E_2 són subespais d'un espai quadràtic no singular V i $\phi : E_1 \cong E_2$ és una isometria, aleshores existeix una isometria $\psi : V \cong V$ tal que $\psi|_{E_1} = \phi$.*

   Si E_1, E_2 són no singulars, podem aplicar el teorema anterior. En cas contrari, tindrem descomposicions no trivials $E_i = R_i \perp F_i$, $i = 1, 2$ on els subespais

R_1, R_2 són totalment isòtrops i els subespais F_1, F_2 són no singulars, de manera que $R_1 \cong R_2$. Considerem ara el subespai $F_1^\perp$. Com que F_1 és no singular i com que V és també no singular, sabem que $F_1^\perp$ serà no singular. Per tant, R_1 és un espai totalment isòtrop contingut en un espai no singular i li podem aplicar el resultat de la pàgina 209 (vegeu també l'exercici **IV**.11): prenem una base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r$ de R_1 i completem cada vector a un pla hiperbòlic de $F_1^\perp$. Obtindrem $E_1 \subset H_1 \perp F_1$ on H_1 és una suma ortogonal de plans hiperbòlics. Fem la mateixa construcció amb E_2, però escollint com a base de R_2 els vectors $\phi(\vec{e}_1), \dots, \phi(\vec{e}_r)$. Obtindrem $E_2 \subset H_2 \perp F_2$ i clarament podem estendre ϕ a una isometria $H_1 \perp F_1 \to H_2 \perp F_2$. Però ara aquests subespais sí que ja són no singulars i, pel teorema anterior, podem estendre aquesta isometria a una isometria $\psi : V \to V$, com volíem.

Restricció d'una forma quadràtica a un hiperplà

En aquest apartat estudiarem[1] la relació que hi ha entre els invariants (rang i índex) d'una forma quadràtica i els invariants de la restricció d'aquesta forma quadràtica a un hiperplà.

Fixem, doncs, un espai quadràtic V i un hiperplà $H \subset V$. Denotarem ρ, ι el rang i l'índex de V i ρ_H, ι_H el rang i l'índex de H com a espai quadràtic amb la restricció de la forma quadràtica de V. Denotarem per $V^\perp$ el radical de V i descompondrem H com a

$$H = (H \cap H^\perp) \perp F$$

on $H \cap H^\perp$ és, evidentment, el radical de H, i F és un subespai no singular. Distingirem diversos casos:

- Si existeix $\vec{e} \in V^\perp - H$, aleshores $\vec{e}$ és un vector isòtrop i podem escriure $V = H \perp \langle \vec{e} \rangle$. En aquest cas és evident que $\rho = \rho_H$ i $\iota = \iota_H$.
- Suposem ara $V^\perp \subseteq H$. En aquest cas és clar que $V^\perp \subseteq H \cap H^\perp$. Observem que, com que F és no singular, podem escriure $V = F \perp F^\perp$ i això ens diu que existirà $\vec{e} \in F^\perp - H$. Distingim dos casos més:
  - $V^\perp = H \cap H^\perp$. En aquest cas, $\vec{e} \in H^\perp$ i podem escriure $V = H \perp \langle \vec{e} \rangle$. D'altra banda, $\vec{e}$ no pot ser isòtrop perquè estaria a $V^\perp$ i no és el cas. Per tant, $\rho = \rho_H + 1$, $\iota = \iota_H + \epsilon$ amb $\epsilon = 0, 1$.
  - $V^\perp \subsetneq H \cap H^\perp$. En aquest cas, escrivim $H \cap H^\perp = V^\perp \perp E'$ on E' és qualsevol complement de $V^\perp$ a $H \cap H^\perp$. Aleshores,
  $$H = V^\perp \perp E' \perp F, \qquad V = H \oplus \langle \vec{e} \rangle = V^\perp \perp \left[E' \perp F \oplus \langle \vec{e} \rangle \right].$$

[1] Els resultats d'aquest apartat i del següent els he après d'Agustí Reventós que els atribueix a Amparo López. Les demostracions que apareixen aquí segueixen les que hi ha al llibre *Geometria projectiva* d'Agustí Reventós.

Observem que $E' \perp F$ és un hiperplà singular de l'espai no singular $E' \perp F \oplus \langle \vec{e} \rangle$. Per una propietat que hem vist a l'inici del capítol, el radical de $E' \perp F$ té dimensió 1. Sigui $E' = \langle \vec{v} \rangle$ i observem que $\vec{e} \cdot \vec{v} \neq 0$. Per tant, $P := \langle \vec{e}, \vec{v} \rangle$ és un pla hiperbòlic. La descomposició $V = V^{\perp} \perp F \perp P$ ens diu que $\rho = \rho_H + 2$, $\iota = \iota_H + 1$

En conclusió, hem demostrat que quan restringim una forma quadràtica d'un espai V a un hiperplà H poden donar-se tres situacions.

1. $\rho = \rho_H$, $\iota = \iota_H$. Això succeeix quan $\mathrm{Rad}(V) \not\subseteq \mathrm{Rad}(H)$. En aquest cas, podem trobar una base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ de V tal que $H = \langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base té la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2. $\rho = \rho_H + 1$, $\iota = \iota_H, \iota_H + 1$. Això passa quan $\mathrm{Rad}(V) = \mathrm{Rad}(H)$. En aquest cas, podem trobar una base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ de V tal que $H = \langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base té la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_n \end{array}\right)$$

amb $a_n \neq 0$.

3. $\rho = \rho_H + 2$, $\iota = \iota_H + 1$. Això passa quan $\mathrm{Rad}(V) \subsetneq \mathrm{Rad}(H)$. En aquest cas, podem trobar una base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ de V tal que $H = \langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base té la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_1 & & & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & a_{n-2} & 0 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Extensió de similituds i classificació afí

Al capítol 30 vam dir que per classificar una quàdrica Q a l'espai afí havíem de classificar dues quàdriques projectives: la pròpia quàdrica Q (vista com a quàdrica projectiva) i la quàdrica Q^∞ que és la restricció de Q a l'hiperplà de l'infinit. Això també és així en el cas de la classificació afí de les formes quadràtiques. Per demostrar aquest teorema necessitem un «teorema d'extensió» per a similituds com el de la pàgina 218:

> *[Teorema d'extensió de similituds] Sigui V un espai quadràtic i sigui $\phi : H_1 \to H_2$ una similitud entre dos hiperplans de V. Existeix una similitud $\psi : V \to V$ tal que $\psi(H_1) = H_2$.*

Recordem que una similitud d'un espai vectorial V amb una forma quadràtica Q és un isomorfisme lineal $\phi : V \to V$ tal que existeix $\lambda \neq 0$ tal que $Q(\phi(\overrightarrow{e})) = \lambda Q(\overrightarrow{e})$ per tot vector $\overrightarrow{e} \in V$. Aquest teorema es dedueix de manera senzilla del teorema de Witt i de l'estudi que hem fet a l'apartat anterior sobre la restricció d'una forma quadràtica a un hiperplà. Estudiem ara els detalls de la demostració.

Suposem que estem en les hipòtesis de l'enunciat del teorema i tenim un espai quadràtic V, dos hiperplans H_1 i H_2 i una similitud $\phi : H_1 \to H_2$. La primera observació que fem és que les similituds conserven el rang i, per tant, els dos hiperplans H_1 i H_2 estaran en la mateixa situació de les tres situacions possibles que hem vist a l'apartat anterior. Estudiem per separat cadascun dels tres casos.

1. Els rangs de H_1 i de H_2 coincideixen amb el rang de V. En aquest cas hem vist que hi ha una base $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base és diagonal de manera que l'últim terme de la diagonal és zero. De la mateixa manera, existirà una base $\overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base és diagonal de manera que l'últim terme de la diagonal és zero. De fet, podem prendre $\overrightarrow{e}'_i = \phi(\overrightarrow{e}_i)$ per $i = 1, \ldots, n-1$. Aleshores, podem estendre ϕ a una similitud $\psi : V \to V$ simplement definint $\psi(e_n) = e'_n$.

2. Els rangs de H_1 i de H_2 són una unitat inferiors al rang de V. En aquest cas hem vist que hi ha una base $\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base és diagonal de manera que l'últim terme de la diagonal és diferent de zero, i el mateix serà cert per a H_2: existirà una base $\overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_{n-1} \rangle$ i la matriu de la forma quadràtica en aquesta base és diagonal de manera que l'últim terme de la diagonal és diferent de zero. Com abans, podem prendre $\overrightarrow{e}'_i = \phi(\overrightarrow{e}_i)$ per $i = 1, \ldots, n-1$. Les matrius respectives en aquestes bases seran

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_n \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a'_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a'_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a'_n \end{array}\right)$$

Per la definició de similitud, existirà $\lambda \neq 0$ tal que $a'_i = \lambda a_i$ per $i = 1, \dots, n{-}1$. Suposem que $a_1 = \cdots = a_r = 0$ i la resta de termes a la diagonal són diferents de zero. Ara ens cal distingir dos casos, segons que $n - r$ sigui parell o senar:

- Suposem que $n - r$ és parell. Com que les dues matrius anteriors representen la mateixa forma quadràtica, els determinants de la part no singular diferiran en un quadrat. És a dir, existirà $\alpha \neq 0$ tal que $a_n = \alpha^2 \lambda a'_n$. En aquest cas, estenem $\phi : H_1 \to H_2$ a una similitud $\psi : V \to V$ definint $\psi(\overrightarrow{e}_n) = \lambda\alpha\overrightarrow{e}'_n$. La comprovació que es tracta d'una similitud és immediata.
- Suposem que $n - r$ és senar. Si, igual que hem fet abans, comparem els dos determinants, observem que existirà $\alpha \neq 0$ tal que $a_n = \alpha^2 a'_n$ i, per tant, l'assignació $\overrightarrow{e}_n \mapsto \alpha\overrightarrow{e}'_n$ donarà una isometria
$$\rho : \langle \overrightarrow{e}_n \rangle \longrightarrow \langle \overrightarrow{e}'_n \rangle.$$
Pel teorema de Witt, aquesta isometria es pot estendre a una isometria $\psi : V \to V$ que, com que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}_n \rangle^\perp$ i $H_2 = \langle \overrightarrow{e}'_n \rangle^\perp$, és la similitud que busquem.

3. Els rangs de H_1 i de H_2 són dues unitats inferiors al rang de V. En aquest cas tenim una base $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_{n-1} \rangle$ i una base $\overrightarrow{e}'_1, \dots, \overrightarrow{e}'_n$ de V tal que $H_1 = \langle \overrightarrow{e}'_1, \dots, \overrightarrow{e}'_{n-1} \rangle$, de manera que les matrius de la forma quadràtica en aquestes bases tenen la forma
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a'_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a'_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$
A més, si repassem la demostració de l'existència d'aquestes bases veurem que podem prendre $\overrightarrow{e}'_i = \phi(\overrightarrow{e}_i)$ per $i = 1, \dots, n - 1$, amb la qual cosa tindrem $a'_i = \lambda a_i$, $i = 1, \dots, n - 1$. Aleshores, podem estendre ϕ a una similitud $\psi : V \to V$ definint $\psi(\overrightarrow{e}_n) = \lambda\overrightarrow{e}'_n$.[2]

Amb tot això ja podem demostrar, com ho hem fet a la pàgina 218, el teorema de classificació afí de les quàdriques:

[Classificació afí de les quàdriques] $Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques afins si i només si

[2]Observem que en tots els casos *menys en un* hem obtingut la similitud ψ com una *extensió* de la similitud ϕ. L'exemple de l'exercici **IV**.25 ens demostra que hi ha realment casos en els que és impossible aconseguir que ψ sigui una extensió de ϕ.

1. *$Q_1 \sim Q_2$ com a quàdriques de $P_n(k)$.*
2. *$Q_1^\infty \sim Q_2^\infty$ com a quàdriques de $H \cong P_{n-1}(k)$.*

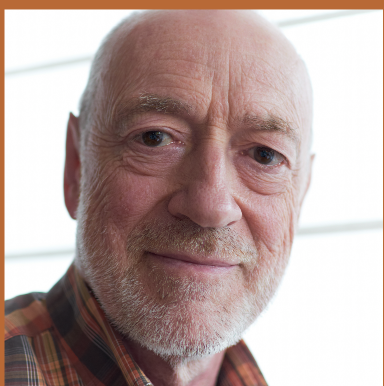
També tenim un teorema anàleg de classificació afí de les formes quadràtiques. Suposem que q_1, q_2 són polinomis de segon grau en n variables $x_1, \ldots, x_n$. Denotem $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$ les seves homogeneïtzacions, que seran polinomis homogenis de segon grau en $n+1$ variables $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, és a dir, formes quadràtiques. Aleshores:

> *[Classificació afí de les formes quadràtiques] Existeix una afinitat de k^n que transforma q_1 en q_2 si i només si*
>
> 1. *Les formes quadràtiques en $n+1$ variables $\overline{q}_1$ i $\overline{q}_2$ son equivalents.*
> 2. *Les formes quadràtiques en n variables*
>
> $$\overline{q}_1(x_1, \ldots, x_n, 0), \quad \overline{q}_1(x_1, \ldots, x_n, 0)$$
>
> *són equivalents.*

Per demostrar aquest teorema no cal utilitzar les llargues consideracions que hem vist en aquest apartat i en l'apartat anterior. En lloc del teorema d'extensió de similituds, n'hi ha prou amb utilitzar el teorema de Witt.

Índex alfabètic

FINIS
CORONAT
OPUS



Jaume Aguadé (Barcelona 1953) és professor al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, on ha dirigit el **Grup de Recerca en Topologia Algebraica de Barcelona (GTAB)**. La seva recerca s'inscriu dins de la teoria d'homotopia, amb especial atenció a les àlgebres de cohomologia i els espais classificadors dels grups de Lie. Al llarg de la seva carrera, més enllà de la docència en topologia, ha impartit cursos en àmbits molt diversos a les Facultats de Ciències, Biociències, Filosofia i Lletres, Ciències Polítiques i Sociologia i a l'Escola d'Enginyeria. Aquest llibre és el resultat de la seva experiència de trenta anys impartint cursos de geometria. Més enllà de les matemàtiques, els seus interessos inclouen la muntanya —en totes les seves facetes, de l'alpinisme a l'excursionisme passant per l'esquí de muntanya—, el ciclisme, la fotografia i l'enografia.