

Problemes clàssics de Corbes i Superfícies

Geòmetres de la UAB¹

¹A aquesta llista hi han contribuït els diversos professors que al llarg dels anys han impartit assignatures de geometria diferencial. Per exemple, E. Gallego, D. Gil, J. Girbau, G. Guasp, B. Herrera, M. LLabrés, D. Marin, M. Manjarin, M. Nicolau, A. Reventós, G. Solanes, ...

Índex

1	Corbes planes	3
1.1	Parametritzacions	3
1.2	Corbes clàssiques	4
1.3	Curvatura	15
1.4	Evolutes	21
2	Exercicis complementaris de corbes planes	32
2.1	Còniques	32
2.2	Contacte	37
3	Corbes a $\mathbb{R}^3$	46
3.1	Paràmetre arc	50
3.2	Curvatura i torsió	52
3.3	Hèlixs	62
3.4	Indicatrius	64
3.5	Darboux	66
4	Exercicis complementaris de corbes a l'espai	69
4.1	Longitud	69
4.2	Curvatura i torsió	71
4.3	Hèlixs	77
4.4	Envolupants	79
4.5	Cercle osculador	81
4.6	Esfera osculadora	84
5	Superfícies a $\mathbb{R}^3$	87
5.1	Preliminars	87
5.2	L'aplicació de Gauss	93
5.3	Primera forma fonamental	97
5.4	Segona Forma Fonamental	100
5.5	Curvatura de Gauss	102
5.6	Punts umbilicals	104
5.7	Curvatura de Gauss II	109
5.8	Línies de curvatura	113

5.9	Superfícies de revolució	120
5.10	Àrea	127
5.11	Geodèsiques	131
6	Exercicis complementaris de Superfícies	136
6.1	Pla tangent	136
6.2	Orientabilitat	137
6.3	Primera forma fonamental	139
6.4	Segona forma fonamental	142
6.5	Funcions de Morse	146
6.6	Superfícies associades a corbes de l'espai	150
6.7	Curvatura de Gauss II	154
6.8	Ombres i Contorns	157
6.9	Línies de curvatura	159
6.10	Superfícies de revolució	164
6.11	Àrea	171
6.12	Geodèsiques	181
7	Formes	189
8	Integració de formes	203
9	Calcul vectorial clàssic	212
10	Exercicis complementaris de Càlcul Vectorial	233
11	Referència mòbil	238

Capítol 1

Corbes planes

1.1 Parametritzacions

1. ¹ Trobeu una corba parametritzada $\alpha(t)$ que tingui per traça el cercle $x^2 + y^2 = 1$ i tal que $\alpha(t)$ el recorri en el sentit de les agulles del rellotge amb $\alpha(0) = (0, 1)$.

Solució: La parametrització més natural de la circumferència unitat és $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Amb aquesta parametrització la circumferència es recorre en el sentit positiu dels angles, és a dir en contra de les agulles del rellotge, començant pel punt $(1, 0)$. Si volem recórrer-la en sentit contrari només hem de invertir la direcció del paràmetre t , és a dir, posar $-t$ en lloc de t . Així, la parametrització $t \mapsto (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ comença també en el punt $(1, 0)$ però descriu la circumferència en el sentit de les agulles del rellotge.

Finalment, si volem una parametrització que comenci en un altre punt diferent del $(1, 0)$ només hem de fer una translació en el paràmetre t . Per exemple, per que $\alpha(0) = (0, 1)$ ens podem quedar amb la mateixa parametrització que ja tenim $(\cos t, -\sin t)$ però amb $t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi]$. Si ho volem reparametritzar entre 0 i 2π només hem de posar $T = t - \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi]$, i tindrem

$$\alpha(T) = (\cos(T + \frac{3\pi}{2}), -\sin(T + \frac{3\pi}{2})) = (\sin T, \cos T).$$

2. Es consideren les aplicacions $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definides per $\alpha(t) = (\cos 2t, \cos t)$ i $\beta(t) = (\sin 2t, \cos t)$. Decidiu si són corbes regulars (derivada mai nul·la).

Solució: $\alpha'(t) = (-2\sin 2t, -\sin t)$, que s'anul·la en $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, per tant no és regular. Sí que ho seria si la considerem restringida a l'interval $(0, \pi)$. Es pot pensar com una manera no gaire adequada de parametritzar la paràbola $x = 2y^2 - 1$ (un tros).

$\beta'(t) = (2\cos 2t, -\sin t)$. La segona component s'anul·la en els punts $t = k\pi$, però en aquest punts no s'anul·la la primera. La primera component s'anul·la en els punts $t = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, però en aquests punts no s'anul·la la segona. Per tant $\beta'(t)$ no s'anul·la mai i la corba és regular.

¹Els problemes 6, 7, 8, 15, 17, 18, 19, 154, 155, 156, 157, 158, 189, 193, 206, 216, 217, 220, que estan marcats amb un asterisc, es treballaran a les sessions de Seminaris.

3. Donada la corba parametritzada $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$

- a) Determineu si els punts $(-1, -1)$, $(4, 2)$ i $(1, 2)$ estan sobre la seva traça.
- b) Trobeu els punts d'intersecció amb els eixos coordenats.
- c) Trobeu una equació que defineixi el conjunt imatge.

Solució: En primer lloc, observem que $\alpha(t) = (t(t^2 - 2), t^2 - 2)$.

- (a) $(-1, -1)$ pertany a la imatge de α . En efecte, les equacions $t^2 - 2 = -1$ i $t(-1) = -1$ tenen per solució el paràmetre $t = 1$, és a dir, $\alpha(1) = (-1, -1)$. De la mateixa manera $\alpha(2) = (4, 2)$. En canvi, el punt $(1, 2) \notin \text{Im } \alpha$ ja que el sistema de equacions $t^2 - 2 = 2$ i $t \cdot 2 = 1$ no té solució.
- (b) La intersecció de la imatge de α amb l'eix de les x ($y = 0$) ve donada pels paràmetres t que fan que $t^2 - 2 = 0$, és a dir, per $t = \pm\sqrt{2}$, i $\alpha(\pm\sqrt{2}) = (0, 0)$. D'altra banda, la intersecció amb l'eix de les y ($x = 0$) s'obté al resoldre $t(t^2 - 2) = 0$ i consisteix per tant en l'origen: $\alpha(\pm\sqrt{2}) = (0, 0)$ i en $\alpha(0) = (0, -2)$.
- (c) Tenim que $\frac{x(t)}{y(t)} = t$, d'on $\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 = y(t)$. De manera que la imatge està continguda en el conjunt $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 2y^2 - y^3 = 0\}$. D'altra banda, tot punt (x, y) de C compleix automàticament que $y \geq -2$, de manera que podem prendre $t = \sqrt{y+2}$ i tenim $\alpha(t) = (x, y)$, i.e. la imatge de α no només està continguda a C si no que és igual a C .

1.2 Corbes clàssiques

4. **Tractriu.** Parametritzeu la corba anomenada *tractriu*, caracteritzada geomètricament pel fet següent: per a tot punt P de la corba la distància de P a Q és constant igual a 1, on Q és la intersecció de la recta tangent a la corba en P amb l'eix de les x . Es diu que és el camí que un gos, lligat a una corda i per la que arrossega cap al nord, es veu obligat a fer quan l'amo es passeja cap a l'est. Calculeu també el paràmetre arc de la *tractriu*.

Indicació: Plantejeu l'equació que ha de verificar $y = y(x)$. Aïlleu x en funció de y resolent la integral $\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy$. Per a això es pot fer el canvi $y = \tan \frac{t}{2}$ o bé $y = \frac{1}{\cosh t}$ i utilitzar que $\int \tanh^2 t \, dt = t - \tanh t + C$.

Solució: Suposem primer que la corba ve donada per $(x, y(x))$. La seva recta tangent en un punt $P = (x_0, y_0)$ on $y_0 = y(x_0)$ és $(x - x_0)y'(x_0) = y - y_0$. Fent $y = 0$ obtenim que el punt Q és $(\frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)}, 0)$. Imposant ara $d^2(P, Q) = 1$ obtenim

$$y'(x_0)^2 \frac{1 - y(x_0)^2}{y(x_0)^2} = 1$$

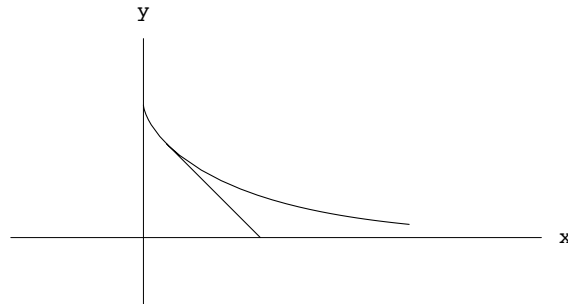


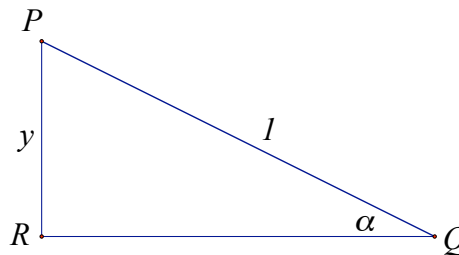
Figura 1.1: Tractriu

i per tant l'equació diferencial que verifica $y(x)$ és

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

on l'elecció del signe es pot deduir d'un dibuix aproximat de la tractriu.

De fet, aquesta equació es veu directament mirant el triangle P, Q, R , on R és la projecció de P sobre l'eix de les x 's.



$$y' = -\tan \alpha = -\frac{RP}{RQ} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Resolem aquesta equació diferencial pel mètode de separació de variables. És a dir, integrem els dos termes de

$$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = dx.$$

Per fer la integral de l'esquerra utilitzem el canvi de variable $y = \frac{1}{\cosh(t)}$, $dy = -\frac{\tanh(t)}{\cosh(t)} dt$. Aleshores

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = \int \tanh^2(t) dt = t - \tanh(t) + C = \operatorname{argcosh} \frac{1}{y} - \sqrt{1-y^2} = x + C.$$

Com que passa pel punt $(0, 1)$ ha de ser $C = 0$.

Tenim doncs una primera parametrització de la tractriu en funció de l'altura y :

$$x(y) = \operatorname{argcosh} \frac{1}{y} - \sqrt{1 - y^2}$$

Aprofitant els càlculs anteriors també podem parametritzar la tractriu com

$$\gamma(t) = \left(t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$

Un altre canvi de variable que podríem haver utilitzat a la integral anterior és $y = \sin(t)$, amb $t \in [0, \pi/2]$. Aleshores

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = \int \sin(t) - \frac{1}{\sin(t)} dt = -\cos(t) - \int \frac{1}{\sin(t)} dt = x + C,$$

amb $C = 0$ pel mateix motiu d'abans. Per resoldre la segona integral prenem $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Recordem que aleshores

$$t = \arctan(s), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+s^2}, \quad \sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}, \quad \cos(t) = \frac{1-s^2}{1+s^2}.$$

Obtenim $x = -\cos(t) - \ln(\tan(t/2))$, de manera que obtenim la següent parametrització clàssica de la tractriu:

$$\gamma(t) = (-\cos(t) - \ln(\tan(t/2)), \sin(t))$$

(per $t = \pi/2$ passa pel punt $(0, 1)$).

Si volem començar en el punt $(0, 1)$ i acabar a $(\infty, 0)$ posem $T = -t + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi/2]$, i si abans t variava de $\frac{\pi}{2}$ fins a 0 ara T varia de 0 fins a $\pi/2$.

Canviant t per T obtenim una altra parametrització de la tractriu, amb $\gamma(0) = (0, 1)$.

$$\gamma(T) = \left(-\sin(T) - \ln\left(\frac{1-\tan(T/2)}{1+\tan(T/2)}\right), \cos(T) \right)$$

Paràmetre arc. Tenim

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\frac{\sin^2(T)}{\cos(T)}, -\sin(T) \right), \\ \|\gamma'(t)\| &= \left| \frac{\sin(T)}{\cos(T)} \right| \end{aligned}$$

Aleshores el paràmetre arc, contat a partir del punt $(0, 1)$, és

$$s(T) = \int_0^T \frac{\sin(s)}{\cos(s)} ds = -\ln(\cos(T)) = \ln \frac{1}{\cos T}.$$

Si suposem que tenim una parametrització del tipus $\gamma(x) = (x, y(x))$ (que no hem sabut trobar) tindriem (denotant $s(x)$ la longitud de la tractriu entre $(0, 1)$ i $(x, y(x))$)

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{y(x)^2}{1 - y(x)^2}} dx = - \int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln \frac{1}{y(x)}.$$

Això vol dir que l'expressió de la tractriu respecte del paràmetre arc s és

$$\gamma(s) = (\operatorname{argcosh} e^s - \sqrt{1 - e^{-2s}}, e^{-s})$$

Observem que les dues expressions que acabem de trobar per al paràmetre arc, $s(T)$ i $s(x)$, diuen el mateix: la longitud d'arc és el logaritme neperià de l'invers de la segona component.

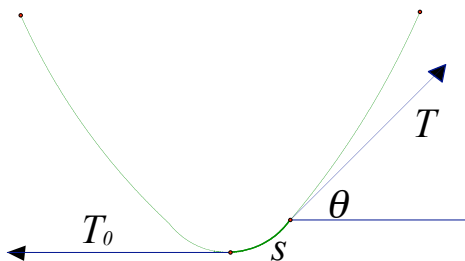
5. Catenària. La corba plana donada per la gràfica de la funció $y = \cosh x$ s'anomena *catenària*. Parametritzeu-la per l'arc.

Solució: La parametrització de la catenària és $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$. Per tant $\alpha'(t) = (1, \sinh(t))$ i $\|\alpha'(t)\| = \cosh(t)$. Per tant el paràmetre arc és $s(t) = \sinh(t)$. Pel teorema de la funció inversa també tenim $t(s) = \operatorname{argsinh}(s) = \ln(s + \sqrt{1 + s^2})$.

En particular, la catenària en paràmetre arc està dona per

$$\gamma(s) = (\operatorname{argsinh} s, \sqrt{1 + s^2})$$

Nota: Suposem una cadena amb extrems en els punts $(-a, b)$ i (a, b) , $a > 0$, que penja sota l'acció de la gravetat. Considerem un petit tros de cadena de longitud s comptat a partir del punt més baix de la cadena i cap a la dreta. El pes d'aquest tros és "massa $\times$ gravetat". Suposem densitat 1 per no arrossegar constants, de manera que la massa és essencialment la longitud. Llavors el pes és gs , o vectorialment $\vec{F} = (0, -gs)$.



Aquesta força està compensada per les forces que actuen tangencialment en els extrems del nostre segment de cadena. Concretament per la força $T_0 = (-T_0, 0)$, amb $T_0 > 0$, que fa el cable en el punt més baix i per la força $T = (T \cos \theta, T \sin \theta)$, tangent al cable en el punt més alt del nostre segment de longitud s . L'angle θ és doncs l'angle que forma la tangent a la cadena en aquest punt. La condició d'equilibri es doncs

$$\begin{aligned} T_0 &= T \cos \theta, \\ gs &= T \sin \theta. \end{aligned}$$

Dividint tenim

$$\tan \theta = \frac{gs}{T_0}.$$

Però $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ en el punt extrem superior del segment de corda que estem considerant. De manera que tenim

$$\frac{dy}{dx} = \lambda s, \quad \text{amb } \lambda = \frac{g}{T_0}.$$

Aquesta és l'equació diferencial de la catenària².

Pensant $s = s(x)$ i derivant, tenim

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda \frac{ds}{dx} = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

la darrera igualtat per definició de paràmetre arc.

Equivalentment, posant $v(x) = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx} = \lambda \sqrt{1 + v^2}$$

Aquesta equació diferencial de primer ordre és trivial i ens dóna

$$\operatorname{argsinh}(v) = \lambda x + C.$$

Com que $v(0) = 0$ (en el mínim la tangent és horitzontal) tenim

$$v(x) = \sinh(\lambda x),$$

²Considerem el tros de corda o cadena que penja entre els punts $(-a, b)$ i (a, b) però ens fixem només en el tros que està entre els punts $(0, c)$ i $(x, y(x))$. Suposem que aquest tros té longitud s . La massa serà doncs proporcional a aquesta longitud, posarem $M = \rho s$, on ρ és una constant (la densitat). Ara substituïm aquest tros de corda per un objecte ideal format per $N + 1$ boles, totes elles de la mateixa massa m_N , unides entre si per un cable rígid de massa negligible i longitud δ_N de manera que $N \cdot \delta_N = s$, i $(N + 1)m_N = M$.

Sobre cada bola B_i actuen tres forces: el pes $m_N g$, la tensió del fil per la dreia T_{i+1} , i la tensió del fil per l'esquerra T_i . Denotem $T_i = |\vec{T}_i|$ i θ_i l'angle que forma T_i amb l'horitzontal. Totes aquestes quantitats depenen de N però no poso més subíndexs per no recarregar més la notació. La condició d'equilibri (suma de forces igual a zero) s'escriu com

$$\begin{aligned} T_{i+1} \cos \theta_{i+1} &= T_i \cos \theta_i \\ T_{i+1} \sin \theta_{i+1} - T_i \sin \theta_i &= m_N g \end{aligned}$$

Diem T al valor $T_i \cos \theta_i$, que hem vist que no depèn de i , és a dir $T = T_i \cos \theta_i$, i sumem, des de $i = 0$ fins a $i = N - 1$ la segona igualtat. Els termes successius es van cancel·lant (suma telescòpica) i queda només el primer i l'últim:

$$T_N \sin \theta_N - T_0 \sin \theta_0 = N m_N g = (M - m_N)g = s \rho g - m_N g.$$

Si la bola B_0 ocupa el punt més baix de la cadena, com en el dibuix anterior, $\theta_0 = 0$, i l'anterior expressió, dividida per T , és

$$\tan \theta_N = s \frac{\rho g}{T} - \frac{m_N g}{T}.$$

Si ara prenem límits quan $N \rightarrow \infty$, i recordant que la bola B_N està en el punt de coordenades (x, y) , obtenim ($\lim_{\infty} m_N = 0$)

$$y'(x) = \lambda s(x),$$

on λ és una constant, que és l'equació diferencial de la catenària.

que integrant ens dóna

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda x) + C_1$$

i tenint en compte la condició inicial trobem C_1 i tenim

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda x) + b - \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda a.$$

Si $\lambda = 1$ i $b = \cosh a$ estem en la situació estudiada en el problema.

6. * **Bruixa d'Agnesi.**³ Trobeu una parametrització de la *Bruixa d'Agnesi*. Aquesta corba està descrita així: Sigui r, s dues rectes paral·leles i C un cercle tangent a les dues en punt O i O' respectivament. Sigui l una recta variable per O , i posem $B = l \cap C$, $A = l \cap s$. Els punts de la Bruixa s'obtenen tallant la paral·lela a r per B amb la perpendicular a r per A .

Solució:

7. * **Trocoide.** Trobeu una parametrització de la *trocoide*: corba caracteritzada per ser l'òrbita d'un punt P situat a una distància a del centre d'una circumferència de radi b quan aquesta roda sense lliscament sobre una recta fixada:

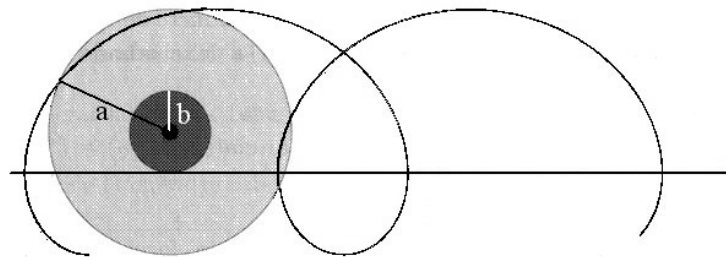


Figura 1.2: Trocoide amb $a > b$

En el cas $a = b$ s'anomena *cicloide*. Calculeu el paràmetre arc de la *cicloide* amb $a = 1$.

Solució: Comencem buscant una parametrització de la trocoide. La parametrització del centre de la circumferència és $t \mapsto (bt, b)$. Naturalment el factor que multiplica la t no és necessari però ens simplificarà els casos següents, el motiu és que d'aquesta forma t representa l'angle de gir de la circumferència (recordem que la longitud de la circumferència és $2\pi r$). Aleshores un punt P

³Maria Gaetana Agnesi (Milà 1718-1799). La paraula bruixa és de fet una mala traducció del terme italià *versiera*, que pot significar o bé 'corba' o bé 'bruixa'. De fet sembla que *versiera* és un terme naval que significa una corda que fa girar la vela. I *avversiera* vol dir diablesa. Es va passar a l'anglès com *witch*, bruixa.

situat a distància a del centre i fixat a aquest per mitjà d'un radi té una posició relativa al centre donada per $t \mapsto (-a\cos(t), a\sin(t))$. Així doncs la parametrització demanada és

$$\alpha(t) = (bt - a\cos(t), b + a\sin(t))$$

suposant que per $t = 0$ l'angle de l'eix del punt P és π . Per $a = b = 1$ tenim $\alpha(t) = (t - \cos(t), 1 + \sin(t))$.

Paràmetre arc. Com que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1 + \sin(t), \cos(t)) \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{2(1 + \sin(t))},\end{aligned}$$

el paràmetre arc és

$$s(t) = \int_{-\pi/2}^t \sqrt{2(1 + \sin(x))} dx.$$

Fent el canvi de variable $y = x + \pi/2$, tenim $\sin(x) = \cos(y)$, i per tant

$$s(t) = \int_0^{t+\pi/2} 2 \cos\left(\frac{y}{2}\right) dy = 4 \sin\left(\frac{y}{2}\right) \Big|_0^{t+\pi/2} = 4 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

8. * Cicloide com isocrona. A *Moby Dick* de Herman Melville (1851) trobem la següent cita:

Quan no s'utilitzen, aquestes calderes es conserven considerablement netes. A vegades les poleixen amb sabó de sastre i sorra fins que brillen per dins com ponxeres de plata. Durant les guàrdies nocturnes, alguns vells mariners cíncics s'hi entaforen, s'hi ajoquen i fan una becadeta. Quan els mariners es dediquen a polir-les -un home a cada caldera, tocar a tocar- es passen moltes comunicacions confidencials per damunt els llavis de ferro. També és un lloc adient per a profundes meditacions matemàtiques. Fou dins la caldera de mà esquerra del Pequod, amb el sabó de sastre que m'envoltava per totes bandes, que per primera vegada em va impressionar el fet remarcable que, en geometria, tots els cossos que llisquen al llarg de la corba cicloide, el meu sabó de sastre per exemple, baixen en el mateix espai de temps des de qualsevol punt.

(La destil·leria, *Moby Dick*)

Anem a verificar aquesta propietat de la qual ens parlen en forma de problema. S'anomena cicloide invertida una cicloide en la qual s'han canviat de signe les coordenades y dels punts de la corba. Volem comprovar que en una cicloide invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

- (a) Comproveu que la cicloide invertida (de paràmetre $a = 1$) està donada per $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t - 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dibuixeu-la i comproveu que el punt més baix correspon al paràmetre $t = \pi$. Verificarem a continuació que en una *cicloide* invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat (en particular, amb velocitat inicial nul·la) sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

Per a això fem els següents passos:

- (b) Suposem que un cos llisca (velocitat inicial zero i sense fregament) sobre la cicloide des del punt $\gamma(\alpha)$ fins al punt $\gamma(\theta)$. Calculeu la velocitat $v(\theta)$ amb que arriba aquest cos al punt $\gamma(\theta)$.

(Indicació: Recordeu la llei de conservació de l'energia i les expressions de l'energia potencial i cinètica, $E_p = mgh$ i $E_c = mv^2/2$ respectivament).

- (c) Calculeu la distància recorreguda entre $\gamma(\alpha)$ i $\gamma(\theta)$.

- (d) Sigui $t(\theta)$ la reparametrització pel temps corresponent al moviment físic d'un cos que llisca sense fregament per la *cicloide* amb $t(\alpha) = 0$. És a dir, $t(\theta)$ és el temps transcorregut per anar de $\gamma(\alpha)$ a $\gamma(\theta)$. Calculeu $t(\pi)$ (temps d'arribada al punt més baix) i comproveu que no depèn de α .

Indicació: Utilitzeu l'equació diferencial

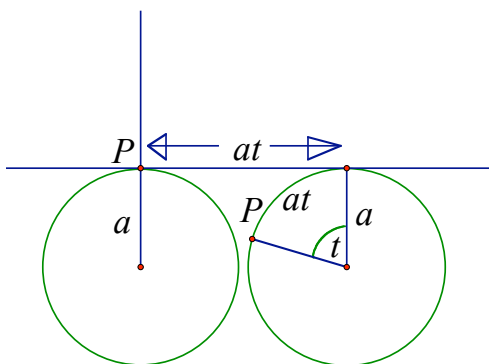
$$\frac{ds(\theta(t))}{dt} = \frac{ds(\theta)}{d\theta} \theta'(t) = v(\theta)$$

d'on es dedueix

$$t(\pi) = \int_0^{t(\pi)} v(\theta)^{-1} \frac{ds(\theta)}{d\theta} \theta'(t) dt = \int_\alpha^\pi v(\theta)^{-1} \frac{ds(\theta)}{d\theta} d\theta$$

La *cicloide* també verifica que és la *braquistocrona*, és a dir, la corba al llarg de la qual una partícula llisca sota l'acció de la gravetat i sense fregament en un temps mínim d'un punt A a un punt B situats en verticals diferents (vegeu *Aventuras Matemáticas*, Miguel de Guzmán, Ed. Labor 1988).

Solució: a) Tal com es veu directament a la figura



la cicloide invertida està parametritzada per

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a \cos t - a \end{aligned}$$

b) Si prenem les altures a partir de $\gamma(\theta)$ i iguaem en els punts $\gamma(\alpha)$ i $\gamma(\theta)$ la suma de les energies cinètica i potencial tenim $mgh = mv^2/2$, és a dir $v(\theta) = \sqrt{2gh}$.

Com h és la distància vertical entre els dos punts, $h = (a \cos \alpha - a) - (a \cos \theta - a) = a(\cos \alpha - \cos \theta)$. Així que $v(\theta) = \sqrt{2ga(\cos \alpha - \cos \theta)}$.

c) La distància recorreguda pel cos entre els dos punts (suposem α fixat i ens movem fins a θ) és

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{a^2 + a^2 \cos^2 t - 2a^2 \cos t + a^2 \sin^2 t} dt = \int_{\alpha}^{\theta} a \sqrt{2 - 2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\theta} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \cos \frac{\alpha}{2} - 4a \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

d) La derivada de l'espai recorregut respecte el temps dóna la velocitat:

$$\frac{ds(\theta(t))}{dt} = 2a \sin \frac{\theta(t)}{2} \theta'(t) = v(\theta(t)) = \sqrt{2ga(\cos \alpha - \cos \theta(t))}$$

Fent servir que $\cos \beta = \frac{1 + \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2}$ podem posar $\cos \alpha - \cos \theta(t) = 2(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta(t)}{2})$, llavors l'equació diferencial anterior que descriu $\theta(t)$ es converteix en

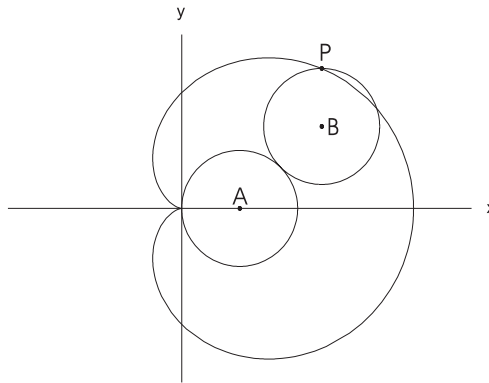
$$2a \sin \frac{\theta(t)}{2} \theta'(t) = 2\sqrt{ga} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta(t)}{2}} \Rightarrow \frac{2a \sin \frac{\theta(t)}{2}}{2\sqrt{ga} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta(t)}{2}}} \theta'(t) = 1$$

Per tant, integrant respecte t , s'obté que el temps que tarda el cos en baixar des de la posició $\gamma(\alpha)$ fins al punt més baix $\gamma(\pi)$ és

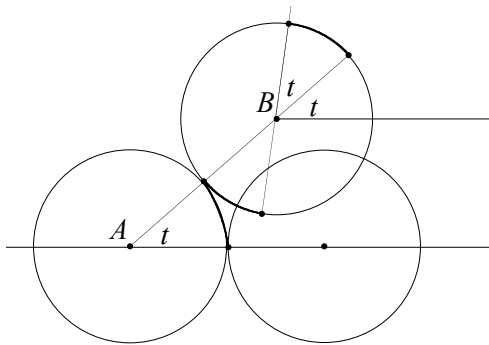
$$\begin{aligned} t(\pi) &= \int_0^{t(\pi)} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\sin \frac{\theta(t)}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta(t)}{2}}} \theta'(t) dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta = \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\cos \frac{\alpha}{2}}^0 \frac{-2}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - u^2}} du = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\cos \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)^2}} \frac{du}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

Com es veu, el temps de caiguda només depèn del radi de la circumferència que defineix la cicloide i no depèn de la posició inicial del cos.

- 9. Cardioide.** Trobeu una parametrització de la *cardioide*, corba caracteritzada per ser el lloc geomètric de l'òrbita d'un punt P d'una circumferència de radi a a mesura que gira sense lliscament sobre una altra circumferència fixada de radi a .



Solució: El centre B de la circumferència exterior que gira ve parametritzat per l'expressió $\gamma(t) = (a + 2a \cos(t), 2a \sin(t))$, suposant un sentit de gir antihorari, on t és l'angle entre la recta AB i l'eix de les x 's. Ara cal parametritzar el gir del punt P respecte a B . El que cal observar és (mireu els tres arcs de cercle més gruixuts de la figura) que l'angle que forma la recta PB amb l'eix de les x 's és el doble de t , per tant el moviment ve parametritzat, respecte d'uns eixos traslladats paral·lelament al nou origen B , per $\beta(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t))$.



Així doncs, la parametrització de la cardioide és

$$\alpha(t) = (a + 2a \cos(t) + a \cos(2t), 2a \sin(t) + a \sin(2t)) = a(1 + 2e^{it} + e^{it}).$$

Equivalentment

$$\alpha(t) = (2a \cos t(1 + \cos t), 2a \sin t(1 + \cos t)).$$

La distància d'aquest punt a l'origen és

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = 2a(1 + \cos t).$$

- 10. Hipocicloide.** Parametritzeu la hipocicloide, és a dir, la corba descrita per un punt d'un cercle que gira sense lliscar a l'interior d'un cercle més gran.

Solució:

- 11.** Parametritzeu les corbes de $\mathbb{R}^2$ definides implícitament per

- a) $4x^2 + y^2 = 1$.
 b) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (**Astroide**, Hipocicloide de 4 punxes).
 c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. (**Folium de Descartes**)
 d) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. (**Lemniscata de Bernouilli**)

Solució: a) $x(t) = \frac{1}{2} \cos t$; $y(t) = \sin t$.

b) $x(t) = \cos^3 t$; $y(t) = \sin^3 t$.

c) $x^3 + y^3 - 3axy = (x + y)^3 - 3xy(a + x + y)$. Això suggereix agafar

$$\begin{aligned} t &= x + y \\ s &= xy \end{aligned}$$

de manera que l'equació del Folium és

$$t^3 - 3s(a + t) = 0,$$

o, equivalentment

$$s = \frac{t^3}{3(a + t)}.$$

Resolent els sistema anterior podem escriure t i s en funció de x, y . Concretament

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4s}}{2}.$$

Substituint en aquesta expressió s pel seu valor en funció de t que acabem d'obtenir, tenim

$$x(t) = \frac{t}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{3a - t}{3a + 3t}} \right).$$

Com que $y = t - x$, obtenim fàcilment

$$y(t) = \frac{2t^2}{\sqrt{3a + 3t}(\sqrt{3a + 3t} \pm \sqrt{3a - t})}.$$

d) Passant a polars obtenim directament

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2t,$$

és a dir

$$r(t) = a\sqrt{\cos 2t}.$$

1.3 Curvatura

12. Recordem que per una corba plana $\gamma(s)$, la definició de curvatura és amb signe de tal manera que $T(s)$, $N(s)$ sigui una base ortonormal directa.

- a) Sigui $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable i siguin $s_0, s_1, s_2 \in I$. Si posem $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(u)du$, comproveu que tota corba $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb curvatura aquesta funció donada $k(s)$, es pot escriure, respecte d'una certa referència ortonormal, de la forma

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_1}^s \cos \theta(u)du, \int_{s_2}^s \sin \theta(u)du \right).$$

- b) Observeu que un canvi en les constants s_0, s_1, s_2 indueix un moviment rígid (rotació més translació) en la imatge.
- c) Deduiu que tota corba plana de curvatura constant no nul·la és una circumferència.
- d) Sigui $\gamma : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = k(s)$. Demostreu que la traça de γ és simètrica respecte de la recta normal de γ en $\gamma(0)$.
- e) Sigui $\alpha : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = -k(s)$. Demostreu que la traça de α és simètrica respecte del punt $\alpha(0)$.

Solució:

- (a) Abans de començar observem que $\theta(s_0) = 0$ i que $\theta'(s) = k(s)$. Observem també que si podem escriure γ com s'indica a l'enunciat, llavors tindriem $\gamma(s_1) = (0, -)$, $\gamma(s_2) = (-, 0)$, i $\gamma'(s_0) = (\cos \theta(s_0), \sin \theta(s_0)) = (1, 0)$.

Sigui $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ una corba amb curvatura $k(s)$. Suposem que s és paràmetre arc. Siguin $A = \gamma(s_1)$ i $B = \gamma(s_2)$. Considerem uns nous eixos ortogonals de coordenades, que tinguin l'origen en $\gamma(s_0)$ i eix de les x 's en la direcció $\gamma'(s_0)$. A continuació els traslladem paral·lelament de manera que A estigui sobre el nou eix de les y 's i B sobre el nou eix de les x 's.

Llavors, respecte dels nous eixos, tenim: $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ amb $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, de manera que el vector normal és $N(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Denotant $\alpha(s)$ l'angle entre $\gamma'(s)$ i $\gamma'(s_0)$ tenim $\gamma'(s) \cdot (1, 0) = x'(s) = \cos \alpha(s)$ i per tant $x''(s) = -\alpha'(s) \sin \alpha(s)$. Com $\gamma''(s) = k(s)n(\vec{s})$ tenim $x''(s) = -k(s)y'(s) = -k(s) \sin \alpha(s)$, i per tant $k(s) = \alpha'(s)$. Per tant, $\alpha'(s) = \theta'(s)$, i com $\alpha(s_0) = \theta(s_0) = 0$, ha de ser $\theta(s) = \alpha(s)$.

Llavors tenim

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \left(\int_{s_1}^s x'(u)du, \int_{s_2}^s y'(u)du \right)$$

ja que $x(s_1) = y(s_2) = 0$. Per tant

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_1}^s x'(u)du, \int_{s_2}^s y'(u)du \right) = \left(\int_{s_1}^s \cos \alpha(u)du, \int_{s_2}^s \sin \alpha(u)du \right),$$

i com $\alpha(u) = \theta(u)$ hem acabat.

- (b) Ça c'est tout à fait évident. En efecte, canviar s_0 vol dir canviar la direcció de l'eix de les $x's$, és a dir, fer una rotació. Aquests eixos després s'han de traslladar per tal de que passin per $A = \gamma(s_1)$ i $B = \gamma(s_2)$, punts que depene, com es veu, de s_1 i s_2 .
- (c) Si $k(s)$ és constant, tenim $\theta(s) = k(s - s_0)$ amb k el valor constant de la curvatura.

En particular

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_1}^s \cos k(u - s_0) du, \int_{s_2}^s \sin k(u - s_0) du \right)$$

Integrant tenim

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{k} \sin k(s - s_0) + a \\ y(s) &= -\frac{1}{k} \cos k(s - s_0) + b \end{aligned}$$

per a certes constants $a, b \in \mathbb{R}$.

Per tant la corba està continguda a la circumferència

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2.$$

- (d) Fent un gir i una translació podem suposar que $\alpha(0) = (0, 0)$ i $\alpha'(0) = (1, 0)$, de manera que la recta normal per $\alpha(0)$ és l'eix de les y . Equival a agafar $s_0 = s_1 = s_2 = 0$. Calculem en primer lloc $\theta(-s)$ utilitzant que $k(-u) = k(u)$.

$$\theta(-s) = \int_0^{-s} k(u) du = - \int_{-s}^0 k(u) du = - \int_{-s}^0 k(-u) du$$

fent el canvi de variable $w = -u$ tenim

$$\theta(-s) = - \int_{-s}^0 k(-u) du = \int_s^0 k(w) dw = - \int_0^s k(w) dw = -\theta(s)$$

I posem ara

$$\begin{aligned} x(-s) &= \int_0^{-s} \cos \theta(u) du = \int_0^{-s} \cos(-\theta(-u)) du \\ &= \int_0^{-s} \cos(\theta(-u)) du = - \int_0^s \cos(\theta(w)) dw = -x(s), \quad (w = -u) \\ y(-s) &= \int_0^{-s} \sin \theta(u) du = \int_0^{-s} \sin(-\theta(-u)) du \\ &= - \int_0^{-s} \sin(\theta(-u)) du = \int_0^s \sin(\theta(w)) dw = y(s), \quad (w = -u) \end{aligned}$$

Per tant, α és simètrica respecte de l'eix de les y .

- (e) De la mateixa manera es veu que si $k(-s) = -k(s)$ aleshores $\theta(-s) = \theta(s)$ i per tant, $x(-s) = -x(s)$ i $y(-s) = -y(s)$, de manera que α és llavors simètrica respecte de l'origen $(0, 0) = \alpha(0)$.

13. Trobeu una parametrització regular de la corba plana C que té curvatura

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

essent s un paràmetre arc de C tal que per a $s = 0$ es té que C passa pel punt $(0, 0)$ amb tangent horitzontal. Podríeu dir de quin tipus de corba es tracta? (podeu utilitzar que $\int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \operatorname{arcsinh}(s) + c$).

Solució: Busquem una corba $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$, amb curvatura $k(s) = 1/(1+s^2)$. Utilitzarem el problema **12** amb $s_0 = s_1 = s_2 = 0$. Prenem

$$\theta(s) = \int_0^s k(s) ds = \arctan s,$$

i sabem directament que la corba és

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\arctan u) du, \int_0^s \sin(\arctan u) du \right) = (\operatorname{argsinh} s, \sqrt{1+s^2} - 1).$$

És doncs la catenària, concretament la estudiada en el problema **5** traslladada segons el vector $(0, -1)$.

14. Coordenades polars. Diem que una corba plana ve donada *en polars* quan la expressem de la següent manera:

$$\gamma(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$$

on $r(t)$ i $\theta(t)$ són respectivament les expressions, en funció del paràmetre t , de la distància a l'origen de coordenades (pol) i de l'angle que forma el vector $\gamma(t)$ amb l'eix de les x (origen d'angles). De vegades es pren l'angle θ com a paràmetre i l'expressió en polars ve donada per la funció $r = r(\theta)$.

- Trobeu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ centrada a l'origen.
- Trobeu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ i centre $(R, 0)$.
- Prenem l'angle $\theta \in [a, b]$ com a paràmetre. Demostreu que la longitud L de la corba $r = r(\theta)$ està donada per

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta.$$

d) Demostreu que la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ està donada per

$$k(\theta) = \frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}.$$

e) Proveu que si la funció $r(\theta)$ té un màxim en $\theta = \theta_0$, aleshores la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ en el punt $\theta = \theta_0$ és més gran o igual que $\frac{1}{r(\theta_0)}$.

f) Feu una representació gràfica aproximada de la corba definida per $r(\theta) = 1 - \sin \theta$.

Solució:

(a) $r(t) = r$ i $\theta(t) = t$.

(b) L'equació d'aquesta circumferència és $(x - R)^2 + y^2 = R^2$. Desenvolupem $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ i fem la substitució $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ i obtenim que $r^2 - 2Rr \cos \theta = 0$, d'on $r(r - 2R \cos \theta) = 0$. Com que r no pot ser idènticament zero, tenim que $r(\theta) = 2R \cos \theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

(c) Si posem $\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ tenim

$$\gamma'(\theta) = (r' \cos \theta - r \sin \theta, r' \sin \theta + r \cos \theta)$$

on $r' = \frac{dr}{d\theta}$. Així

$$|\gamma'(s)| = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

i per tant

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

Nota: Observem que si denotem per $s = s(\theta)$ el paràmetre arc (és a dir, $s(\theta)$ és la longitud entre un valor fixat a i θ) llavors

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

(d) Si $r = r(\theta)$, la corba en cartesianes és $\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$. La curvatura d'una corba plana $\gamma(t)$ que no està parametritzada per l'arc es calcula amb la fórmula⁴

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}.$$

En efecte, $\gamma' = vT$ i $\gamma'' = v'T + vT' = v'T + v^2kN$, d'on $\det(\gamma', \gamma'') = v^3k \det(T, N) = v^3k$. La curvatura de $\gamma(\theta)$ és doncs $k(\theta) = \frac{\det(\gamma'(\theta), \gamma''(\theta))}{|\gamma'(\theta)|^3}$.

⁴El determinant de dos vectors és el determinant de la matriu que té per columnes les coordenades d'aquests vectors respecte d'una base ortonormal.

Si escrivim $\gamma(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$ tenim que

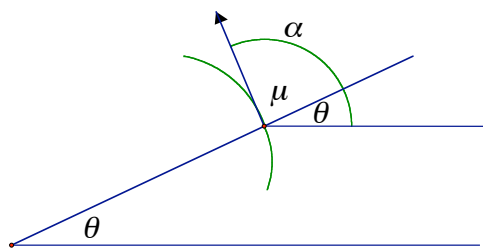
$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= r'(\theta)e^{i\theta} + r(\theta)ie^{i\theta} \\ \gamma''(\theta) &= r''(\theta)e^{i\theta} + r'(\theta)ie^{i\theta} + r'(\theta)ie^{i\theta} - r(\theta)e^{i\theta} = (r''(\theta) - r(\theta))e^{i\theta} + 2r'(\theta)ie^{i\theta}.\end{aligned}$$

Per tant, $\det(\gamma', \gamma'') = \begin{vmatrix} r' & r \\ r'' - r & 2r' \end{vmatrix} = 2(r')^2 - rr'' + r^2$ i

$$k(\theta) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

on, òbviament r, r', r'' denoten $r(\theta), r'(\theta), r''(\theta)$.

Nota: Puig-Adam⁵ ho fa així: Considerem la corba $r = r(\theta)$ i denotem $\alpha = \alpha(\theta)$ l'angle de la tangent amb l'eix de les x 's i per $\mu = \mu(\theta)$ l'angle entre la tangent i el radi vector.



Fent el producte escalar del vector posició $\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ i del vector tangent $\gamma'(\theta)$ obtenim que

$$\mu = \arctan \frac{r}{r'}$$

i per tant

$$\alpha = \theta + \mu = \theta + \arctan \frac{r}{r'}.$$

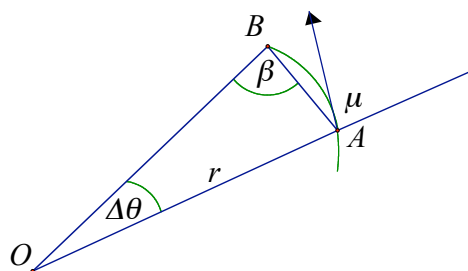
Finalment

$$k(\theta) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \left(1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right) \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Nota: El càlcul de μ es pot fer a partir de la definició de derivada.

Aplicant el teorema del sinus al triangle OAB de la figura obtenim

⁵Calculo Integral, p.291



$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin \Delta\theta}{AB}.$$

Prenem límits quan $\Delta\theta \rightarrow 0$, i observem que β tendeix a μ (angle entre la tangent i el radi vector). Tenim

$$\sin \mu = r \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\theta}{AB} = r \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = r \frac{d\theta}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

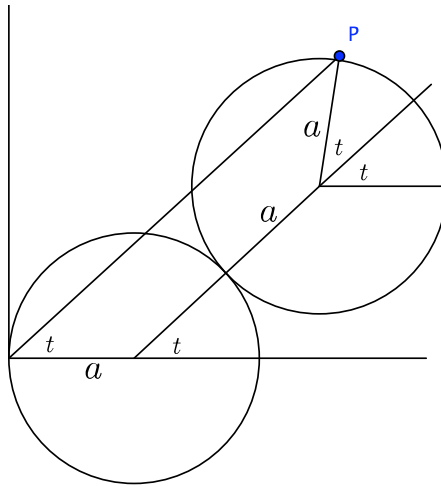
on s és el paràmetre arc. Això ja ens diu que $\tan \mu = r/r'$.

(e) Si $r(\theta)$ té un màxim en $\theta = \theta_0$ aleshores $r'(\theta_0) = 0$ i $r''(\theta_0) \leq 0$, d'on

$$k(\theta_0) = \frac{-r(\theta_0)r''(\theta_0) + r(\theta_0)^2}{r(\theta_0)^3} \geq \frac{1}{r(\theta_0)}.$$

Observem també que en un dibuix l'acotació és clara: que $r(\theta)$ tingui un màxim local a θ_0 implica que localment la corba $\gamma(\theta)$ passa per dins d'una circumferència de radi $r(\theta_0)$ i per tant la seva curvatura serà més gran que la d'aquesta circumferència, que és $1/r(\theta_0)$.

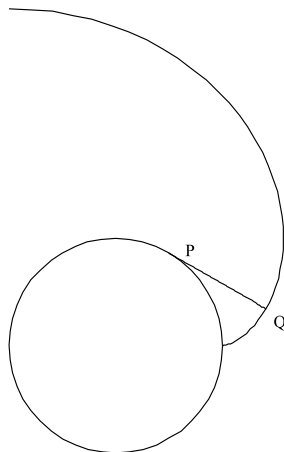
(f) La corba és una cardioide. Donant valors a θ de 0 a 2π amb salts de $\pi/4$ podem fer una representació gràfica aproximada. Observeu que la cardioide del problema 9 compleix que $r(t) = 2a(1 + \cos t)$ on $r(t)$ és la distància del punt de paràmetre t de la cardioide a l'origen. Pot semblar que no són les coordenades polars ja que l'angle no està mesurat des de l'origen de coordenades sinó des del centre de la circumferència fixa. Però resulta que és el mateix!!



1.4 Evolutes

- 15. * L'evolvent o involuta.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular plana. S'anomena *evolvent* o *involuta* de α a qualsevol corba β que talli ortogonalment a totes les rectes tangents de α . La figura següent mostra una involuta de la circumferència.

Observeu, per exemple, que la recta PQ de la figura és tangent a la circumferència en el punt P i normal a la involuta en el punt Q .



Suposem que α està parametritzada pel paràmetre arc s . Per a un s fixat, la recta tangent a α en el punt $\alpha(s)$ és $t \mapsto \alpha(s) + t\alpha'(s)$ i el punt en què aquesta recta tangent talla la involuta β serà $\beta(s) = \alpha(s) + t(s)\alpha'(s)$ (atenció: s és paràmetre arc de α , però no ho serà de β).

- a) Trobeu quina ha de ser la funció $t(s)$ sabent que per a un $s = c$ fixat $\beta(c) = \alpha(c)$ (a la figura anterior, c seria el paràmetre de la circumferència corresponent al punt en què la involuta talla la circumferència).
- b) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Podeu utilitzar un cordill.)
- c) Trobeu una parametrització de la involuta β quan la corba inicial α no està parametritzada per l'arc sinó per un altre paràmetre.
- d) Trobeu l'evolvent de la *catenària* $y = \cosh x$ que passa pel punt $(0, 1)$. Comproveu que es tracta de la *tractriu*.
- e) Trobeu parametritzacions de les evolvents de la circumferència i de la *cicloide*.

Solució:

- (a) Sigui $\alpha(s)$ una corba regular plana i suposem que està parametritzada per l'arc. Sigui β una evolvent de α . Podem prendre la parametrització següent: $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s)$. Comprovem que $\lambda(s)$ és una funció diferenciable, sigui $F(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda\alpha'(s) - \beta(s)$. La funció F és diferenciable i tenim $\frac{dF}{d\lambda} = \alpha'(s) \neq 0$ (si en algun punt s'anul·la la derivada no estarà definida l'evolvent). Aleshores pel teorema de la Funció Implícita deduïm que existeix una funció diferenciable $\lambda(s)$ tal que $F(s, \lambda(s)) = 0$. Derivant ara aquesta expressió obtenim

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \lambda(s)kN(s) + \lambda'(s)T(s)$$

i pel fet que β és ortogonal a totes les rectes tangents de α cal que $\lambda'(s) + 1 = 0$. Tenim $\lambda'(s) = -1$ i per tant $\lambda(s) = s_0 - s$. Així doncs

$$\beta(s) = \alpha(s) + (s_0 - s)\alpha'(s)$$

Observem que en el cas $k \equiv 0$, i.e, una recta, qualsevol recta perpendicular és una evolvent i tanmateix no admet una parametrització d'aquest tipus.

- (b) Observem que podem suposar sense pèrdua de generalitat que α està parametritzada per l'arc. Aleshores la distància de $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ mesurada al llarg de la recta tangent és $|s_0 - s|$, que és la longitud de s_0 fins a s . Per tant podem pensar que l'evolvent és la corba que s'obté al desembolicar una corda tibant que ha estat embolicada al llarg de α .
- (c) Suposem ara que t no és paràmetre arc de α . Sigui $s_\alpha(t)$ un paràmetre arc corresponent a α . Aleshores $\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\alpha'(t)$ i tenim

$$\beta(t) = \alpha(t) + (s_\alpha(t_0) - s_\alpha(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

- (d) Només cal aplicar la fórmula de l'apartat (c) als càlculs de l'exercici 5.

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (t, \cosh(t)) \\
\alpha'(t) &= (1, \sinh(t)) \\
\|\alpha'(t)\| &= \cosh(t) \\
s(t) &= \sinh(t)
\end{aligned}$$

Com $\alpha(0) = (0, 1)$ i volem que β passi pel punt $(0, 1)$ prenem $t_0 = 0$. Aleshores

$$\beta(t) = \left(t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$

que és una parametrització de la tractriu (recoreguda en sentit contrari al que havíem pres a l'exercici 4)

- (e) Circumferència. Sigui $\alpha_1(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$. Aleshores $\alpha'_1(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$, $\|\alpha'_1(t)\| = R$ i $s_1(t) = Rt$. Per tant

$$\beta_1(t) = R(\cos(t) - (t - t_0) \sin(t), \sin(t) + (t - t_0) \cos(t))$$

Es tracta d'un gir del vector $(1, t_0 - t)$ i β_1 és una espiral.

Cicloide. Sigui ara

$$\alpha_2(t) = a(t - \cos(t), 1 + \sin(t)).$$

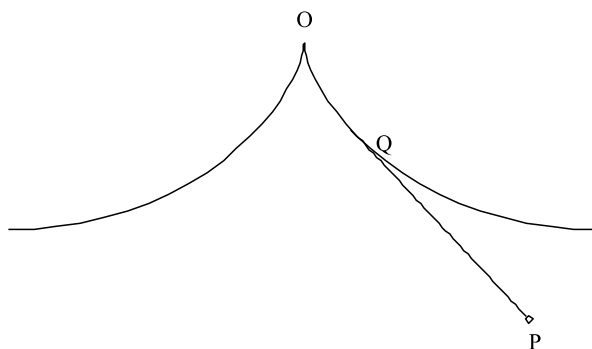
Tenim $\alpha'_2(t) = a(1 + \sin(t), \cos(t))$, $\|\alpha'_2(t)\| = 2a \cos(t/2)$ i $s_2(t) = 4a \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Aleshores

$$\beta_2(t) = a(t - \cos(t), 1 + \sin(t)) + \frac{2a}{\cos(t/2)} \left(\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{t_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) (1 + \sin(t), \cos(t)).$$

16. Relotges de pèndol, Huygens, 1673. Per evitar que les variacions d'amplitud en les oscil·lacions d'un pèndol provoquessin un error en la mesura del temps, Huygens va idear un sistema basat en les propietats de la *cicloide*. Considerem una cicloide invertida de paràmetre a , és a dir

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(\cos t - 1)), \quad -\pi < t < \pi.$$

Suposem que aquesta corba és rígida, construïda amb un determinat metall. Del vèrtex O de la cicloide (vegeu la figura) pengem un cordill amb un pes a l'altre extrem (punt P de la figura).



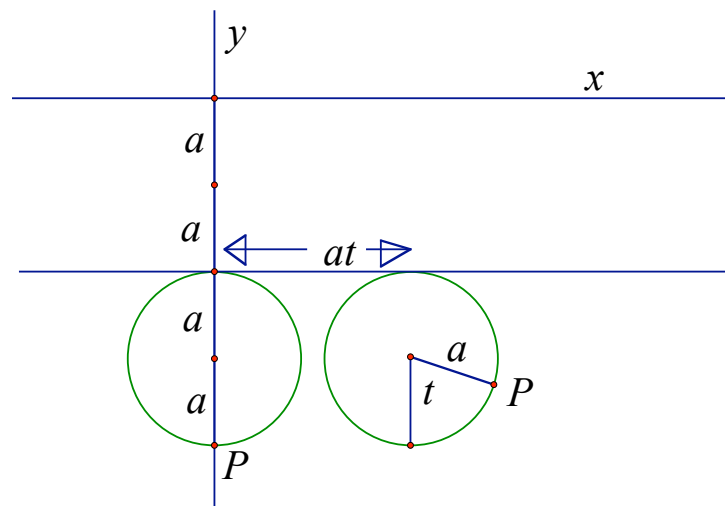
El cordill pot oscil·lar, però en el seu moviment no pot travessar mai la cicloide metàl·lica. A la figura hem designat per Q el punt de la cicloide en què el cordill deixa d'estar recolzat sobre la cicloide. La recta determinada per Q i P és tangent a la cicloide. Llavors la corba que descriu l'extrem lliure del pèndol és ortogonal a les rectes tangents; per tant, és una evolvent (involuta) de la *cicloide*. Si s'agafa un cordill de longitud $4a$ aquesta corba és una *cicloide*. Llavors el semi període del pèndol (el temps que triga en anar des d'un extrem a la posició d'equilibri) és independent de l'amplitud degut a que és el temps que tarda un cos en caiguda lliure sobre una *cicloide* en anar al punt més baix. Calculeu la corba descrita per l'extrem del pèndol i comproveu que és una *cicloide*.

Solució: El vector tangent és $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, -\sin t)$ i té norma $\|\gamma'(t)\| = 2a \sin(t/2)$. La longitud de la cicloide des del vèrtex O a un punt $\gamma(t)$ ve donada per $L(t) = 4a(1 - \cos(t/2))$ (fórmula obtinguda en el problema 8, apartat c), amb $\alpha = 0$).

Si el cordill té longitud $4a$ vol dir que la parametrització de la corba descrita per l'extrem del pèndol ve donada per

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \gamma(t) + \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}(4a - L(t)) \\ &= a(t - \sin(t), \cos(t) - 1) + \frac{2a \cos(t/2)}{\sin(t/2)}(1 - \cos(t), -\sin(t)) \\ &= a(t - \sin(t), \cos(t) - 1) + 2a \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}(2 \sin^2(t/2), -2 \sin(t/2) \cos(t/2)) \\ &= a(t + \sin(t), -3 - \cos(t)),\end{aligned}$$

que és clarament la cicloide de la figura (just have a look at the picture)



17. * **L'evoluta.** Diem que una corba regular plana β és l'*evoluta* d'una altra corba regular plana α si i només si α és una evolvent de β . Dit d'una altra manera, β és l'envolupant de la família de

rectes normals de α . S'anomena *envolupant* d'una família de corbes a una corba que és tangent a totes les corbes de la família.

- Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α , suposant que la curvatura de α no s'anul·la. (Indicació: Poseu $\beta(s) = \alpha(s) + t(s)\mathbf{n}(s)$, on $\mathbf{n}(s)$ és el vector normal de α en el punt $\alpha(s)$. Determineu llavors la funció $t(s)$).
- Trobeu una parametrització de β anàloga a l'anterior quan α està parametritzada per un paràmetre arbitrari.
- Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Recordeu la definició de centre de curvatura.)
- Demostreu que la tangent de β en el punt $\beta(s)$ és la normal de α en el punt $\alpha(s)$.
- Considerem les normals a α en dos punts propers $s_1 \neq s_2$ i fem tendir s_1 a s_2 . Demostreu que la intersecció d'aquestes normals convergeix a un punt de l'evoluta.
- Trobeu l'evoluta de la *cicloide*.

Solució:

- (a) Suposem que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc. Tenim $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$. Un raonament com el de l'exercici anterior ens convenç que $\lambda(s)$ és una funció diferenciable: prenem $F(s, \lambda) = \alpha(s) - \beta(s) + \lambda N(s)$ i tenim $\frac{dF}{d\lambda} = N(s) \neq 0$. Aleshores

$$\beta'(s) = T(s) + \lambda'(s)N(s) - k(s)\lambda(s)T(s)$$

i cal $1 - k(s)\lambda(s) = 0$. Per tant $\lambda(s) = \frac{1}{k(s)}$. Aleshores

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$$

i només falta observar que si canviem el paràmetre la fórmula anterior no canvia. Observem que hi ha dues formes de definir el vector normal quan es treballa amb corbes planes, suposem que $\alpha(s)$ és una corba parametritzada per l'arc:

- Podem pensar que la corba viu a $\mathbb{R}^2$ i definir, si $\|\alpha''(s)\| \neq 0$, el vector normal com $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$. Aquesta definició coincideix amb pensar la corba a $\mathbb{R}^3$ i es compleix $\alpha'' = kN$ amb $k > 0$. Observem però que no sempre $\{T, N\}$ és una base positiva de $\mathbb{R}^2$.
- Alternativament podem considerar, si $\|\alpha''(s)\| \neq 0$, el vector normal com $N(s) = \pm \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ on el signe ve determinat imposant que $\{T, N\}$ sigui una base positiva de $\mathbb{R}^2$. Aleshores $\alpha_2'' = k_2 N$ on k_2 és el que es coneix com curvatura amb signe. Remarquem per acabar que aquesta definició es pot generalitzar a dimensions superiors.

(b)

- (c) L'evoluta és el lloc geomètric dels centres de curvatura d'una corba plana.

(d)

(e)

(f) Considerem la cicloide $\alpha(t) = a(t - \cos(t), 1 + \sin(t))$. Aleshores:

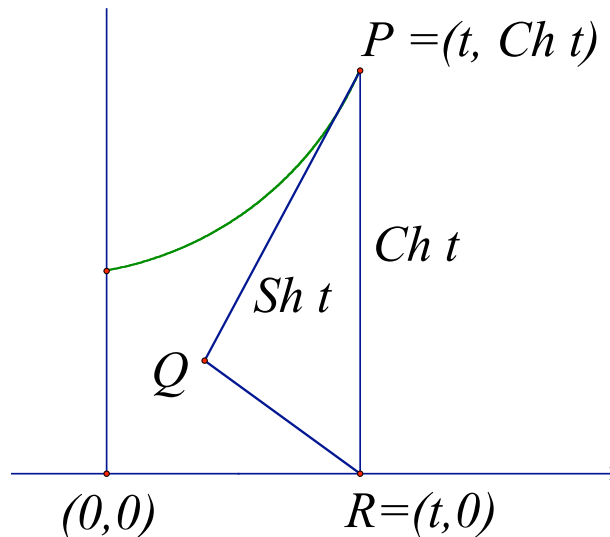
$$\begin{aligned}
 \alpha'(t) &= a(1 + \sin(t), \cos(t)) \\
 \alpha''(t) &= a(\cos(t), -\sin(t)) \\
 N(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} a(\cos(t), -1 - \sin(t)) \\
 \|\alpha'(t)\|^2 &= 2a^2(1 + \sin(t)) \\
 k(t)^{-1} &= \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{|\det(\alpha', \alpha'')|}
 \end{aligned}$$

Per tant $\beta(t) = \alpha(t) + k(t)^{-1}N(t) = a(t + \cos(t), -1 - \sin(t))$.

18. * Deduïu geomètricament que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*.

Solució: Recordem que la *tractriu* té la propietat de que la distància d'un punt al punt de tall de la recta tangent amb l'eix de les x és 1.

És el mateix veure que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*, que veure que una involvent de la *catenària* és la *tractriu*.



Hem vist en el problema 5 que el paràmetre arc de la catenària $(t, \cosh t)$ està donat per $s(t) = \sinh t$. Observem $s(0) = 0$, és a dir que mesurem longituds a partir del punt $(0, 1)$.

Prenem sobre la tangent a la catenària per P la longitud $\sinh t$, és a dir, la longitud de la catenària entre els punts $(0, 1)$ i $P = (t, \cosh t)$.

L'angle $\beta = \angle RPQ$ és el complementari de l'angle que forma la tangent PQ amb l'eix de les x' s. Com que la pendent de la tangent és $\sinh t$, tenim

$$\tan \beta = \frac{1}{\sinh t}.$$

En particular

$$\cos \beta = \tanh t, \quad \sin \beta = \frac{1}{\cosh t}.$$

Per altra banda és clar que

$$Q = (t - \sinh t \sin \beta, \cosh t - \sinh t \cos \beta)$$

de manera que

$$Q = (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}).$$

En particular

$$d(Q, R) = 1.$$

Com que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, el triangle $\triangle PQR$ ha de ser rectangle en Q .

Així, la corba descrita per Q té subtangent 1, és a dir, és la tractriu, i talla ortogonalment les tangents de la catenària, és a dir, és la seva involuta.

19. * Relació entre les curvatures d'una corba i de la seva evoluta.

- Trobeu la curvatura de la *catenària* en paràmetre arc.
- Trobeu la curvatura de la *tractriu* en el paràmetre induït per la *catenària*.
- Deduïu una fórmula general per la curvatura d'una evolvent de α en el paràmetre induït per l'arc de α .

Solució:

- (a) Reprenem els càlculs de l'exercici 5. Respecte el paràmetre 'natural' t , la catenària està donada per $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, \sinh(t)) \\ \alpha''(t) &= (0, \cosh(t)) \\ k(t) &= \frac{|\det(\alpha', \alpha'')|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{\cosh^2(t)} \end{aligned}$$

La parametrització de la catenària respecte el paràmetre arc és $\beta(s) = (\operatorname{argsinh} s, \sqrt{1+s^2})$, i el paràmetre arc està donat per $s(t) = \sinh(t)$ (recordeu que s és la integral de la norma del vector tangent). Aleshores

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \right) \\ \beta''(s) &= \left(\frac{-s}{(s^2+1)^{3/2}}, \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Per tant

$$k(s) = \|\beta''(s)\| = \frac{1}{1+s^2}.$$

Observem que si en aquesta fórmula canviem s pel seu valor $s(t) = \sinh t$ obtenim el valor de $k(t)$ obtingut abans.

(b) L'expressió de la tractriu en el paràmetre 'natural' de la catenària és (vegeu problema 18)

$$\gamma(t) = (t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)}).$$

Per tant

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}, -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \right), \\ \gamma''(t) &= \left(\frac{2 \sinh(t) \cosh(t)}{\cosh^4(t)}, \frac{\cosh(t)(\sinh^2(t) - 1)}{\cosh^4(t)} \right).\end{aligned}$$

La curvatura és doncs

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{1}{\sinh(t)}.$$

Però $\sinh(t)$ és el paràmetre arc de la catenària, així que $k(t) = \frac{1}{s}$, és a dir, la curvatura de la tractriu és l'invers del paràmetre arc de la catenària, més concretament, la curvatura de la tractriu en el punt corresponent al punt de la catenària que dista s de l'origen és $1/s$ (vegeu aparta següent).

Nota: Si pensem la tractriu com $\gamma(x) = (x, y(x))$ on $y(x)$ és la solució de l'equació diferencial

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

tenim $\gamma'(x) = (1, y'(x))$, $\gamma''(x) = (0, y''(x))$.

Però és fàcil veure que

$$\begin{aligned}|\gamma'(x)| &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ y''(x) &= -\frac{y'(x)}{(1-y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Per tant la curvatura val

$$k(x) = \frac{\det(\gamma'(x), \gamma''(x))}{|\gamma'(x)|^3} = -y'(x).$$

La curvatura és simplement la derivada (canviada de signe).

(c) Sigui $\alpha(s)$ una corba parametritzada per l'arc. Les seves evolvents s'escriuen com $\beta(s) = \alpha(s) + (s_0 - s)\alpha'(s)$. Per tant

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (s_0 - s)k(s)N(s) \\ \beta''(s) &= (-k(s) + (s_0 - s)k'(s))N(s) - k^2(s)(s_0 - s)T(s).\end{aligned}$$

Per tant la curvatura $k_\beta(s)$ de la corba β és

$$k_\beta(s) = \frac{1}{|s - s_0|}.$$

20. Demostreu que la càustica d'una corba Γ respecte un punt P és l'evoluta de l'ortotòmica de Γ respecte de P . **Solució:** Recordem que la ortotòmica és l'envolvent de les circumferències de centres en el punts $\gamma(t)$ de Γ i que passen per P .

Observem primerament que la ortotòmica de Γ respecte P coincideix amb la corba $\beta(t)$ dels simètrics de P respecte de les tangents a Γ . És a dir, $\beta(t)$ i P són simètrics respecte de la tangent a Γ en el punt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

En efecte, les circumferències que generen la ortotòmica són

$$C_t(u) = (X(t, u), Y(t, u)) = (x(t) + r(t) \cos u, y(t) + r(t) \sin u), \quad u \in [0, 2\pi],$$

amb $r(t) = |\overrightarrow{\gamma(t)P}|$.

En particular,

$$r' = \frac{x'(x - p_1) + y'(y - p_2)}{r}, \quad P = (p_1, p_2).$$

L'equació de l'envolvent s'obté substituint a l'expressió de $C_t(u)$, u pel valor que deduïm de la igualtat

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x' + r' \cos u & y' + r' \sin u \\ -r \sin u & r \cos u \end{array} \right| = 0.$$

És a dir,

$$x' \cos u + y' \sin u + r' = 0. \quad (1.1)$$

Així doncs $\beta(t) = (x(t) + r(t) \cos u, y(t) + r(t) \sin u)$, amb u donada per (1.1).

Comprovem que $\beta(t)$ és el simètric de P respecte de la tangent.

1)

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{P\beta(t)}, \gamma'(t) \rangle &= \langle (x + r \cos u - p_1, y + r \sin u - p_2), (x', y') \rangle \\ &= xx' + rx' \cos u - p_1x' + yy' + ry' \sin u - p_2y' \\ &= rx' \cos u + ry' \sin u + rr' = 0.\end{aligned}$$

2) Angle $\delta_1 = \angle \overrightarrow{P\gamma(t)}, \gamma'(t)$.

$$\langle \overrightarrow{\gamma(t)P}, \gamma' \rangle = r \cos \delta_1 = -(x - p_1)x' - (y - p_2)y' = -rr'.$$

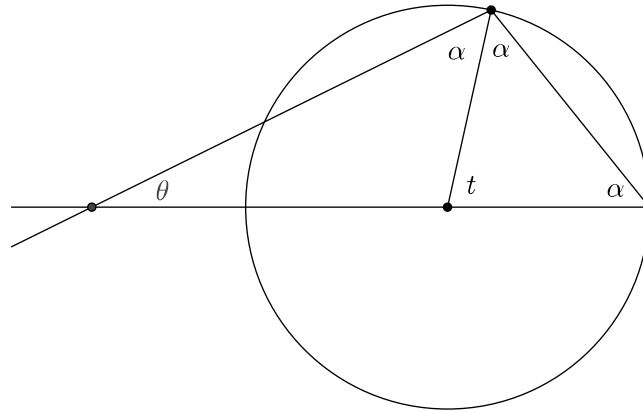
3) Angle $\delta_2 = \angle \overrightarrow{\beta(t)\gamma(t)}, \gamma'(t)$.

$$\langle \overrightarrow{\beta(t)\gamma(t)}, \gamma'(t) \rangle = r \cos \delta_2 = \langle (r \cos u, r \sin u), (x', y') \rangle = -rr'.$$

Per tant $\delta_1 = \delta_2$ i hem acabat.

21. Demostreu que la càustica d'una circumferència respecte un dels seus punts és la cardioide.

Solució: Sigui $P = (1, 0)$ i Γ la circumferència $x^2 + y^2 = 1$. El raig de llum que surt del punt $P = (1, 0)$ i arriba al punt $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ surt reflectit en una recta de pendent $\theta = t - \alpha$, on α és l'angle a la base del triangle isòsceles $(0, 0), (1, 0), (\cos t, \sin t)$.



Per tant $2\alpha + t = \pi$ i $\theta + \alpha = t$, i així

$$\theta = \frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

El raig reflectit és doncs la recta

$$y - \sin t = \tan\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)(x - \cos t),$$

que, simplificant, queda

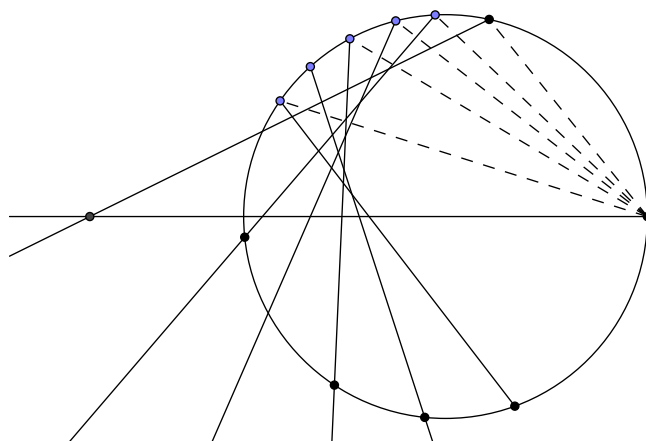
$$\cos \frac{3t}{2} x + \sin \frac{3t}{2} y = \cos \frac{t}{2}.$$

$$-3 \sin \frac{3t}{2} x + 3 \cos \frac{3t}{2} y = -\sin \frac{t}{2}$$

Resolent per Cramer obtenim

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}(\cos t + \cos^2 t) - \frac{1}{3}, \\ y &= \frac{2}{3}(\sin t + \sin t \cos t). \end{aligned}$$

Hem usat que $2 \cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos t$ i que $\sin t = \sin(\frac{3t}{2} - \frac{t}{2})$, i similars. I això és una cardioide com es veu directament comparant aquestes equacions amb les equacions de la cardioide obtinguda al problema 9.



Capítol 2

Exercicis complementaris de corbes planes

2.1 Còniques

- 22. El·lipse.** Siguin F_1 i F_2 dos punts del pla a distància $2c$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > c$. Posem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (semieix menor), $e = \frac{c}{a} < 1$ (excentricitat) i $p = \frac{b^2}{a}$ (paràmetre focal). L'el·lipse amb focus F_1 i F_2 i semieix major a és el lloc geomètric dels punts P del pla que verifiquen

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

- a) Prenent el pol (origen de coordenades) en un dels dos focus i origen d'angles a la semirecta que l'uneix amb l'altre proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

i trobeu-ne la curvatura.

- b) Prenent coordenades cartesianes centrades en el punt mig de F_1F_2 (centre de l'el·lipse) i amb eix Ox a la semirecta OF_2 proveu que l'equació de l'el·lipse és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

- c) Proveu que $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ és una parametrització regular de l'el·lipse.

Solució:

- (a) La distància al quadrat $d(P, F_2)^2$ és igual a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PF_2} \rangle &= \langle \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1F_2}, \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{F_1F_2} \rangle = \langle \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_1} \rangle + 2\langle \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{F_1F_2} \rangle + \langle \overrightarrow{F_1F_2}, \overrightarrow{F_1F_2} \rangle \\ &= r^2 - 2r2c \cos \theta + (2c)^2. \end{aligned}$$

Observem que θ és l'angle $\angle PF_1F_2$, el suplementari del que formen els vectors $\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{F_1F_2}$ (d'aquí prové el signe menys). La fórmula anterior no és més que el teorema del cosinus aplicat al triangle $\triangle PF_1F_2$.

Com que $r = d(P, F_1)$, l'equació $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ és equivalent a $(2a - r)^2 = r^2 - 4rc \cos \theta + 4c^2$. Si desenvolupem el primer membre obtenim $r^2 - 4ar + 4a^2 = r^2 - 4rc \cos \theta + 4c^2$, i ara simplificant, $a^2 - c^2 = r(a - c \cos \theta)$, és a dir $\frac{b^2}{a} = r(1 - e \cos \theta)$, o equivalentment

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

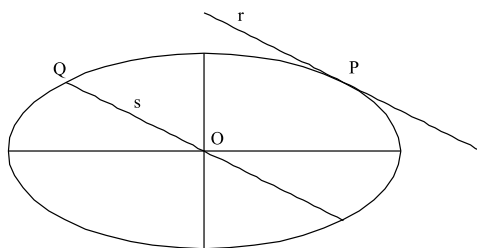
La curvatura de l'el·lipse en coordenades polars ve donada a partir de la fórmula del problema anterior mitjançant

$$k(\theta) = \frac{(1 - e \cos \theta)^3}{p(1 + e^2 - 2e \cos \theta)^{3/2}}.$$

Observació: Com que la hipèrbola té la mateixa fórmula en coordenades polars, només que enlloc de $e < 1$ té $e > 1$, aleshores la seva curvatura ve donada per la mateixa fórmula.

- (b) Posem $(x(\theta), y(\theta)) = (-c, 0) + r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ i verifiquem que $\left(\frac{x(\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(\theta)}{b}\right)^2 = 1$.
- (c) L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y) = (ax, by)$ envia la circumferència unitat centrada a l'origen sobre l'el·lipse d'equació $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Per tant, $f(\cos t, \sin t) = (a \cos t, b \sin t)$ parametriza aquesta el·lipse.

23. Interpretació geomètrica de la curvatura de l'el·lipse (tal com apareix als *Principia de Newton*). Considereu l'el·lipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$.



- (a) Calculeu-ne la curvatura.
- (b) Si P és el punt de l'el·lipse corresponent a un cert valor del paràmetre t , sigui r la recta tangent a l'el·lipse per P. Sigui s la recta paral·lela a r que passa pel centre de l'el·lipse (vegeu la figura). Sigui Q un dels dos punts d'intersecció de la recta s amb l'el·lipse i sigui q la distància entre el centre de l'el·lipse i el punt Q. Sigui m la distància entre les dues rectes paral·leles r i s . Proveu que la curvatura $k(t)$ de l'el·lipse en el punt P de paràmetre t és igual a m/q^2 .

Solució: ¹

Hem de veure la igualtat

$$\frac{(1 - e \cos \theta)^3}{p(1 + e^2 - 2e \cos \theta)^{3/2}} = \frac{m}{q^2}.$$

La el·lipse, en coordenades polars està donada per

$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) = \left(\frac{p \cos \theta}{1 - e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1 - e \cos \theta} \right).$$

Derivant,

$$\gamma'(\theta) = \left(\frac{-p \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2}, \frac{p \cos \theta - ep}{(1 - e \cos \theta)^2} \right).$$

Per tant, l'equació de la recta tangent és

$$y - \frac{p \sin \theta}{1 - e \cos \theta} = \frac{e - \cos \theta}{\sin \theta} \left(x - \frac{p \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \right),$$

que es pot escriure com

$$x(e - \cos \theta) - y \sin \theta + p = 0.$$

Observem que el pendent d'aquesta recta és

$$\tan \beta = \frac{e - \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Com que m és la distància d'aquesta recta al centre de l'el·lipse $O = (c, 0)$ (recordem que l'origen de coordenades l'hem agafat en un focus) tenim

$$m = \frac{|c \cos \theta - a|}{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \theta}}.$$

Tallem ara l'el·lipse

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

amb la recta

$$y = \tan \beta (x - c),$$

paralela a la recta tangent que passa pel centre O .

Obtenim

$$x - c = \frac{ab}{\pm \sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \beta}}.$$

Denotant (x_1, y_1) i (x_2, y_2) els dos punts de tall tenim que

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \beta}} \\ y_1 - y_2 &= \tan \beta (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

¹Vegeu *Curvatura de les còniques seguint Newton*, <http://mat.uab.es/agusti/docencia.html>

Per tant

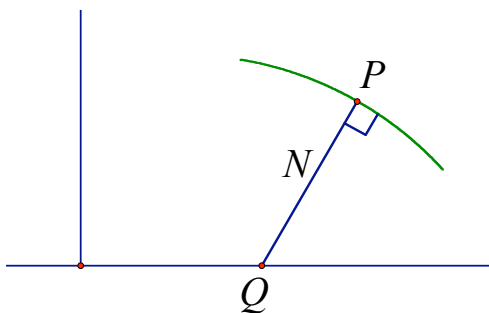
$$\begin{aligned} 2q &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= (x_1 - x_2) \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \\ &= \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \beta}} \frac{\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \theta}}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Substituint $\tan \beta$ pel seu valor obtenim finalment

$$q = \frac{ab(1 + e^2 - 2e \cos \theta)^{1/2}}{a - c \cos \theta}.$$

Calculem m/q^2 i obtenim el valor desitjat.

Nota²: Aprofitant aquests càlculs es veu fàcilment que la normal a l'el·lipse en P talla l'eix de les x 's en un punt Q de coordenades $Q = (er, 0)$, amb $r = r(\theta)$.



Per tant, $N = d(P, Q) = r\sqrt{1 + e^2 - 2e \cos \theta}$, i així

$$k(\theta) = \frac{m}{q^2} = \frac{p^2}{N^3}.$$

- 24. Altra expressió de la curvatura per a les còniques.** Donada una corba α diferenciable i un punt P sobre ella, la *subnormal* per P és el segment de la recta normal que va de P al tall amb l'eix x . Denotem per N la longitud de la subnormal.

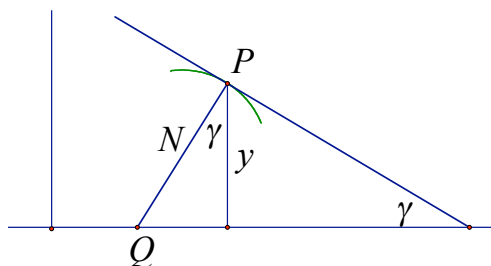
Proveu que la curvatura de l'el·lipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ és

$$k = \frac{p^2}{N^3}$$

on $p = b^2/a$ és el paràmetre de l'el·lipse. Òbviament $k = k(x)$ i $N = N(x)$. Proveu el mateix per a la hipèrbola $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$ i la paràbola $y^2 = 2px$.

Solució: Observem que si γ és l'angle de la tangent amb l'eix x llavors $N \cos \gamma = y$.

²Vegeu Puig-Adam, *Calculo Integral*, p.290 i el problema 24.



Però $1/\cos \gamma = \sqrt{1 + \tan^2 \gamma}$. Aleshores $N = y\sqrt{1 + (y')^2}$ i, aplicant la fórmula de l'apartat b) del problema 14 a la corba $\gamma(x) = (x, y(x))$, es veu que la curvatura està donada per

$$k = \frac{y''}{(\sqrt{1 + (y')^2})^{3/2}} = \frac{y^3 y''}{N^3}. \quad (2.1)$$

Però, derivant dos cops l'equació de la corba tenim

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Substituint obtenim l'expressió que volíem.

Nota: Observeu que la fórmula (2.1) és vàlida per a tota corba donada com a gràfica d'una funció $y = y(x)$.

25. Hipèrbola. Sigui F un punt del pla, d una recta a distància δ de F i $e > 1$. Posem

$$p = e\delta, \quad c = \frac{ep}{e^2 - 1}, \quad a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

La hipèrbola amb focus F , directriu d i excentricitat e és el lloc geomètric dels punts del pla tals que

$$d(P, F) = e \cdot d(P, d).$$

- a) Prenent F com a pol i com a origen d'angles la semirecta per F perpendicular a d i que no talla a d , proveu que l'expressió de la hipèrbola en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

- b) Prenent ara coordenades cartesianes amb origen O en el punt de coordenades polars $r = c$, $\theta = \pi$ (centre de la hipèrbola) i amb eix Ox a la direcció OF , proveu que l'equació de la hipèrbola és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

- c) Proveu que $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ és una parametrització regular de la hipèrbola.

Solució: Aquest problema és completament anàleg a l'anterior i no el farem aquí. Només dir que la parametrització en polars $r(\theta) = \frac{p}{1-e \cos \theta}$ de l'el·lipse, quan $e < 1$ i de la hipèrbola, quan $e > 1$ coincideix amb la de la paràbola quan $e = 1$. Si fem variar contínuament el paràmetre $e \in [0, \infty)$ veiem com van apareixent les diferents còniques. Una altra observació és que tota cònica no degenerada (el·lipse, hipèrbola i paràbola) és el lloc geomètric dels punts P que verifiquen que $d(P, F) = e d(P, d)$ on F és un punt anomenat el focus, d és una recta anomenada eix i $e \in [0, \infty)$ és un valor anomenat excentricitat. Per $e = 0$ obtenim les circumferències, per $0 < e < 1$ les el·lipses, per $e = 1$ les paràboles i finalment, per $e > 1$ les hipèrboles.

2.2 Contacte

26. Siguin $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ corbes definides en un mateix entorn del zero. Suposem

$$\alpha^{(r)}(0) = \beta^{(r)}(0), \quad 0 \leq r \leq k.$$

Suposem que existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha^{(k+1)}(0) - \beta^{(k+1)}(0) = \lambda \alpha'(0).$$

Demostreu que podem reparametritzar β de manera que (derivant ara respecte d'aquest nou paràmetre) tinguem

$$\alpha^{(r)}(0) = \beta^{(r)}(0), \quad 0 \leq r \leq k+1.$$

Indicació: $t = u + \lambda \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}$

Solució: Reparametritzem $\beta(t)$ amb el canvi indicat. Tenim

$$\beta(u) = \beta(u + \lambda \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}),$$

Denotem $\beta'(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}$. Tenim

$$\frac{d\beta}{du} = \beta'(t)(1 + \lambda \frac{u^k}{k!}),$$

de manera que en $u = t = 0$ tenim

$$\frac{d\beta}{du}(0) = \beta'(0).$$

Anàlogament

$$\frac{d^2\beta}{du^2} = \beta''(t)(1 + \lambda \frac{u^k}{k!})^2 + \beta'(t)(\lambda \frac{u^{k-1}}{(k-1)!})$$

de manera que en $u = t = 0$ tenim

$$\frac{d^2\beta}{du^2}(0) = \beta''(0).$$

Observem que, dient $h(u) = u + \lambda \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}$ tenim

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h'(0) &= 1 \\ h''(0) &= 0 \\ &\vdots \\ h^{(k)}(0) &= 0 \\ h^{(k+1)}(0) &= \lambda \end{aligned}$$

Això ens permet dir, per recurrència i la regla de la cadena, que

$$\frac{d^r \beta}{du^r}(0) = \beta''(0), \quad 0 \leq r \leq k.$$

Finalment tindrem

$$\frac{d^{k+1} \beta}{du^{k+1}}(0) = \beta^{(k+1)}(0) + \beta'(0)\lambda = \beta^{(k+1)}(0) + \alpha'(0)\lambda = \alpha^{(k+1)}(0),$$

com volíem demostrar.

Donades

- 27.** Siguin $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ corbes definides en un mateix entorn del zero. Suposem que existeixen funcions diferenciables invertibles $h(s)$ i $g(\tau)$ tals que si fem el canvi de variable $t = h(s)$ i $t = g(\tau)$ tenim

$$\frac{d\alpha^{(r)}}{ds^r}(0) = \frac{d\beta^{(r)}}{d\tau^r}(0), \quad 0 \leq r \leq k. \quad (2.2)$$

Suposem $h(0) = g(0) = 0$.

Demostreu que existeix una funció $t = f(u)$ tal que

$$\frac{d\alpha^{(r)}}{dt^r}(0) = \frac{d\beta^{(r)}}{du^r}(0), \quad 0 \leq r \leq k. \quad (2.3)$$

Solució: Només hem de prendre

$$f(u) = (g \circ h^{-1})(u),$$

i fer a $\beta(t)$ el canvi de paràmetre $t = f(u)$.

Observem que, pel teorema de la funció inversa tenim

$$f'(0) = \frac{g'(0)}{h'(0)}.$$

La igualtat (2.2), per a $r = 1$, ens diu

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\alpha}{ds}(0) \cdot \frac{ds}{dt}(0) = \frac{1}{h'(0)} \cdot \frac{d\beta}{d\tau}(0).$$

Però

$$\frac{d\beta}{du}(0) = \frac{d\beta}{d\tau}(0) \cdot \frac{d\tau}{dt}(0) \cdot \frac{dt}{du}(0) = \frac{d\beta}{d\tau}(0) \cdot \frac{1}{g'(0)} \cdot f'(0) = \frac{d\beta}{d\tau}(0) \cdot \frac{1}{h'(0)}$$

per tant

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\beta}{du}(0).$$

Potser és més còmode organitzar aquests mateixos càlculs així:

$$0 = \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\beta}{d\tau}\right)(0) = \frac{d\alpha}{dt}(0)h'(0) - \frac{d\beta}{du}(0)\frac{du}{d\tau}(0)$$

però

$$\frac{du}{d\tau}(0) = \frac{du}{dt}(0)g'(0) = f'^{-1}(0)g'(0) = h'(0).$$

Per tant,

$$0 = \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\beta}{d\tau}\right)(0) = \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{du}\right)(0)h'(0),$$

que implica

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\beta}{du}(0). \quad (2.4)$$

Anàlogament

$$0 = \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2} - \frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right)(0) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}(0)h'(0)^2 + \frac{d\alpha}{dt}(0)h''(0) - \frac{d^2\beta}{du^2}(0)\left(\frac{du}{d\tau}(0)\right)^2 - \frac{d^2u}{d\tau^2}(0)\frac{d\beta}{du}(0)$$

Com que

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = h''(\tau),$$

ja que $u = h(\tau)$, per (2.4), tenim

$$0 = \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2} - \frac{d^2\beta}{d\tau^2}\right)(0) = \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}(0) - \frac{d^2\beta}{du^2}(0)\right)h'(0)^2,$$

és a dir

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}(0) = \frac{d^2\beta}{du^2}(0).$$

Ara ja es veu que en estudiar

$$\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3} - \frac{d^3\beta}{d\tau^3}\right)(0)$$

només cal considerar aquell termes on apareguin derivades terceres de α i β ja que els altres termes s'anul·laran. Anàlogament per a les derivades d'ordre més gran.

Tindrem doncs

$$0 = \left(\frac{d^r\alpha}{ds^r} - \frac{d^r\beta}{d\tau^r}\right)(0) = \left(\frac{d^r\alpha}{dt^r}(0) - \frac{d^r\beta}{du^r}(0)\right)h'(0)^r, \quad 0 \leq r \leq k.$$

28. Siguin $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ corbes definides en un mateix entorn del zero. Suposem

$$\alpha^{(r)}(0) = \beta^{(r)}(0), \quad 0 \leq r \leq k. \quad (2.5)$$

Demostreu que $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ tenen un contacte d'ordre k en $t = 0$ si i només si

$$\alpha^{(k+1)}(0) - \beta^{(k+1)}(0), \quad \text{i} \quad \alpha'(0)$$

són linealment independents.

Recordeu que dues corbes tenen un contacte *d'ordre almenys* k en un punt si se les pot reparametritzar de manera que en aquest punt coincideixin les corbes i les seves derivades (respecte d'aquests nous paràmetres respectivament) fins l'ordre k . El contacte és d'ordre k quan és *d'ordre almenys* k i no és *d'ordre almenys* $k+1$. Es pot veure (problema **27**) que en lloc de reparametritzar les dues corbes es pot deixar una d'elles fixa i reparametritzar només l'altra.

Solució: Que si tenen contacte d'ordre k , els vectors $\alpha^{(k+1)}(0) - \beta^{(k+1)}(0)$ i $\alpha'(0)$ són linealment independents és conseqüència immediata del problema **26**.

Suposem doncs que aquests vectors són linealment independents i anem a veure que el contacte és d'ordre k . Per la llei de les contrarecíproques, suposarem que el contacte no és d'ordre k i arribarem a la conclusió de que aquests vectors són linealment dependents.

Si no fos d'ordre k voldria dir que hi ha una reparametrització de β , $t = h(v)$, amb $h(0) = 0$, tal que

$$\frac{d\alpha^{(r)}}{dt^r}(0) = \frac{d\beta^{(r)}}{dv^r}(0), \quad 0 \leq r \leq k+1. \quad (2.6)$$

Per la regla de la cadena tenim

$$\beta'(t) = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{dv} h'(v),$$

que, en $v = t = 0$, i utilitzant les fórmules (2.5) i (2.6), dóna

$$\beta'(0) = \frac{d\beta}{dv}(0) h'(0) = \frac{d\alpha}{dt}(0) h'(0) = \beta'(0) h'(0),$$

per tant $h'(0) = 1$.

Tornem a derivar

$$\beta''(t) = \frac{d^2\beta}{dv^2} h'^2(v) + h''(v) \frac{d\beta}{dv}$$

que, en $v = t = 0$, i utilitzant les fórmules (2.5) i (2.6), dóna

$$\beta''(0) = \frac{d^2\beta}{dv^2}(0) h'^2(0) + h''(0) \frac{d\beta}{dv}(0) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}(0) h'^2(0) + h''(0) \frac{d\alpha}{dt}(0) = \beta''(0) + h''(0) \frac{d\alpha}{dt}(0),$$

per tant $h''(0) = 0$.

Fem encara una derivada més per tal de que es vegi que les successives derivades de $h(v)$, en $v = 0$, s'anul·len.

$$\beta'''(t) = \frac{d^3\beta}{dv^3}h^3(v) + 2h'(v)h''(v)\frac{d^2\beta}{dv^2} + h'''(v)\frac{d\beta}{dv} + h'(v)h''(v)\frac{d^2\beta}{dv^2},$$

que, en $v = t = 0$, i utilitzant les fórmules (2.5) i (2.6), i els valors ja obtinguts de les derivades de $h(v)$ en $v = 0$, dóna

$$\beta'''(0) = \frac{d^3\beta}{dv^3}(0) + h'''(0)\frac{d\alpha}{dt}(0) = \beta'''(0) + h'''(0)\frac{d\alpha}{dt}(0),$$

per tant $h'''(0) = 0$.

Per recurrència s'obté

$$\begin{aligned}\beta^{(k+1)}(0) &= \frac{d^{(k+1)}\beta}{dv^{k+1}}(0)(h'(0))^{k+1} + h^{(k+1)}(0)\frac{d\beta}{dv}(0) \\ &= \frac{d^{(k+1)}\beta}{dv^{k+1}}(0) + h^{(k+1)}(0)\frac{d\beta}{dv}(0) \\ &= \frac{d^{(k+1)}\alpha}{dt^{k+1}}(0) + h^{(k+1)}(0)\frac{d\beta}{dv}(0) \\ &= \alpha^{(k+1)}(0) + h^{(k+1)}(0)\frac{d\alpha}{dt}(0)\end{aligned}$$

ja que totes les derivades d'ordre menor o igual a k de $h(v)$ s'anul·len en $v = 0$.

Per tant els vectors $\alpha^{(k+1)}(0) - \beta^{(k+1)}(0)$ i $\alpha'(0)$ són linealment dependents.

29. Estudieu el contacte de les corbes planes

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\sin t, 1 + t + \frac{12t^2 + 4t^3 + t^4}{24}) \\ \sigma(t) &= (t - \frac{t^3}{6}, e^t)\end{aligned}$$

en $t = 0$.

Solució: Calculem les successives derivades

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\cos(t), 1 + t + t^2/2 + t^3/6) \\ \gamma''(t) &= (-\sin(t), 1 + t + t^2/2) \\ \gamma'''(t) &= (-\cos(t), 1 + t) \\ \gamma^{iv}(t) &= (\sin(t), 1) \\ \gamma^v(t) &= (\cos(t), 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= (1 - t^2/2, e^t) \\ \sigma''(t) &= (-t, e^t) \\ \sigma'''(t) &= (-1, e^t) \\ \sigma^{iv}(t) &= (0, e^t) \\ \sigma^v(t) &= (0, e^t)\end{aligned}$$

Es compleix que

$$\gamma^{(j)}(0) = \sigma^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

i

$$\gamma^{(5)}(0) - \sigma^{(5)}(0) = (1, -1) \quad \text{és linealment independent amb } \gamma'(0).$$

Per tant, el problema **28** ens diu directament que $\gamma(s)$ i $\sigma(s)$ tenen, en $s = 0$, un contacte d'ordre 4.

- 30.** Calculeu l'ordre de contacte a l'origen de les dues corbes de $\mathbb{R}^2$ definides per $\alpha(t) = (t - \frac{t^3}{3}, t \cos t)$ i $\beta(t) = (t, \sin t)$.

Solució: Calculem les successives derivades

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1 - t^2, \cos(t) - t \sin(t)) \\ \alpha''(t) &= (-2t, -2 \sin(t) - t \cos(t)) \\ \alpha'''(t) &= (-2, -3 \cos(t) + t \sin(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= (1, \cos(t)) \\ \beta''(t) &= (0, -\sin(t)) \\ \beta'''(t) &= (0, -\cos(t))\end{aligned}$$

Es compleix que

$$\alpha^{(j)}(0) = \beta^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2$$

i

$$\alpha^{(3)}(0) - \beta^{(3)}(0) = (-2, -2) \quad \text{és linealment dependent amb } \gamma'(0) = (1, 1).$$

Observem que $(-2, -2) = \lambda(1, 1)$ amb $\lambda = -2$ (aquest λ el necessitem més endavant).

Per tant, el problema **28** no ens diu quin contacte tenen $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ en $s = 0$.

No obstant podem aplicar el problema **26** i reparametritzar adequadament les corbes per tal de que les derivades tercers també coincideixin.

Concretament reparametritzem $\alpha(t)$ amb el canvi

$$t = u - \lambda \frac{u^3}{3} = u + \frac{u^3}{3},$$

i recomencem el problema estudiant el contacte entre

$$\alpha(u) = (u + \frac{u^3}{3} - \frac{(u + u^3/3)^3}{3}, (u + \frac{u^3}{3})(\cos(u + \frac{u^3}{3})))$$

i $\beta(t)$.

Es compleix que³

$$\alpha^{(j)}(0) = \beta^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

i

$$\alpha^{(5)}(0) - \beta^{(5)}(0) = (-40, -55) - (0, 1) = (-40, 56) \quad \text{és linealment independent amb } \alpha'(0) = (1, 1).$$

Per tant, el problema **28** ens diu directament que $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ tenen, en $t = 0$ (quan $u = 0$, $t = 0$), un contacte d'ordre 4.

- 31.** Siguin $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ corbes definides en un mateix entorn del zero. Sigui s el paràmetre arc de $\alpha(t)$ i τ el paràmetre arc de $\beta(t)$, i suposem que valen 0 en $t = 0$. Demostreu que $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ tenen un contacte d'ordre k en $t = 0$ si i només si

$$\frac{d^r \alpha}{ds^r}(0) = \frac{d^r \beta}{d\tau^r}(0), \quad 0 \leq r \leq k,$$

i

$$\frac{d^{k+1} \alpha}{ds^{k+1}}(0) \neq \frac{d^{k+1} \beta}{d\tau^{k+1}}(0).$$

Solució: Suposem primerament que les derivades (respecte els respectius paràmetres arc) coincideixen en 0 fins l'ordre k i no en l'ordre $k + 1$. Derivant successivament la norma del vector tangent obtenim

$$\begin{aligned} \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) &= 1 \\ \alpha''(s) \cdot \alpha'(s) &= 0 \\ \alpha'''(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha''(s) \cdot \alpha''(s) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha^{(k+1)}(s) \cdot \alpha'(s) + \sum_{r=1}^{k-1} c_r \alpha^{(k+1-r)}(s) \cdot \alpha^{(r+1)}(s) &= 0 \end{aligned}$$

per a certes constants c_r . Anàlogament

$$\begin{aligned} \beta'(\tau) \cdot \beta'(\tau) &= 1 \\ \beta''(\tau) \cdot \beta'(\tau) &= 0 \\ \beta'''(\tau) \cdot \beta'(\tau) + \beta''(\tau) \cdot \beta''(\tau) &= 0 \\ &\vdots \\ \beta^{(k+1)}(\tau) \cdot \beta'(\tau) + \sum_{r=1}^{k-1} c_r \beta^{(k+1-r)}(\tau) \cdot \beta^{(r+1)}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

³Maple:

```
x := [t - t^3/3, t cos(t)];
y := [t, sin(t)];
seq(eval(diff(x - y, t$ i), t = 0), i = 1..5);
x := subs(t = t + 2t^3/6, x);
seq(eval(diff(x - y, t$ i), t = 0), i = 1..5);
```

amb les mateixes constants c_r que apareixen en les derivades de la norma de $\alpha(s)$.

Restant les últimes igualtats en $s = \tau = 0$ obtenim

$$(\alpha^{(k+1)} - \beta^{(k+1)})(0) \cdot \alpha'(0) = 0,$$

ja que les derivades de $\alpha(s)$ i $\beta(\tau)$, d'ordre inferior o igual a k , coincideixen en $s = \tau = 0$.

En particular aquests vectors són linealment independents, i pel problema **28**, el contacte és d'ordre k .

Atenció que la notació $\alpha^{(r)}(0)$ vol dir derivada r -èssima de $\alpha(s)$ respecte de s en $s = 0$, i la notació $\beta^{(r)}(0)$ vol dir derivada r -èssima de $\beta(\tau)$ respecte de τ en $\tau = 0$.

Recíprocament, suposem que $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ tenen un contacte d'ordre k en $t = 0$.

Això vol dir que existeixen parametritzacions $t = h(u)$ per a $\alpha(t)$ i $t = g(v)$ per a $\beta(t)$ tals que (suposarem $h(0) = g(0) = 0$)

$$\frac{d^{(r)}\alpha}{du}(0) = \frac{d^{(r)}\beta}{dv}(0), \quad r \leq k$$

i les derivades $k + 1$ ja són diferents.

Denotem per s el paràmetre arc de $\alpha(u)$ i per τ el paràmetre arc de $\beta(v)$.

Tindrem

$$\frac{ds}{du} = \left| \frac{d\alpha}{du} \right|; \quad \frac{d\tau}{dv} = \left| \frac{d\beta}{dv} \right|; \quad (2.7)$$

per tant

$$\frac{ds}{du}(0) = \frac{d\tau}{dv}(0).$$

De fet, derivant (2.7), obtenim

$$\frac{d^r s}{du^r}(0) = \frac{d^r \tau}{dv^r}(0), \quad r = 1, 2, \dots$$

Ara aplicarem la regla de la cadena. Si $r = 1$ tenim

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{du}(0) &= \frac{d\alpha}{ds}(0) \cdot \frac{ds}{du}(0) \\ \frac{d\beta}{dv}(0) &= \frac{d\beta}{d\tau}(0) \cdot \frac{d\tau}{dv}(0) \end{aligned}$$

per tant la igualtat

$$\frac{d\alpha}{du}(0) = \frac{d\beta}{dv}(0)$$

implica

$$\frac{d\alpha}{ds}(0) = \frac{d\beta}{d\tau}(0).$$

Si $r = 2$,

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}(0) = \frac{d^2\alpha}{ds^2}(0) \cdot \left(\frac{ds}{du}(0)\right)^2 + \frac{d^2s}{du^2}(0) \cdot \frac{d\alpha}{ds}(0)$$

$$\frac{d^2\beta}{dv^2}(0) = \frac{d^2\beta}{d\tau^2}(0) \cdot \left(\frac{d\tau}{dv}(0)\right)^2 + \frac{d^2\tau}{dv^2}(0) \cdot \frac{d\beta}{d\tau}(0)$$

per tant la igualtat

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}(0) = \frac{d^2\beta}{dv^2}(0)$$

implica

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(0) = \frac{d^2\beta}{d\tau^2}(0).$$

Observem que en anar fent les successives derivades sempre tindrem

$$\frac{d^r\alpha}{du^r}(0) = \frac{d^r\alpha}{ds^r}(0) \left(\frac{ds}{du}(0)\right)^r + \text{termes on apareixen derivades d'ordre inferior a } r \text{ de } \alpha,$$

i el mateix, amb els mateixos coeficients, per a $\frac{d^r\beta}{dv^r}(0)$. Per recurrència, tindrem doncs que la igualtat

$$\frac{d^r\alpha}{du^r}(0) = \frac{d^r\beta}{dv^r}(0)$$

implica

$$\frac{d^r\alpha}{ds^r}(0) = \frac{d^r\beta}{d\tau^r}(0).$$

I aquest procés el podem fer des de $r = 1$ fins $r = k$. La mateixa fórmula ens diu que

$$\frac{d^{k+1}\alpha}{du^{k+1}}(0) \neq \frac{d^{k+1}\beta}{dv^{k+1}}(0)$$

implica

$$\frac{d^{k+1}\alpha}{ds^{k+1}}(0) \neq \frac{d^{k+1}\beta}{d\tau^{k+1}}(0).$$

Capítol 3

Corbes a $\mathbb{R}^3$

- 32.** Considerem una corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ i un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Suposem que $\gamma(t_0)$ i $\gamma'(t)$ són ortogonals a $\vec{v}$ per a tot $t \in I$. Demostreu que $\gamma(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per a tot t .

Solució: Hem de veure que $\gamma(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per tot $t \in I$, o equivalentment que el producte escalar $\langle \gamma(t), \vec{v} \rangle$ és idènticament zero. Una estratègia estàndard és definir la funció $f(t) := \langle \gamma(t), \vec{v} \rangle$ i veure que s'anul·la idènticament. Com que f és diferenciable n'hi ha prou amb veure que la seva derivada, f' , és idènticament zero, amb la qual cosa f és constant, i per altra banda que $f(t_0) = 0$, ja que llavors la constant és zero. Aquesta darrera condició ens ve donada per la hipòtesi de que $\gamma(t_0)$ és ortogonal a $\vec{v}$. D'altra banda, la derivada de $f(t)$ és igual a

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \vec{v} \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle \gamma'(t), \vec{v} \rangle + \langle \gamma(t), \vec{v}' \rangle = \langle \gamma'(t), \vec{v} \rangle$$

que és idènticament zero gràcies a la hipòtesi de que $\gamma'(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per tot $t \in I$. Observem que la igualtat $(*)$ és fàcil de deduir de l'expressió en coordenades del producte escalar a $\mathbb{R}^2$ i s'utilitza molt sovint en aquest capítol.

- 33.** Considerem una corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ i un vector fix $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Demostreu que si $\alpha'(s)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per a cada $s \in I$ llavors la corba és plana.

Solució: Considerem la funció $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \vec{v}$. Clarament $f(s_0) = 0$ i $f'(s) = 0$ per tot s . Això implica $f(s) = 0$ per tot s , i hem acabat (la corba està inclosa en el pla que passa per $\alpha(s_0)$ amb vector normal $\vec{v}$).

- 34.** Tenim una corba parametritzada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que α'' és idènticament zero. Què podem dir de α ?

Solució: Recordem primer, que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable tal que $f'' = 0$ aleshores $f(t) = at + b$ amb $a, b \in \mathbb{R}$. De la mateixa manera, raonant coordenada a coordenada, $\gamma(t) = \vec{a}t + B$ amb $\vec{a}, B \in \mathbb{R}^3$. Per tant, γ és una recta (o un segment) si $\vec{a} \neq \vec{0}$ o un punt si $\vec{a} = \vec{0}$.

- 35.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura idènticament nul·la. Demostreu que $\alpha(I)$ està continguda en una línia recta.

Solució: Com és regular es pot reparametritzar per l'arc. Diguem s a aquest paràmetre. Com $\alpha''(s) = k(s)N(s)$, tenim $\alpha''(s) = 0$, que implica, integrant dos cops, $\alpha(s) = (a_1 + sa_2, b_1 + sb_2, c_1 + sc_2) = (a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2)$, que és una recta.

- 36.** Demostreu que una corba regular $\alpha(s)$ té imatge continguda en una recta si i només si $\alpha''(s)$ és proporcional a $\alpha'(s)$.

Solució: Suposem primerament que $\alpha(s)$ està continguda en una recta. Això vol dir que podem escriure

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + f(s)\vec{v}$$

on $f(s)$ és una certa funció i $\vec{v}$ és el vector director de la recta. Llavors $\alpha'(s) = f'(s)\vec{v}$, la qual cosa implica en particular $f'(s) \neq 0$ per a tot s . Tornant a derivar

$$\alpha''(s) = f''(s)\vec{v} = f''(s)\frac{\alpha'(s)}{f'(s)} = \frac{f''(s)}{f'(s)}\alpha'(s),$$

és a dir, la derivada segona és proporcional a la derivada primera, com volíem veure.

Recíprocament, si $\alpha''(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$, per a una certa funció $\lambda(s)$, tenim $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = 0$ i per tant (en el problema 47 es dóna la fórmula de la curvatura $k(s)$ respecte una paràmetre arbitrari), $k(s) = 0$. Ara apliquem el problema 35.

- 37.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular. Demostreu que si totes les seves rectes tangents passen per un punt fix, llavors la traça de α està continguda en una recta.

Solució: En primer lloc, reparametritzem $\alpha(s)$ per l'arc. Fent una translació si és necessari podem suposar que totes les rectes tangents passen per l'origen, és a dir, que per tot $s \in I$ existeix (un únic) $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s) = 0$. Observem que la funció $\lambda(s)$ (que està ben definida) és diferenciable, ja que $\lambda(s) = -\alpha(s) \cdot \alpha'(s)$.

Derivant obtenim

$$\alpha'(s) + \lambda'(s)\alpha'(s) + \lambda(s)\alpha''(s) = 0.$$

Si la curvatura $k(s)$ de $\alpha(s)$ fos diferent de zero en un punt, seria diferent de zero en un entorn d'aquest punt, i en aquest entorn tindríem

$$(1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0,$$

on $T(s)$ i $N(s)$ són els vectors tangent i normal principal unitaris. Recordem que per poder definir la normal principal necessitem $k(s) \neq 0$.

Com que $T(s)$ i $N(s)$ són linealment independents tenim

$$1 + \lambda'(s) = 0, \quad \lambda(s)k(s) = 0,$$

que, amb $k(s) \neq 0$, són dues equacions incompatibles. Per tant $k(s) = 0$ en tot punt i α és una recta.

- 38.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular tal que totes les seves rectes tangents són paral·leles a una recta fixa. Demostreu que la imatge de α està continguda en una recta.

Solució: Per hipòtesis, existeix una funció diferenciable no nul·la en cap punt, $\lambda(s)$, tal que $\alpha'(s) = \lambda(s)\vec{v}$, on $\vec{v}$ és el vector director de la recta donada. Derivant tenim $\alpha''(s) = \lambda'(s)\vec{v} = \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)}\alpha'(s)$, i estem en la situació del problema **36**.

- 39.** Sigui P un punt de $\mathbb{R}^3$ que no està contingut en la imatge de la corba $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sigui $s_0 \in I$ tal que el punt $\alpha(s_0)$ és el punt de la corba més proper a P . Demostreu que $\alpha'(s_0)$ és ortogonal al vector $\alpha(s_0) - P$.

Solució: Considerem la funció

$$h(s) = (\alpha(s) - P) \cdot (\alpha(s) - P).$$

Per hipòtesis, $h'(s_0) = 0$. Però aquesta derivada val

$$h'(s_0) = 2\alpha'(s_0) \cdot (\alpha(s_0) - P) = 0$$

i hem acabat.

- 40.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que α és plana si i només si tots els plans osculadors són paral·lels a un pla fix. Proveu també que α és plana si i només si la torsió de α és idènticament zero. Descriviu una corba regular continguda en dos plans.

Solució: Recordem primer que per poder parlar de pla osculador necessitem la condició de curvatura no nul·la.

Si la corba és plana, el pla que la conté és el pla osculador i hem acabat. Recíprocament, suposem que tots els plans osculadors són paral·lels, és a dir, que el vector binormal $B(s)$ és constant $B(0)$ (suposem que s és el paràmetre arc) i definim $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(0) \rangle$. Tenim que $f(0) = 0$ i que, $f'(s) = \langle \alpha'(s), B(0) \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = 0$. De manera que $f \equiv 0$ i α està continguda en el pla osculador de α pel punt $\alpha(0)$. La tercera equació de Frenet ens diu que $B(t)$ és constant si i només si $\tau(s) = 0$.

D'altra banda, la hipòtesi sobre la curvatura és necessària ja que existeixen exemples de corbes regulars que són localment planes sense estar contingudes en un únic pla, per exemple, dues corbes planes unides per un segment recte (observem que sobre aquest segment la curvatura és zero), vegeu el problema **41**.

- 41.** Considerem l'aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

- a) Comproveu que α és una corba regular i que la seva curvatura només s'anula als punts $t = 0$ i $t = \pm\sqrt{2/3}$.
- b) Comproveu que el límit dels plans osculadors quan t tendeix a 0 per la dreta és el pla $y = 0$ i que en canvi quan t tendeix a 0 per l'esquerra és el pla $z = 0$. Malgrat això la torsió es pot definir com $\tau \equiv 0$ encara que la corba no sigui plana.

Solució: a) És fàcil veure que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \alpha'(t) = (1, 0, 0).$$

Per tant la corba és regular.

Calculem la curvatura quan $t \geq 0$. En aquest cas

$$\alpha''(t) = (0, 0, e^{-1/t^2}(4t^{-6} - 6t^{-4})).$$

Per tant

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, -e^{-1/t^2}(4t^{-6} - 6t^{-4}), 0),$$

que vol dir que la curvatura s'anul·la si i només si $t = 0$ o $4t^{-6} - 6t^{-4} = 0$, i.e. $t = \sqrt{2/3}$.

Calculem ara la curvatura quan $t \leq 0$. En aquest cas

$$\alpha''(t) = (0, e^{-1/t^2}(4t^{-6} - 6t^{-4}), 0).$$

Per tant

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, -e^{-1/t^2}(4t^{-6} - 6t^{-4})),$$

que vol dir que la curvatura s'anul·la si i només si $t = 0$ o $4t^{-6} - 6t^{-4} = 0$, i.e. $t = -\sqrt{2/3}$.

- 42.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si totes les seves rectes normals passen per un mateix punt aleshores la traça de α està continguda en una circumferència.

Solució: Parametritzem α per l'arc. La hipòtesi de que la curvatura de $\alpha(s)$, $k(s)$, no s'anul·la mai implica que el vector normal $N(s)$ està definit per tot $s \in I$. Després de fer una translació si s'escau tenim que totes les rectes normals passen per l'origen, és a dir, que per tot $s \in I$ existeix un únic $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) + \lambda(s)N(s) = 0$. De la mateixa manera que al problema 37 es veu que la funció $s \mapsto \lambda(s)$ és diferenciable. Derivant llavors la expressió anterior obtenim que $\alpha' + \lambda N' + \lambda' N = 0$, és a dir, $(1 - \lambda k)T + \lambda' N - \lambda \tau B = 0$. Per tant, $\lambda(s)$ és constant no nul·la, $k(s) = 1/\lambda$ també i $\tau(s) \equiv 0$. Com que la torsió és zero, pel problema 40, la corba és plana. I les corbes planes de curvatura constant són, pel problema 12, apartat c), circumferències.

- 43.** Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb $k(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$. Demostreu que si tots els plans osculadors de α passen per un punt fix llavors la corba és plana.

Solució: Per hipòtesis, existeixen funcions $\lambda(s)$ i $\mu(s)$, que suposarem diferenciables, tals que

$$P = \alpha(s) + \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s).$$

Derivant

$$\vec{0} = T + \lambda(s)k(s)N(s) + \lambda'(s)T(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)(-k(s)T + \tau(s)B(s)).$$

Equival al sistema

$$\begin{aligned} 1 + \lambda'(s) - k(s)\mu(s) &= 0 \\ \lambda(s)k(s) + \mu'(s) &= 0 \\ \mu(s)\tau(s) &= 0 \end{aligned}$$

D'aquí deduïm que $\tau(s) = 0$ per tot s , i per tant la corba és plana. En efecte, si $\tau(s_0) \neq 0$, llavors $\tau(s) \neq 0$ en un petit entorn obert de s_0 . En aquest entorn ha de ser, per la tercera equació, $\mu(s) = 0$. I, per tant, també $\mu'(s) = 0$ en aquest entorn. Però llavors la segona equació ens diu $\lambda(s) = 0$ i la primera $1 + \lambda'(s) = 0$, contradicció.

44. Comproveu que la corba $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ té la imatge sobre un con de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la velocitat i l'acceleració de α en el vèrtex del con.

Solució: Aquesta corba està continguda en el con $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. $\alpha(0)$ és el vèrtex del con. Obtenim $\alpha'(0) = (1, 0, 1)$ i $\alpha''(0) = (0, 2, 0)$.

3.1 Paràmetre arc

45. Determineu una parametrització per l'arc de les corbes definides per

- a) $y = \log x$
- b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
- c) $\alpha(t) = (e^t \sin t, 1, e^t \cos t)$
- d) $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$
- e) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$
- f) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Solució:

- a) La corba és $\alpha(t) = (t, \ln t)$. Així $\alpha'(t) = (1, 1/t)$ i $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + (1/t)^2}$. Per tant

$$s(t) = \int_1^t \sqrt{1 + (1/u)^2} du = \sqrt{1 + t^2} - \arg \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right) + \arg \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}.$$

Hem agafat l'origen de longituds en $t = 1$ ja que en $t = 0$ aquesta corba no està definida.

Però ara som incapaços d'aïllar t en funció de s d'aquesta expressió. És a dir, hem sabut calcular el paràmetre arc explícitament, però no hem sabut reparametritzar la corba directament per l'arc.

b) La corba és $\alpha(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$. Per tant $\alpha'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$ i $|\alpha'(t)| = 3a \sin t \cos t$. El paràmetre arc és

$$s(t) = \int_0^t 3a \sin u \cos u \, du = \frac{3a}{2} \sin^2 t$$

Podem aïllar

$$t = \arcsin \left(\sqrt{\frac{2s}{3a}} \right).$$

La corba parametritzada per l'arc és doncs

$$\alpha(s) = \left(a \cos^3 \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{2s}{3a}} \right) \right), a \sin^3 \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{2s}{3a}} \right) \right) \right) = \left(a \left(\frac{3a-2s}{3a} \right)^{3/2}, a \left(\frac{2s}{3a} \right)^{3/2} \right).$$

c) Directament es veu que $|\alpha'(t)| = e^{2t}$ i per tant

$$s(t) = \int_0^t e^{2u} \, du = \frac{1}{2} e^{2t}.$$

Aïllant tenim $t = \ln(\sqrt{2s})$ i la corba parametritzada per l'arc és

$$\alpha(s) = (\sqrt{2s} \sin(\ln(\sqrt{2s})), 1, \sqrt{2s} \cos(\ln(\sqrt{2s}))).$$

d) Directament es veu que $|\alpha'(t)| = \sqrt{2} \cosh(t)$ i per tant

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} \cosh(u) \, du = \sqrt{2} \sinh(t).$$

Aïllant tenim $t = \operatorname{argsinh}(\frac{s}{\sqrt{2s}})$ i la corba parametritzada per l'arc és

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \operatorname{argsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

e) Directament es veu que $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ i per tant

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} \, du,$$

integral que no és expressable per funcions elementals.

f) Directament es veu que $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$ i per tant

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u)} \, du,$$

integral que no és expressable per funcions elementals.

46. Espiral logarítmica. Considerem la corba plana $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$$

amb $b < 0 < a$.

a) Estudieu el comportament de α quan t tendeix a $+\infty$.

b) Proveu que $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$ i que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds$$

és finit. Es a dir que α té longitud finita a tot interval de la forma $[t_0, \infty)$.

Solució: a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = (0, 0)$ ja que $b < 0$.

b) $\alpha'(t) = (abe^{bt} \cos(t) - ae^{bt} \sin(t), abe^{bt} \sin(t) + ae^{bt} \cos(t))$, per tant, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha'(t) = (0, 0)$ ja que $b < 0$. La norma de la derivada és

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 b^2 e^{2bt} + a^2 e^{2bt}} = ae^{bt} \sqrt{1 + b^2},$$

per tant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(s)| ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t ae^{bt} \sqrt{1 + b^2} ds = -\frac{a}{b} \sqrt{1 + b^2} e^{bt_0}$$

que és un número finit positiu.

3.2 Curvatura i torsió

47. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular de curvatura mai nul·la. Sigui $v(t) = |\alpha'(t)|$ la seva velocitat escalar. Proveu que

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = (T, N, B) \begin{pmatrix} v & * & * \\ 0 & kv^2 & * \\ 0 & 0 & -\tau kv^3 \end{pmatrix}$$

i deduiu les fórmules

$$k = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{v^3} \quad \tau = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

$$T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

Solució: Sigui $t_0 \in I$. Considerem el paràmetre arc associat a t_0 :

$$s = l(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi,$$

és a dir, $l(t)$ és la longitud de l'arc que va de $\alpha(t_0)$ fins a $\alpha(t)$. La funció 'longitud' $l : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ és una funció estrictament creixent ja que $\frac{dl}{dt}(t) = v(t) > 0$. Per tant, té una inversa diferenciable $l^{-1} : J \rightarrow I$. Definim la reparametrització de α respecte del paràmetre arc com la corba $\alpha_1 = \alpha \circ l^{-1}$. Equivalentment $\alpha_1(s) = \alpha(l^{-1}(s))$, o

$$\alpha_1(s) = \alpha(t) \quad \text{amb} \quad s = l(t).$$

Observem que aleshores $\alpha_1 \circ l = \alpha$.

Comprovem que α_1 està parametritzada per l'arc utilitzant la regla de la cadena¹ i el teorema de la funció inversa:

$$|\alpha'_1(s)| = |\alpha'(l^{-1}(s))| |(l^{-1})'(s)| = v(l^{-1}(s)) \frac{1}{l'(l^{-1}(s))} = v(l^{-1}(s)) \frac{1}{v(l^{-1}(s))} = 1.$$

Definim el triedre de Frenet, la curvatura i la torsió de α com les de α_1 composades amb la funció $s_{t_0}(t)$:

$$\begin{aligned} T_\alpha(t) &:= T_{\alpha_1}(l(t)) & k_\alpha(t) &:= k_{\alpha_1}(l(t)) \\ N_\alpha(t) &:= N_{\alpha_1}(l(t)) & \tau_\alpha(t) &:= \tau_{\alpha_1}(l(t)) \\ B_\alpha(t) &:= B_{\alpha_1}(l(t)) \end{aligned}$$

Aplicant llavors la regla de la cadena obtenim

$$\alpha'(t) = \alpha'_1(l(t)) \cdot l'(t) = T_{\alpha_1}(l(t)) \cdot v(t)$$

ja que com que $\alpha_1(s)$ està parametritzada per l'arc la seva derivada és directament el vector tangent.

De la mateixa manera deduïm que

$$\alpha''(t) = T'_{\alpha_1}(l(t)) \cdot v(t)^2 + T_{\alpha_1}(l(t)) \cdot v'(t).$$

Tenint en compte Frenet per a la corba $\alpha_1(s)$ tenim

$$\alpha''(t) = k_{\alpha_1}(l(t)) \cdot v(t)^2 \cdot N_{\alpha_1}(l(t)) + v'(t) \cdot T_{\alpha_1}(l(t)), \quad (3.1)$$

és a dir,

$$\alpha''(t) = k_\alpha(t) \cdot v(t)^2 \cdot N_\alpha(t) + v'(t) \cdot T_\alpha(t).$$

Tornant a derivar (3.1) i tornant a usar Frenet per a $\alpha_1(s)$ tenim

$$\alpha'''(t) = \left(v''(t) - k_\alpha(t)^2 v(t)^3 \right) T_\alpha(t) + \left(3v'(t)v(t)k_\alpha(t) + (v^2(t)k_\alpha(t))' \right) N_\alpha(t) - v(t)^3 k_\alpha(t) \tau_\alpha(t) B_\alpha(t)$$

Les fórmules es dedueixen de forma simple de les anteriors igualtats.

Nota: Observeu que procedint d'aquesta manera trobem primer T , després B i a continuació N amb la fórmula $N = B \wedge T$. Però $N(t)$ és un vector del pla generat per $\alpha'(t)$ i $\alpha''(t)$, com acabem de veure quan hem aplicat la regla de la cadena, de manera que coincideix amb el vector ortonormal a $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ que s'obté pel mètode de Gram-Schmidt aplicat a la base $\alpha'(t), \alpha''(t)$:

¹ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$N(t) = \frac{\alpha''(t) + \lambda T(t)}{|\alpha''(t) + \lambda T(t)|}$$

amb λ elegida de manera que $T(t)$ i $N(t)$ siguin ortogonals. Això vol dir

$$\lambda = -\alpha''(t) \cdot T(t) = -\frac{\alpha''(t) \cdot \alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = -v'(t).$$

Resumint

$$N(t) = \frac{\alpha''(t) - v'(t)T(t)}{|\alpha''(t) - v'(t)T(t)|}. \quad (3.2)$$

Si el paràmetre és arc, $v'(t) = 0$ i tenim $N(t) = \frac{T'(t)}{|\alpha''(t)|}$, és a dir,

$$T'(t) = k(t)N(t) \quad \text{amb} \quad k(t) = |\alpha''(t)|,$$

que és la primera fórmula de Frenet.

48. Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de les corbes següents:

- a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.
- b) $\alpha(t) = (t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$. Proveu a més que la corba és plana i determineu el pla que la conté.
- c) $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.
- d) $\alpha(t) = (2t, \log t, t^2)$.
- e) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. En aquest cas proveu que $k = \pm\tau$.

Solució: Observem que estem en situació d'aplicar les fórmules de l'exercici anterior.

(a) Si $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ llavors

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, 2t, 3t^2) \\ \alpha''(t) &= (0, 2, 6t) \\ \alpha'''(t) &= (0, 0, 6) \\ v(t) &= (1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2} \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (6t^2, -6t, 2) \\ |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2 &= 36t^4 + 36t^2 + 4 \\ \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= 12 \end{aligned}$$

D'aquesta manera tenim que la curvatura i la torsió de α són

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{2(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}} \\ \tau(t) &= \frac{-3}{1+9t^2+9t^4}.\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned}T_\alpha(t) &= \frac{1}{(1+4t^2+9t^4)^{1/2}}(1, 2t, 3t^2) \\ B_\alpha(t) &= \frac{1}{(1+9t^2+9t^4)^{1/2}}(3t^2, -3t, 1) \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+13t^2+54t^4+117t^6+81t^8}}(-9t^3-2t, -9t^4+1, 6t^3+3t)\end{aligned}$$

(b) Tenim que

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \left(t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right) \\ \alpha'(t) &= \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2}-1\right) \\ \alpha''(t) &= \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \\ \alpha'''(t) &= \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right) \\ v(t) &= \frac{\sqrt{2(1+t^2+t^4)}}{t^2} \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \frac{2}{t^3}(1, -1, 1) \\ \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= 0\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{\sqrt{3}t^3}{\sqrt{2}(1+t^2+t^4)^{3/2}} \\ \tau(t) &\equiv 0 \\ B(t) &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\end{aligned}$$

Així, la corba α és plana, el pla on està continguda és el pla osculador de tot (qualsevol) punt. Per exemple, si $t = 1$, $\alpha(1) = (1, 0, 0)$ i el pla osculador pel punt $\alpha(1)$ és $x - y + z = 1$. També es pot verificar directament que

$$t - \frac{1-t}{t} + \frac{1-t^2}{t} = \frac{t^2 - 1 + t + 1 - t^2}{t} = 1.$$

(c) En aquest cas

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t) \\
 \alpha'(t) &= (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \\
 \alpha''(t) &= (e^t, e^{-t}, 0) \\
 \alpha'''(t) &= (e^t, -e^{-t}, 0) \\
 v(t) &= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \\
 \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2) \\
 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)| &= \sqrt{2}v(t) \\
 \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= -2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \\
 \tau(t) &= \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \\
 T(t) &= \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}}(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \\
 B(t) &= \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}}(-e^{-t}, e^t, \sqrt{2}) \\
 N(t) &= \frac{1}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}(\sqrt{2}(e^t - e^{-t}), \sqrt{2}(e^t + e^{-t}), e^{-2t} - e^{2t})
 \end{aligned}$$

(d) Anàleg.

(e) En aquest cas

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3) \\
 \alpha'(t) &= (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \\
 \alpha''(t) &= (-6t, 6, 6t) \\
 \alpha'''(t) &= (-6, 0, 6) \\
 v(t) &= \sqrt{2}(3 + 3t^2) \\
 \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= 36(t^2 - 1, -2t, 1 + t^2) \\
 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2 &= \frac{3}{2}(1 + t^2)^2 \\
 \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= 6^3
 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \frac{1}{3(1 + t^2)^2} \\
 \tau(t) &= \frac{-1}{3(1 + t^2)^2}
 \end{aligned}$$

49. Sigui $\alpha(s)$ una corba tal que curvatura i torsió no s'anul·len mai. Demostreu que el coneixement del vector binormal $B(s)$ determina la curvatura $k(s)$ i el valor absolut de la torsió $\tau(s)$.

Solució: Podem suposar que la corba està parametritzada per l'arc. Fent servir el triedre de Frenet sabem que $B' = \tau \cdot N$ (sobreentenem en el punt s) i per tant $|\tau| = |B'|$.

Derivant un altre cop

$$B'' = \tau' \cdot N + \tau(-k \cdot T - \tau \cdot B) = -k \cdot \tau \cdot T + \tau' \cdot N - \tau^2 B.$$

Aleshores, com que $B \wedge B' = \tau T$ tenim

$$\left\langle B'', \frac{B \wedge B'}{\|B \wedge B'\|} \right\rangle = \pm k \cdot \tau \quad ; \quad k = \left| \frac{1}{\tau} \left\langle B'', \frac{B \wedge B'}{\|B \wedge B'\|} \right\rangle \right|.$$

És a dir, hem sabut calcular k i $|\tau|$ usant el vector binormal B i les seves derivades.

50. Sigui $\alpha(t)$ una corba regular i t_0 un valor del paràmetre pel qual la curvatura $k(t_0) \neq 0$. Sigui π la projecció ortogonal sobre el pla osculador de α en t_0 . Proveu que el valor $k_0(t_0)$ de la curvatura de la corba projectada $\alpha_0 = \pi \circ \alpha$ coincideix amb $k(t_0)$.

Solució: És molt fàcil veure que, respecte de la referència de Frenet en $s = 0$, on s és el paràmetre arc, la corba és

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2}{6}s^3 + \dots \\ y(s) &= \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + \dots \\ z(s) &= \frac{k\tau}{6}s^3 + \dots \end{aligned}$$

on k, τ són la curvatura i la torsió de la corba en $s = 0$, i k' és la derivada de la curvatura en $s = 0$. Projectar sobre el pla osculador vol dir considerar la corba $\gamma(s) = (x(s), y(s)) = (s - \frac{k^2}{6}s^3 + \dots, \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + \dots)$. Però clarament $\gamma'(0) = (1, 0)$ i $\gamma''(0) = (0, k)$ de manera que la curvatura en $s = 0$ de $\gamma(s)$ és igual a k , justament la curvatura de α en $s = 0$.

Podem interpretar la torsió de la corba α com el que fa pujar (torsió negativa o moviment dextrogi) o baixar (torsió positiva o moviment levogir) la corba des del pla osculador (respecte al vector binormal). Es pot fer un quadre amb entrades $b > 0, b < 0, c > 0, c < 0$ que il·lustri aquestes nocions en el cas de l'hèlix del problema 56. Observem també que si reparametritzem una corba canviant-li el sentit llavors els vectors tangent i binormal canvien de signe i el vector normal continua sent el mateix.

51. Sigui $\alpha(s)$ una corba regular. Suposem que la curvatura k i la torsió τ no s'anul·len en cap punt de la corba.

a) Demostreu que

$$\frac{(N \times N') \cdot N''}{\|N'\|^2} = \frac{\left(\frac{k}{\tau}\right)'}{\left(\frac{k}{\tau}\right)^2 + 1} \quad (3.3)$$

- b) Demostreu que si s és el paràmetre arc, es coneix N en tot punt i en s_0 coneixem el quocient $\frac{k(s_0)}{\tau(s_0)}$, llavors podem calcular k i τ en tot punt de la corba (i per tant, la corba, llevat de moviments rígids).

Solució:

- (a) En un primer moment suposarem que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc. Després estendrem el resultat amb un paràmetre qualsevol. Per les fórmules de Frenet tenim que

$$\begin{aligned} N' &= -kT - \tau B \\ N'' &= -k'T - (k^2 + \tau^2)N - \tau'B \end{aligned}$$

Llavors,

$$\begin{aligned} |N'|^2 &= k^2 + \tau^2 \\ N \times N' &= kB - \tau T \\ \langle N \times N', N'' \rangle &= k'\tau - \tau'k \end{aligned}$$

Així,

$$\frac{\langle N \times N', N'' \rangle}{|N'|^2} = \frac{\left(\frac{k}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2}$$

D'altra banda, si s no és el paràmetre arc de α aleshores les fórmules de Frenet es veuen afectades de un factor multiplicatiu, la velocitat v de α (això ho podem deduir del problema 47), de manera que, per la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} N' &= v\dot{N} \\ N'' &= (v\dot{N})' = v'\dot{N} + v^2\ddot{N} \\ \langle N \times N', N'' \rangle &= v^3\langle N \times \dot{N}, \ddot{N} \rangle \\ \left(\frac{k}{\tau}\right)' &= v\left(\frac{k}{\tau}\right) \end{aligned}$$

on el punt denota la derivada respecte del paràmetre arc i la prima la derivada respecte del paràmetre s . En particular, doncs,

$$\frac{\langle N \times \dot{N}, \ddot{N} \rangle}{|\dot{N}|^2} = \frac{\left(\frac{k}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2}$$

- (b) Sigui s el paràmetre arc. Conèixer $N(s)$ per a tot s , vol dir conèixer el primer terme de l'equació (3.3). Diguem-li $f(s)$. Llavors tenim l'equació diferencial

$$\frac{y'}{1 + y^2} = f(s)$$

amb $y(s) = k(s)/\tau(s)$, d'integració immediata i que ens dóna $y(s) = \tan \int f(s) + C$, i la constant d'integració C queda determinada per la condició inicial (el valor $y(s_0)$ és conegut). Coneixem doncs el quocient $k(s)/\tau(s)$. Però, a més, sabem que $|N'(s)|^2 = k(s)^2 + \tau(s)^2$. De manera que també coneixem la suma $k(s)^2 + \tau(s)^2$, per a tot s . Aquests dos valors (el quocient i la suma de quadrats) determinen totalment $k(s)$ i $\tau(s)$, i per tant, llevat de moviments rígids, la corba.

- 52.** Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = 1/s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi pel punt $(1, 0, 0)$ quan $s = 1$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Solució: Com que la corba es plana sabem que $k(s) = \theta'(s)$ on $\theta(s)$ és l'angle que forma la tangent a la corba amb la direcció $(1, 0)$. D'aquesta manera $\gamma'(s) \cdot (1, 0) = x'(s) = \cos \theta$.

En el nostre cas, doncs, $\theta'(s) = 1/s$, que integrant i tenint en compte que $\theta(1) = 0$, ens dóna

$$\theta(s) = \ln s.$$

Finalment, integrant les expressions $x'(s) = \cos(\ln s)$ i $y'(s) = \sin(\ln s)$ i tenint en compte les condicions inicials obtenim

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{2}(\sin(\ln s) + \cos(\ln s)) + \frac{1}{2}, \frac{s}{2}(\sin(\ln s) - \cos(\ln s)) - \frac{1}{2}, 0 \right).$$

- 53.** Sigui α una corba que té curvatura constant $\kappa = 3$ i torsió constant $\tau = 4$ i quan $s = 0$ passa per $(0, 0, 0)$ amb triedre de Frenet $T(0) = (1, 0, 0)$, $N(0) = (0, 1, 0)$, $B(0) = (0, 0, 1)$. Trobeu la parametrització per l'arc de α .

Solució: Sabem que per recuperar la corba a partir de la curvatura i la torsió hem de resoldre el sistema de 9 equacions i 9 incògnites següent

$$\begin{aligned} x'_1 &= 3x_4 \\ x'_2 &= 3x_5 \\ x'_3 &= 3x_6 \\ x'_4 &= -3x_1 - 4x_7 \\ x'_5 &= -3x_2 - 4x_8 \\ x'_6 &= -3x_3 - 4x_9 \\ x'_7 &= 4x_4 \\ x'_8 &= 4x_5 \\ x'_9 &= 4x_6 \end{aligned}$$

on estem pensant

$$T(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)), N(s) = (x_4(s), x_5(s), x_6(s)), B(s) = (x_7(s), x_8(s), x_9(s)).$$

Així

$$x_4'' = -9x_4 - 16x_4 = -25x_4$$

d'on $x_4(s) = A_4 \cos 5s + B_4 \sin 5s$, amb la condició inicial $x_4(0) = 0$, és a dir, $x_4(s) = B_4 \sin 5s$. Però com $x_4'(0) = -3x_1(0) - 4x_7(0) = -3$, ha de ser $B_4 = -3/5$. Per tant $x_1(s) = 3 \int x_4(s) ds = \frac{9}{25} \cos 5s + C$, que ajustant la constant ens dóna $x_1(s) = \frac{9}{25} \cos 5s + \frac{16}{25}$; finalment la coordenada $x(s)$ de la corba buscada és

$$x(s) = \int x_1(s) ds = \frac{9}{125} \sin 5s + \frac{16s}{25}.$$

Anàlogament

$$x_5'' = -9x_5 - 16x_5 = -25x_5$$

d'on $x_5(s) = A_5 \cos 5s + B_5 \sin 5s$, amb la condició inicial $x_5(0) = 1$, és a dir, $x_5(s) = \cos 5s + B_5 \sin 5s$. Però com $x_5'(0) = -3x_2(0) - 4x_8(0) = 0$, ha de ser $B_5 = 0$. Per tant $x_2(s) = 3 \int x_5(s) ds = \frac{3}{5} \sin 5s$, i finalment la coordenada $y(s)$ de la corba buscada és

$$y(s) = \int x_2(s) ds = -\frac{3}{25} \cos 5s + \frac{3}{25}.$$

I finalment

$$x_6''(s) = -9x_6 - 16x_6 = -25x_6$$

d'on $x_6(s) = A_6 \cos 5s + B_6 \sin 5s$, amb la condició inicial $x_6(0) = 0$, és a dir, $x_6(s) = B_6 \sin 5s$. Però com $x_6'(0) = -3x_3(0) - 4x_9(0) = -4$, ha de ser $B_6 = -4/5$. Per tant $x_3(s) = 3 \int x_6(s) ds = \frac{12}{25} \cos 5s - \frac{12}{25}$, i finalment la coordenada $z(s)$ de la corba buscada és

$$z(s) = \int x_3(s) ds = \frac{12}{125} \sin 5s - \frac{12s}{25}.$$

Resumint, la corba buscada és

$$\gamma(s) = \frac{1}{125}(9 \sin 5s + 80s, -15 \cos 5s + 15, 12 \sin 5s - 60s).$$

Segon mètode, només vàlid si intueixes que pot ser una hèlix. Sabem que l'hèlix

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

té curvatura i torsió

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Per tant, prenent $a = 3/25$, $b = -4/25$ tenim una hèlix amb curvatura $k = 3$ i $\tau = 4$ com volíem, però el problema és que en $t = 0$ la referència de Frenet d'aquesta corba és

$$\begin{aligned} T(0) &= (0, 3/5, -4/5) \\ N(0) &= (-1, 0, 0) \\ B(0) &= (0, -4/5, 3/5) \end{aligned}$$

i no pas la demanada (volem que sigui la base canònica). Tampoc passa per l'origen quan $s = 0$ ja que $\gamma(0) = (3/25, 0, 0)$ però això es pot arreglar fàcilment fent una translació i considerant la corba $(a \cos t - 3/25, a \sin t, bt)$.

Considerem el moviment rígid donat per la matriu M tal que

$$M \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta igualtat ens dóna directament (calculant la inversa que és igual a la transposta ja que estem manipulant matrius ortogonals)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Apliquem ara M a la hèlix i trobem la corba demanada

$$\gamma(t) = M \begin{pmatrix} \frac{3}{25} \cos t - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} \sin t \\ -\frac{4}{25} t \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 9 \sin t + 16t \\ -15 \cos t + 15 \\ 12 \sin t - 12t \end{pmatrix}$$

Que, un cop reparametritzada per l'arc, és a dir posant $t = 5s$, ens dóna exactament la corba trobada abans.

- 54.** Trobeu totes les corbes parametritzades per l'arc $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tinguin vector binormal $B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1)$ i torsió positiva.

Solució: Utilitzem el triedre de Frenet. Tenim

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{2}(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0) = \tau \cdot N(s)$$

d'on $\tau = 1/2$ (ja que imposem que sigui positiva) i per tant $N(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$. Aleshores

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 0) = -k(s) \cdot T(s) - \frac{1}{2}B(s)$$

d'on

$$k \cdot T(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -1)$$

Tenim $T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -1)$ i $k = \frac{1}{2}$. Així doncs

$$\alpha(s) = (-\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}) + (x_0, y_0, z_0)$$

on $\alpha(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

3.3 Hèlixs

55. Una *hèlix* és una corba tal que les seves tangents formen un angle constant amb una direcció fixada (aquesta és la direcció de l'eix de l'hèlix).
- Proveu que α és una hèlix si i només si les seves normals són paral·leles a un pla fixat.
 - Demostreu que si la torsió no s'anul·la, llavors $\frac{k(s)}{\tau(s)} = \text{cte}$ caracteritza el fet de ser hèlix.
 - Quin invariant permet distingir una hèlix dextrògira d'una hèlix levògira?
 - Proveu que tota hèlix γ es pot escriure com $\gamma(s) = \beta(s) + s\vec{v}$ on $\beta(s)$ és una corba plana continguda en un pla perpendicular a l'eix de γ .
 - Comproveu que la corba $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ és una hèlix (s'anomena *hèlix circular*). Trobeu l'eix i la corba plana associada.
 - Vegeu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors d'una hèlix circular és una altra hèlix circular coaxial i del mateix pas.

Solució:

- (a) Suposem que γ està parametritzada per l'arc. Tenim $T(t) = \gamma'(t)$ i $N(t) = \frac{\gamma''(t)}{k(t)}$ si $k(t) \neq 0$. Suposem que $T(t) \neq 0$ i $k(t) \neq 0$ per a tot t , de forma que tinguin sentit les dues afirmacions en tot punt. Sigui $\vec{a}$ el vector unitari director de l'eix de l'hèlix. La condició d'hèlix és $T(s) \cdot \vec{a} = c$, amb c una constant. Aleshores derivant

$$(T \cdot \vec{a})' = kN \cdot \vec{a} = 0,$$

veiem clarament l'equivalència.

- (b) Suposem com abans que la corba γ està parametritzada per l'arc i sigui $\vec{a}$ un vector unitari en la direcció de l'eix. Aleshores $T \cdot \vec{a} = \cos \varphi_0$ i derivant obtenim $kN \cdot \vec{a} = 0$. Per tant si la curvatura no s'anul·la tenim $N \cdot \vec{a} = 0$. Així doncs, $\vec{a} = T \cos \varphi_0 + B \sin \varphi_0$, gràcies a que $\vec{a}$ és un vector unitari. Derivant l'expressió anterior i utilitzant el triedre de Frenet tenim $0 = k(t)N \cos \varphi_0 + \tau(t)N \sin \varphi_0$ d'on $\frac{k(t)}{\tau(t)} = -\tan \varphi_0$. Recíprocament, si $\frac{k}{\tau} = \text{cte} = -\tan \theta_0$ tenim que $T \cos \theta_0 + B \sin \theta_0$ és un vector constant, sigui $\vec{a}$, d'on $T \cdot \vec{a} = \cos \theta_0$ és constant.
- (c) El signe de la torsió.
- (d) Si $\vec{a} \cdot T(s) = 0$, per tot s , aleshores $\gamma(s)$ és una corba plana continguda al pla perpendicular a $\vec{a}$. Suposem doncs que $\vec{a} \cdot T(s) = c \neq 0$, amb $c \in \mathbb{R}$. Projectem $\gamma(s)$ sobre el pla Π ortogonal a $\vec{a}$ que passa per un punt donat $\gamma(0)$. Pensem s com el paràmetre arc de manera que Π passa pel punt on comencem a mesurar la longitud de la corba ($s = 0$).

Concretament, busquem una funció $\lambda(s)$ tal que

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\vec{a}$$

estigui continguda a Π . El vector tangent a $\beta(s)$ ha de ser ortogonal a $\vec{a}$. Per tant, derivant i multiplicant per $\vec{a}$ tenim

$$0 = \gamma'(s) \cdot \vec{a} + \lambda'(s) \vec{a} \cdot \vec{a} = T(s) \cdot \vec{a} + \lambda'(s),$$

és a dir, $\lambda'(s) = -c$. Per tant $\lambda(s) = -cs + d$, amb $d \in \mathbb{R}$.

Si imposem que $\beta(0) \in \Pi$, ha de ser $d = 0$, de manera que

$$\beta(s) = \gamma(s) - cs\vec{a}.$$

Dient $\vec{v} = c\vec{a}$ tenim

$$\gamma(s) = \beta(s) + s\vec{v}$$

com volíem.

(e) La comprovació és immediata un cop ens adonem que aquesta corba està sobre un cilindre recte. Així, la direcció de l'eix és ha de ser la direcció donada pel vector $\vec{a} = (0, 0, 1)$. Comprovem que forma angle constant amb les rectes tangents. En efecte, el vector unitari tangent és $T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b)$ i per tant $\vec{a} \cdot T = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La corba plana associada és per tant $\beta(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$.

(f) Calculem primer la curvatura de $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ \gamma''(t) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0) \\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ k(t) &= \frac{a}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Per tant la corba dels centres de curvatura és

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{a^2 + b^2}{a}(-\cos t, -\sin t, 0) = \left(-\frac{b^2}{a} \cos t, -\frac{b^2}{a} \sin t, bt\right)$$

que és una hèlix sobre el cilindre $x^2 + y^2 = b^4/a^2$, del mateix pas de rosca $2\pi b$ que la hèlix inicial.

56. Considerem la corba $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c}\right)$, amb $s \in \mathbb{R}$ i $c^2 = a^2 + b^2$.

- Demostreu que α està parametritzada per l'arc.
- Determineu la curvatura i la torsió de α .
- Determineu el pla osculador.

- d) Demostreu que les rectes que tenen direcció $N(s)$ i passen per $\alpha(s)$ tallen l'eix Oz amb angle constant igual a $\frac{\pi}{2}$.

Solució:

- (a) Com que $\alpha'(s) = (-\frac{a}{c} \sin(\frac{s}{c}), \frac{a}{c} \cos(\frac{s}{c}), \frac{b}{c})$ tenim que $|\alpha'(s)| = \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^{1/2} = 1$, per tant, $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc.

- (b) D'altra banda

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = \frac{|a|}{c^2} \left(-sg(a) \cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = k(s)N(s)$$

Per tant, $k(s) = \frac{|a|}{c^2}$. El vector binormal $B(s) = T(s) \times N(s) = sg(a) \left(\frac{b}{c} \sin(\frac{s}{c}), -\frac{b}{c} \cos(\frac{s}{c}), \frac{a}{c}\right)$

$$B'(s) = -\frac{b}{c^2} (-sg(a) \cos(\frac{s}{c}), \sin(\frac{s}{c}), 0) = \tau(s)N(s),$$

d'on $\tau(s) = -\frac{b}{c^2}$.

- (c) El pla osculador en el punt $\alpha(s)$ es calcula mitjançant $\alpha(s) + \langle T(s), N(s) \rangle_{\mathbb{R}}$ i té per equació

$$b \sin \frac{s}{c} \left(x - a \cos \frac{s}{c}\right) - b \cos \frac{s}{c} \left(y - a \sin \frac{s}{c}\right) + a \left(z - b \frac{s}{c}\right) = 0.$$

- (d) El cosinus de l'angle $\theta(s)$ que forma el vector $N(s)$ amb $(0, 0, 1)$ és $\langle N(s), (0, 0, 1) \rangle \equiv 0$, per la qual cosa $\theta(s) \equiv \frac{\pi}{2}$.

3.4 Indicatrius

57. Sigui α una corba regular parametritzada per l'arc, amb curvatura mai nul·la. Definim la seva *indicatriu tangent* com la corba esfèrica $\alpha_1 := \alpha'$. Trobeu la curvatura k_1 i la torsió τ_1 de α_1 en funció de la curvatura k i la torsió τ de α . Deduïu que α_1 és plana si i només si $\frac{\tau}{k}$ és constant. Doneu una definició d'*indicatriu binormal* i deduïu fórmules anàlogues.

Solució: Utilitzarem la següent notació: les lletres sense subíndex es referiran a la corba α i en canvi les lletres amb subíndex 1 a la corba α_1 . A partir de les fórmules de Frenet de α obtenim

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha'' = kN \\ v_1 &= k \\ \alpha_1'' &= k'N + kN' = -k^2T + k'N - k\tau B \\ \alpha_1''' &= (-k^2)'T - k^2T' + k''N + k'N' - (k\tau)'B - k\tau B' \\ &= -3kk'T + (k'' - k^3 - k\tau^2)N - (2k'\tau + k\tau')B \\ \alpha_1' \times \alpha_1'' &= k^3B - k^2\tau T \\ |\alpha_1' \times \alpha_1''|^2 &= k^4(k^2 + \tau^2) \\ \langle \alpha_1' \times \alpha_1'', \alpha_1''' \rangle &= kk'\tau - k^2\tau' \end{aligned}$$

Així, la curvatura i la torsió de α_1 són

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k} \\ \tau_1 &= \frac{1}{k} \frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)'}{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

En particular, α_1 és plana si i només si $\tau_1 \equiv 0$, o equivalentment si $\frac{\tau}{k}$ és constant, és a dir, si i només si α és una hèlix. De la mateixa manera, definim la indicatriu binormal de α com $\alpha_2(s) = B(s)$. Seguirem denotant sense subíndex els elements de α i amb un subíndex 2 el corresponents a α_2 . Un altre cop a partir de les fórmules de Frenet de α obtenim

$$\begin{aligned} \alpha_2' &= B' = \tau N \\ v_2 &= |\tau| \\ \alpha_2'' &= \tau' N + \tau N' = -k\tau T + \tau' N - \tau^2 B \\ \alpha_2''' &= (-k\tau)'T - k\tau T' + \tau''N + \tau'N' - (\tau^2)'B - \tau^2 \vec{b}' \\ &= (-k'\tau - 2k\tau')T - (k^2\tau - \tau^3)N - 3\tau\tau'B \\ \alpha_2' \times \alpha_2'' &= k\tau^2 B - \tau^3 T \\ |\alpha_2' \times \alpha_2''|^2 &= \tau^4(k^2 + \tau^2) \\ \langle \alpha_2' \times \alpha_2'', \alpha_2''' \rangle &= \tau^3(k'\tau - k\tau') \end{aligned}$$

Així, la curvatura i la torsió de α_2 són

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{|\tau|} \\ \tau_2 &= \frac{k^2}{\tau} \left(\frac{\tau}{k}\right)' \frac{1}{k^2 + \tau^2} \end{aligned}$$

També tenim que α_2 és plana ($\tau_2 \equiv 0$) si i només si $\frac{\tau}{k}$ és constant, és a dir, si i només si α és una hèlix.

58. Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular plana i $\mathbf{t} : I \longrightarrow S^1$ la seva indicatriu de les tangents. Fixem un punt $s_0 \in I$. Donat $s \in I$ denotem per $L(s)$ (resp. $L_{\mathbf{t}}(s)$) la longitud de l'arc de α (resp. $\mathbf{t}$) entre s_0 i s . Demostreu que la curvatura $k(s_0)$ de α en s_0 és igual al límit del quocient $\frac{L_{\mathbf{t}}(s)}{L(s)}$ quan $s \rightarrow s_0$.

Solució: Sabem que

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_{s_0}^s |\alpha'(t)| dt \\ L_{\mathbf{t}}(s) &= \int_{s_0}^s |\mathbf{t}'(t)| dt \end{aligned}$$

Diguem τ al paràmetre arc de α . Llavors

$$L_{\mathbf{t}}(s) = \int_{s_0}^s |\mathbf{t}'(t)| dt = \int_{s_0}^s \left| \frac{d\mathbf{t}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right| dt = \int_{s_0}^s |k(t)\alpha'(t)| dt = \int_{s_0}^s k(t)|\alpha'(t)| dt.$$

Pel teorema del valor mitjà per a integrals hem acabat.

3.5 Darboux

59. El triedre de Frenet d'una corba està format per vectors lliures i podem pensar, doncs, que en variar el paràmetre t de la corba, tenim una família de triedres que es mouen amb un punt fix (per exemple, l'origen de coordenades). És ben sabut que quan un cos rígid (en aquest cas, el triedre) es mou amb un punt fix, el moviment és un gir infinitesimal al voltant d'un eix.

Trobeu la velocitat angular en que gira el triedre de Frenet d'una corba.

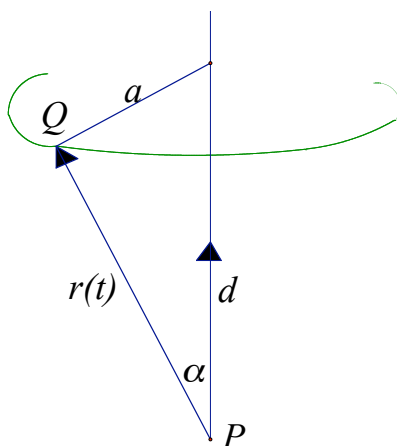
Solució: Cas particular previ. Suposem un punt Q que gira al voltant d'un eix, descrivint doncs una circumferència en un pla perpendicular a aquest eix. Si $r(t)$ és el vector posició, per ser $|r(t)| = \text{constant}$, obtenim $r'(t) \cdot r(t) = 0$. Per altra banda, si denotem per $\vec{e}$ el vector unitari director de l'eix, obtenim $r(t) \cdot \vec{e} = |r(t)| \cos \alpha = \text{constant}$, i per tant $r'(t) \cdot \vec{e} = 0$. Com $r'(t)$ és perpendicular a $r(t)$ i a $\vec{e}$ tenim

$$r'(t) = \lambda(t) \vec{e} \wedge r(t). \quad (3.4)$$

Igualant els mòduls

$$|r'(t)| = \lambda(t) |r(t)| \sin \alpha = \lambda(t) a,$$

on a és el radi de gir.



Però $|r'(t)|$ és la velocitat $v(t)$ del punt, i per definició de velocitat angular tenim

$$v(t) = \omega(t)a$$

de manera que $\lambda(t) = \omega(t)$. Definim el vector de Darboux com

$$\vec{d}(t) = \omega(t)\vec{e}$$

i l'equació del moviment (3.4) s'escriu

$$r'(t) = \vec{d}(t) \wedge r(t).$$

Cas general. Considerem una corba i les seves equacions de Frenet. Els tres vectors T', N', B' pertanyen, en cada punt, al pla generat per

$$E = \langle N, -kT - \tau B \rangle.$$

De fet és,

$$E(t) = \langle N(t), -k(t)T(t) - \tau(t)B(t) \rangle.$$

però eliminem t per no sobrecarregar la notació. El vector director d'aquest pla, al que denotem $\vec{d} = \vec{d}(t)$ per analogia amb el cas anterior, és

$$\vec{d} = N \wedge (-kT - \tau B) = kB - \tau T$$

de manera que

- T' és ortogonal a T i a $\vec{d}$. Per tant, $T' = \lambda \vec{d} \wedge T$.
- N' és ortogonal a N i a $\vec{d}$. Per tant, $N' = \mu \vec{d} \wedge N$.
- B' és ortogonal a B i a $\vec{d}$. Per tant, $B' = \nu \vec{d} \wedge B$.

Comparant amb les fórmules de Frenet obtenim $\lambda = \mu = \nu = 1$. En efecte, $T' = kN = \lambda(kB - \tau T) \wedge T = \lambda kN$, per tant $\lambda = 1$. Anàlogament $B' = \tau N = \nu(kB - \tau T) \wedge B = \nu \tau N$, per tant $\nu = 1$. I $N' = -kT - \tau B = \mu(kB - \tau T) \wedge N = -\mu kT - \mu \tau B$, per tant $\mu = 1$.

En particular, les fórmules de Frenet es poden reescriure com

$$\begin{aligned} T' &= \vec{d} \wedge T, \\ N' &= \vec{d} \wedge N, \\ B' &= \vec{d} \wedge B. \end{aligned}$$

de manera que, per a qualsevol punt P , solidari al triedre de Frenet, és a dir, tal que el seu vector posició $r(t)$ respecte del triedre de Frenet sigui de la forma $r(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$, amb a, b, c constants, tenim

$$r' = a\vec{d} \wedge T + b\vec{d} \wedge N + c\vec{d} \wedge B = \vec{d} \wedge aT + \vec{d} \wedge bN + \vec{d} \wedge cB = \vec{d} \wedge r.$$

Si definim la velocitat angular a l'instant t , $\omega(t)$, com el quocient entre la velocitat lineal $|r'(t)|$ i el radi (instantani) de gir

$$a(t) = |r(t)| \sin \alpha(t)$$

amb $\alpha(t)$ l'angle entre $r(t)$ i $\vec{d}(t)$, tenim

$$|r'(t)| = \omega(t)a(t) = |\vec{d}(t)||r(t)|\sin\alpha(t)$$

és a dir,

$$\omega(t) = |\vec{d}(t)| = \sqrt{k(t)^2 + \tau(t)^2}.$$

Aquesta és la velocitat angular en la que gira el triedre de Frenet.

Observem que hem demostrat el següent resultat ben conegut des de fa uns 300 anys:

Teorema. *Tot moviment d'un sòlid rígid amb un punt fix és un gir infinitesimal.*

Demostració. Pensem que aquest sòlid rígid té una referència ortonormal solidària amb ell, amb origen el punt fix. Si d'aquesta referència en diem $T(t), N(t), B(t)$, com que per hipòtesis coneixem $T(t), N(t), B(t)$ en tot instant t , també coneixem les seves derivades. En particular podem pensar que és la referència de Frenet d'una corba de curvatura $|T'(t)|$ i torsió $|B'(t)|$ (suposem $\tau \neq 0$ i treballem localment amb τ sempre positiu o sempre negatiu). Les fórmules de Frenet d'aquesta corba resolen el problema.

Capítol 4

Exercicis complementaris de corbes a l'espai

4.1 Longitud

60. Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba diferenciable i $[a, b] \subset I$ un interval tancat. Per a cada partició P de $[a, b]$ de la forma $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ considerem la suma

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(s_i) - \alpha(s_{i-1})|.$$

Definim la norma $|P|$ de P per

$$|P| = \max(s_i - s_{i-1}) \quad i = 1, \dots, n.$$

Demostreu que $\forall \varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que, si $|P| < \delta$, aleshores

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \varepsilon.$$

61. (a) Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba contínua. Utilitzeu les aproximacions poligonals del problema anterior per a donar una definició raonable de longitud d'un arc de α .
(b) Considerem la corba $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (t, t \sin(\pi/t)) && \text{per a } t \neq 0 \\ \alpha(0) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Demostreu que la longitud d'arc de α corresponent a $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$ és, com a mínim, $2/(n + \frac{1}{2})$. Utilitzeu aquest fet per demostrar que la longitud d'arc de α a l'interval $1/N \leq t \leq 1$ és més gran que $2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j+1}$ i, per tant, tendeix a infinit si $N \rightarrow \infty$.

Solució: b) Observem que la corba $\alpha(t)$ passa pels punts A, B, C següents:

$$\begin{aligned} A &= \alpha\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n+1}, 0\right) \\ B &= \alpha\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) \\ C &= \alpha\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{aligned}$$

La longitud de la corba entre A i C és més gran o igual que la longitud de la poligonal ABC , la qual té longitud

$$2\overline{AB} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2(n+1)(n+\frac{1}{2})}\right)^2} \geq \frac{2}{n+\frac{1}{2}}$$

Resumint, la longitud de la corba a l'interval $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ és m'és gran o igual a $\frac{2}{n+\frac{1}{2}}$.

Donat N dividim l'interval $[\frac{1}{N}, 1]$ en els subintervalls

$$\left[\frac{1}{N-k}, \frac{1}{N-k-1}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Aplicuem el resultat anterior a cadascun d'aquests subintervalls. Tindrem que la longitud de la corba a l'interval $[\frac{1}{N}, 1]$ és més gran o igual a

$$\sum_{k=0}^{N-2} \frac{2}{N-k-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{N-\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-\frac{1}{2}}\right) > 2\left(\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j+1}.$$

Quan N tendeix a infinit aquesta suma és la serie harmònica, que és divergent.

62. (La línia recta dóna la distancia més curta entre dos punts) Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba de classe C^1 i $[a, b] \subset I$. Posem $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b)$.

a) Demostreu que, per a qualsevol vector $\vec{v}$ amb $|\vec{v}| = 1$, es compleix

$$(q - p) \cdot \vec{v} = \int_a^b \alpha'(t) \cdot \vec{v} dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

b) Posem $\vec{v} = \frac{q-p}{|q-p|}$. Demostreu que

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt \geq |\alpha(b) - \alpha(a)|.$$

c) Demostreu que si $L(\alpha) = |\alpha(b) - \alpha(a)|$ llavors la corba α és una reparametrització d'una línia recta.

Solució: a) Com que $\alpha'(t) \cdot \vec{v} = (\alpha(t) \cdot v)'$, la primera igualtat és clara. La desigualtat següent també és clara ja que el cosinus de l'angle que formen $\alpha'(t)$ i $\vec{v}$ és més petit o igual a 1.

b) Apliquem l'apartat a) amb aquest vector $\vec{v}$ observant que

$$(q - p) \cdot \vec{v} = (q - p) \cdot \frac{q - p}{|q - p|} = |q - p| = |\alpha(b) - \alpha(a)|.$$

c) Si val el signe igual vol dir que $\alpha'(t)$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció (el $\leq$ provenia de que multiplicàvem pel cosinus de l'angle entre aquests vectors). Com són unitaris, $\alpha'(t) = \vec{v}$ i això implica que la corba és una recta (problema 34).

4.2 Curvatura i torsió

63. Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de la corba donada per $\alpha(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$. Comproveu que aquesta corba és una circumferència i determinar el seu centre i el seu radi.

Solució: Maple diu¹, $k(t) = 1$, $\tau(s) = 0$, $T(t) = (-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t)$, $N(t) = (-\frac{4}{5} \cos t, \sin t, \frac{3}{5} \cos t)$, $B(t) = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})$. Per tant la corba és una circumferència de radi 1 en el pla $-(3/5)x + (4/5)z = -(24/25)$. Tallant per exemple les rectes $\alpha(0) + \lambda N(0)$ i $\alpha(\pi/2) + \mu N(\pi/2)$ veiem que el centre és el punt $(0, 1, 0)$.

64. Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de la corba $\alpha(s) = (\cos \frac{1}{t}, \sin \frac{1}{t}, 0)$, $s \in \mathbb{R}$.

Solució: Primer mètode. Maple diu

$$k = \sqrt{\frac{csgn(1, \frac{1}{t^2})^2 t^4 + 1}{t^4}} t^2 csgn(\frac{1}{t^2}), \quad \tau(t) = 0.$$

Però els Maplemans i Maplewomans saben que en realitat això vol dir $k(t) = 1$, com era d'esperar ja que clarament estem considerant una reparametrització del cercle de radi 1.

Segon mètode. Anar calculant derivades i aplicar el problema 47. Per calcular la normal aplicarem la fórmula (3.2), pàgina 54.

¹>restart: with(Student[VectorCalculus]): with(plots): with(plottools):
 > f :=< (4/5) * cos(t), 1 - sin(t), -(3/5) * cos(t) >:
 > simplify(Curvature(f)); simplify(Torsion(f));
 > TNBFrame(f);

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \frac{1}{t^2} \left(\sin \frac{1}{t}, -\cos \frac{1}{t}, 0 \right) \\
\alpha''(s) &= t^{-4} \left(-2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, 2t \cos \frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t}, 0 \right) \\
v(t) &= |\alpha'(t)| = \frac{1}{t^2} \\
v'(t) &= -2t^{-3} \\
\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) &= -\frac{1}{t^6} (0, 0, 1) \\
k(t) &= 1 \\
N(t) &= \left(-\cos \frac{1}{t}, -\sin \frac{1}{t}, 0 \right) \\
B(t) &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

65. Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de les corbes de $\mathbb{R}^3$ definides per

- a) $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$.
- b) $\alpha(t) = (t, 3 + \cosh t, 1)$.
- c) $y = f(x), z = g(x)$ on f, g són funcions diferenciables.

Si alguna de les anteriors corbes és plana, escriuiu l'equació del pla que la conté.

Solució: a) *Aquest problema sense Maple es fa realment llarg i pesat. Però Maple diu (hem de modificar lleugerament el programet del problema 63)²*

$$\begin{aligned}
k(t) &= -\frac{a\sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + b^2}}{(2a^2 - 2a^2 \cos t + b^2)^{3/2}} \\
\tau(t) &= -\frac{b}{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + b^2} \\
T(t) &= (a(1 - \cos t), a \sin t, b) \quad \text{normalitzat,} \\
N(t) &= (-\sin t(-a^2 + a^2 \cos t - b^2), -a^2 \cos^2 t + 2a^2 \cos t + b^2 \cos t - a^2, -ab \sin t) \quad \text{normalitzat,} \\
B(t) &= (b \cos t, -b \sin t, a(1 - \cos t)) \quad \text{normalitzat.}
\end{aligned}$$

b) Organitzem les derivades per tal d'aplicar les fórmules del problema 47. Però ja es veu que és una corba plana, ja que $z = 1$.

```

2>restart: with(Student[VectorCalculus]): with(plots): with(plottools):
> f :=< a * (t - sin t), a * (1 - cos t), b * t) >;
> simplify(Curvature(f,t), symbolic); simplify(Torsion(f,t),symbolic);
> TNBFrame(f,t);

```

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (1, \sinh t, 0) \\
\alpha''(t) &= (0, \cosh t, 0) \\
v(t) &= |\alpha'(t)| = \cosh t \\
v'(t) &= \sinh t \\
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (0, 0, \cosh t) \\
k(t) &= \frac{1}{\cosh^2 t} \\
\tau(t) &= 0 \\
T(t) &= \left(\frac{1}{\cosh t}, \tanh t, 0\right) \\
N(t) &= \left(-\tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\right) \\
B(t) &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

c) Aquí només podem aspirar a donar fórmules en funció de $f(x), g(x)$ i les seves derivades.

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) &= (1, f'(x), g'(x)) \\
\alpha''(x) &= (0, f''(x), g''(x)) \\
v(x) &= |\alpha'(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} \\
v'(x) &= \frac{f'(x)f''(x) + g'(x)g''(x)}{v(x)} \\
\alpha'(x) \wedge \alpha''(x) &= (f'(x)g''(x) - g'(x)f''(x), -g''(x), f''(x)) \\
k(x) &= \frac{\sqrt{(f'(x)g''(x) - g'(x)f''(x))^2 + g''(x)^2 + f''(x)^2}}{(1 + f'(x)^2 + g'(x)^2)^{3/2}} \\
\tau(x) &= \frac{f''(x)g'''(x) - g''(x)f'''(x)}{(f'(x)g''(x) - g'(x)f''(x))^2 + g''(x)^2 + f''(x)^2} \\
T(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2}}(1, f'(x), g'(x)) \\
N(x) &= B(x) \wedge T(x) \\
B(x) &= \frac{\alpha'(x) \wedge \alpha''(x)}{|\alpha'(x) \wedge \alpha''(x)|}.
\end{aligned}$$

66. Volta de Viviani. Sigui C la corba intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ amb el cilindre $x^2 + y^2 - y = 0$. Calculeu la curvatura i la torsió de C .

Indicació: Comproveu que C pot ser parametritzada per

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \sin \frac{t}{2}\right).$$

Solució: Com que el cilindre té equació $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$, prenem

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \sin t \\y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t\end{aligned}$$

Substituint aquests valors a l'equació de l'esfera i aïllant z obtenim

$$z = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = \sin \frac{t}{2}.$$

Ara ja és un càlcul simple:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}\right) \\|\gamma'(t)| &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} \\\gamma''(t) &= \left(-\frac{1}{2} \sin t, -\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{4} \sin \frac{t}{2}\right) \\\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \left(\frac{1}{8} \sin t \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cos t \cos \frac{t}{2}, \frac{1}{8} \cos t \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin t \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{4}\right) \\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)| &= \frac{1}{8} \sqrt{8 - 3 \sin^2 \frac{t}{2}} \\k(t) &= \frac{\sqrt{8 - 3 \sin^2 \frac{t}{2}}}{(1 + \cos^2 \frac{t}{2})^{3/2}} \\\gamma'''(t) &= \left(-\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, -\frac{1}{8} \cos \frac{t}{2}\right) \\(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) &= -\frac{3}{32} \cos \frac{t}{2} \\\tau(t) &= \frac{-6 \cos \frac{t}{2}}{8 - 3 \sin^2 \frac{t}{2}}\end{aligned}$$

67. Doneu l'expressió de la curvatura i la torsió d'una corba definida implícitament. Vegeu: R. Goldman, *Curvature formulas for implicit curves and surfaces*, Computer Aided Geometric Design 22 (2005) 632–658.

68. Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi per l'origen quan $s = 0$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui

$$\begin{aligned}T(0) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\N(0) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\B(0) &= (0, 0, -1).\end{aligned}$$

Solució: Com que la corba es plana sabem que $k(s) = \theta'(s)$ on $\theta(s)$ és l'angle que forma la tangent a la corba amb la direcció $(1, 0)$. D'aquesta manera $\gamma'(s) \cdot (1, 0) = x'(s) = \cos \theta$.

En el nostre cas, doncs, $\theta'(s) = s$, és a dir, $\theta(s) = \frac{s^2}{2} + C$. però $\theta(0) = \pi/4$, per la condició inicial que ens donen, de manera que

$$\theta(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ y(s) &= \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dt \end{aligned}$$

Aquestes integrals no són expressables per funcions elementals.

69. Calculeu la curvatura i la torsió de les corbes de $\mathbb{R}^3$ definides per

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t, 3t) \\ \beta(s) &= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}s + \frac{1}{2}\sqrt{1-s^2} + \frac{3}{4}(\sqrt{2}-2)\arccos s + 1, \right. \\ &\quad \left.\frac{2+\sqrt{2}}{4}s + \frac{1}{2}\sqrt{1-s^2} + \frac{3}{4}(\sqrt{2}-2)\arccos s + 2, \right. \\ &\quad \left.\frac{2+\sqrt{2}}{4}s + \frac{1}{2}\sqrt{1-s^2} + \frac{3}{4}(\sqrt{2}-2)\arccos s\right) \end{aligned}$$

on $t \in (0, \pi)$ i $s \in (-1, 1)$. Decidiu si és possible transformar la corba α en β per medi d'una transformació rígida de $\mathbb{R}^3$ i un canvi de paràmetre.

És possible transformar la corba α en la corba

$$\gamma(s) = \left(-\frac{8s}{7} + 3\sqrt{1-s^2} + 3\arccos s + 1, \sqrt{1-s^2} - \frac{2s}{7} + 2, 3\arccos s - \sqrt{1-s^2}\right)$$

per medi d'una transformació rígida de $\mathbb{R}^3$ i un canvi de paràmetre?

Solució: Maple diu que totes dues corbes tenen $k = 1/10$ i $\tau = 3/10$. Per tant, es poden fer coincidir per moviment rígida.

Per estudiar $\gamma(s)$ fem el canvi de variable $s = \cos t$ i tenim

$$\gamma(t) = \left(-\frac{8\cos t}{7} + 3\sin t + 3t + 1, \sin t - \frac{2\cos t}{7} + 2, 3t - \sin t\right),$$

que es pot escriure com

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & 3 & 1 \\ -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com que el determinant d'aquesta matriu 3×3 és zero, la corba és plana, i no pot ser isomètrica a $\alpha(s)$. Observeu que hem trobat una matriu A i un vector v tal que $\gamma(s) = A\alpha(s) + v$.

Nota. Escribiu $\beta(s)$ matricialment, com hem fet amb $\gamma(s)$, amb le mateix canvi de paràmetre. Quina propietat té la matriu 3×3 que apareix?

70. Corbes de Bertrand. Siguin $\alpha := \alpha(t)$ i $\beta := \beta(t)$ dues corbes diferents tals que per a cada $t \in (a, b)$ la recta normal a α en el punt $\alpha(t)$ coincideix amb la recta normal a β en el punt $\beta(t)$. La curvatura $k(t)$ i la torsió $\tau(t)$ de α en el punt $\alpha(t)$ són no nul·les en tot punt.

- Proveu que existeix una constant $r \neq 0$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + rN(t)$, $\forall t \in (a, b)$, on $N(t)$ és el vector normal a la corba α en el punt $\alpha(t)$. En particular la distància entre $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant.
- Proveu que l'angle entre els vectors tangents a α i β en els punts $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant (Indicació: deriveu $T_\alpha(t) \cdot T_\beta(t)$).
- Proveu que hi ha una relació lineal entre la curvatura i la torsió de α (de la forma $Ak(t) + B\tau(t) = 1$, on A, B són constants). (Indicació: Useu l'apartat b).

Solució: Suposem que t és el paràmetre arc de α . Això implicarà, en general que t no és el paràmetre arc de β .

(a) Per hipòtesi tenim $\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t) \cdot N(t)$. Cal veure doncs que $\lambda(t)$ és constant. Derivant

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \lambda'(t) \cdot N(t) + \lambda(t)N'(t) = (1 - k(t)\lambda(t))T(t) + \lambda'(t)N(t) - \lambda(t)\tau(t)B(t).$$

Observeu que $T(t), N(t), B(t)$ és la referència de Frenet de α en el punt $\alpha(t)$. Com que $\beta'(t)$ és ortogonal a la normal a β en el punt $\beta(t)$, és automàticament ortogonal a $N(t)$, vector normal a α en el punt $\alpha(t)$. Per tant, $\lambda'(t) = 0$, que implica $\lambda(t) = r \in \mathbb{R}$.

(b) Derivant respecte de t i denotant $\tau = \tau(t)$ el paràmetre arc de β tenim,

$$(T_\alpha(t) \cdot T_\beta(t))' = T_\alpha(t)' \cdot T_\beta(t) + T_\alpha(t) \cdot T_\beta(t)' = k_\alpha(t)N_\alpha(t) \cdot T_\beta(t) + T_\alpha(t) \cdot k_\beta(t) \cdot \frac{d\tau}{dt} \cdot N_\beta(t) = 0,$$

ja que el normals de α i β tenen la mateixa direcció (i per tant és diferencien com a molt en un signe). Així doncs $(T_\alpha \cdot T_\beta)$ és constant.

(c) Com que $T_\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$ tenim

$$c = T_\alpha(t) \cdot T_\beta(t) = T_\alpha(t) \cdot \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \frac{1 - rk(t)}{\sqrt{(1 - rk(t))^2 + r^2\tau(t)^2}}$$

Aleshores $(1 - rk(t))^2(1 - c^2) = c^2r^2\tau(s)^2$ amb c, r constants. Com $\tau \neq 0$, $(1 - c^2) \neq 0$. De manera que tenim

$$\frac{1 - rk(t)}{\tau(s)} = \frac{cr}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Com que $D = cr/\sqrt{1 - c^2}$ és constant, tenim $1 - rk(t) = D\tau(s)$ com volíem. Si $c = 0$, $D = 0$ i la torsió no apareix,

4.3 Hèlixs

71. Comproveu que la corba definida per

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin \theta(s) ds, \frac{a}{c} \int \cos \theta(s) ds, \frac{b}{c} s \right),$$

amb $a^2 + b^2 = c^2$, i on $\theta(s)$ és qualsevol funció amb $\theta' \neq 0$, compleix que $\frac{k(s)}{\tau(s)} = \pm \frac{a}{b}$ (en particular, és una hèlix).

Solució: Observem que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(\frac{a}{c} \sin \theta(s), \frac{a}{c} \cos \theta(s), \frac{b}{c} \right) \\ |\alpha'(s)| &= 1 \\ \alpha''(s) &= \frac{a}{c} (\theta'(s) \cos \theta(s), -\theta'(s) \sin \theta(s), 0) \\ \alpha'''(s) &= \frac{a}{c} (-\theta'(s)^2 \sin \theta(s) + \theta''(s) \cos \theta(s), -\theta'(s)^2 \cos \theta(s) - \theta''(s) \sin \theta(s), 0) \\ \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) &= \frac{a\theta'(s)}{c^2} (b \sin \theta(s), b \cos \theta(s), -a) \\ |\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)| &= \frac{a}{c} |\theta'(s)| \\ k(s) &= \frac{a}{c} |\theta'(s)| \\ \tau(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)|^2} = \frac{\frac{-a^2 b \theta'(s)^3}{c^3}}{\frac{a \theta'(s)}{c}} = -\frac{b}{c} \theta'(s) \end{aligned}$$

Així, $\frac{k(s)}{\tau(s)} = -\frac{a}{b} \frac{|\theta'(s)|}{\theta'(s)}$. Com $\theta'(s) \neq 0$, tindrem o bé sempre $\theta'(s) < 0$, i el quocient entre curvatura i torsió és positiu, o bé sempre $\theta'(s) > 0$, i el quocient entre curvatura i torsió és negatiu.

72. Considereu la corba parametritzada $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Trobeu-ne la curvatura i la torsió. Demostreu que α és una hèlix.

b) Trobeu el paràmetre arc de α .

Solució:

(a) Fent els càlculs, tenim:

$$\begin{aligned}\alpha' &= (\sinh(t), \cosh(t), 1) \\ \alpha'' &= (\cosh(t), \sinh(t), 0) \\ \alpha''' &= (\sinh(t), \cosh(t), 0) \\ \|\alpha'\| &= \sqrt{\cosh(2t) + 1} = \sqrt{2} \cosh(t) \\ \alpha' \wedge \alpha'' &= (-\sinh(t), \cosh(t), -1) \\ \|\alpha' \wedge \alpha''\| &= \sqrt{2} \cosh(t) \\ k(t) &= \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{2 \cosh^2(t)} \\ \tau(t) &= -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{-1}{2 \cosh^2(t)}\end{aligned}$$

Diem que una corba és una hèlix si les seves tangents formen un angle constant amb una direcció fixada. A un exercici anterior vam veure que si la torsió no s'anul·la que k/τ sigui constant caracteritza el fet de ser hèlix. En aquest cas $k/\tau = -1$. També podem fer la comprovació utilitzant la definició. En efecte, si prenem la direcció $\vec{v} = (0, 1, 0)$ l'angle entre α' i $\vec{v}$ és constant i igual a $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

(b) Calculem el paràmetre arc de α ,

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx = \int_0^t \sqrt{2} \cosh(x) dx = \sqrt{2} \sinh(t)$$

i per tant $t = \operatorname{argsinh}(s/\sqrt{2})$.

73. Trobeu les hèlixs esfèriques.

Solució: Per estar sobre una esfera de radi a ,

$$\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4 \tau^2} = a^2.$$

Això es dedueix fàcilment derivant dos cops la igualtat

$$\langle \gamma(s) - c, \gamma(s) - c \rangle = 0$$

on c és el centre de l'esfera.

Per ser hèlix $\tau = k \cot \alpha$ per a una certa constant α . En funció del radi de curvatura $\rho = 1/k$ l'anterior equació s'escriu

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \tan \alpha = ds.$$

Integrant obtenim

$$-\sqrt{a^2 - \rho^2} \tan \alpha = s + C.$$

Si prenem $s = 0$ en el punt on la curvatura val $\frac{1}{a}$ obtenim les equacions intrínseques de les hèlixs esfèriques

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{1}{k^2} &= s^2 \cot^2 \alpha \\ s^2 + \frac{1}{\tau^2} &= a^2 \tan^2 \alpha \end{aligned}$$

4.4 Envolupants

- 74.** Sigui $a(s)x + b(s)y + c(s)z + d(s) = 0$ l'equació dependent del paràmetre s d'un pla variable P_s de $\mathbb{R}^3$. Quines condicions han de complir les funcions a, b, c, d perquè existeixi una corba $\gamma = \gamma(s)$ que tingui P_s com pla osculador per a cada s ?

Solució: Denotem $A(s) = (a(s), b(s), c(s))$ i $X = (x, y, z)$. D'aquesta manera la família uniparamètrica de plans és

$$G(s) := A(s) \cdot X + d(s) = 0.$$

La família de rectes característiques està formada per les rectes que s'obtenen en resoldre el sistema³

$$\begin{aligned} G(s) &= 0 \\ \frac{dG(s)}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

I la corba envoltant de les característiques és la corba que s'obté en resoldre el sistema

$$\begin{aligned} G(s) &= 0 \\ \frac{dG(s)}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2G(s)}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

Equivalentment

$$\begin{aligned} A(s) \cdot X + d(s) &= 0 \\ A'(s) \cdot X + d'(s) &= 0 \\ A''(s) \cdot X + d''(s) &= 0 \end{aligned}$$

³Vegeu, per exemple, *Differential Geometry*, de Erwin Kreyszig.

Aquest sistema té solució única si i només si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Veiem ara que si $\vec{\gamma}(s)$ és aquesta única corba solució, llavors la família de plans $G(s)$ és la família dels plans osculadors de γ . Tenim

$$\begin{aligned} A(s) \cdot \vec{\gamma}(s) + d(s) &= 0 \\ A'(s) \cdot \vec{\gamma}(s) + d'(s) &= 0 \\ A''(s) \cdot \vec{\gamma}(s) + d''(s) &= 0 \end{aligned}$$

La primera equació ens diu que $\gamma(s) \in P_s$. Derivant la primera equació i tenint en compta la segona tenim

$$A(s) \cdot \vec{\gamma}'(s) = 0$$

Derivant la segona equació i tenint en compta la tercera tenim

$$A'(s) \cdot \vec{\gamma}'(s) = 0$$

D'aquestes dues, derivant la primera, deduïm

$$A(s) \cdot \vec{\gamma}''(s) = 0.$$

Per tant, el vector normal al pla, $A(s)$, és perpendicular a $\vec{\gamma}'(s)$ i a $\vec{\gamma}''(s)$, és a dir, té la direcció del binormal. Equivalentment, $G(s) = 0$ és l'equació del pla osculador de γ en el punt $\gamma(s)$.

75. Sigui I un interval obert de $\mathbb{R}^3$ i siguin $x, v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ funcions vectorials diferenciables. Denotem per D_s la recta de $\mathbb{R}^3$ de vector director $v(s)$ i que passa per $x(s)$. Diem que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és una *corba envelopant* de la família $\{D_s\}$ si, per cada $s \in I$, $\alpha(s) \in D_s$ i, en els punts en que $\alpha'(s) \neq 0$, D_s és la recta tangent a la corba.

- Demostreu que $\{D_s\}$ admet una corba envelopant si i només si hi ha funcions diferenciables $a(s)$ i $b(s)$ tals que $x'(s) + a(s)v'(s) + b(s)v(s) = 0$.
- Demostreu que una condició suficient perquè $\{D_s\}$ admeti una corba envelopant és que per a cada $s \in I$ es compleixi $v(s) \wedge v'(s) \neq 0$ i $x'(s) \cdot (v(s) \wedge v'(s)) = 0$.

Solució: a) Suposem que $\alpha(s)$ és corba envelopant de D_s . Llavors existeix $\lambda(s)$ tal que

$$\alpha(s) = x(s) + \lambda(s)v(s).$$

Derivant

$$\alpha'(s) = x'(s) + \lambda'(s)v(s) + \lambda(s)v'(s).$$

Però com $\alpha'(s) = \mu v(s)$ tenim

$$x'(s) + \lambda(s)v'(s) + (\lambda'(s) - \mu(s))v(s) = 0,$$

com volíem.

Recíprocament, si $x'(s) + a(s)v'(s) + b(s)v(s) = 0$ és fàcil veure que la corba $\alpha(s) = x(s) + a(s)v(s)$ és la corba envelopant buscada.

b) Les dues condicions que es donen impliquen que $x'(s)$ és combinació lineal de $v(s)$ i $v'(s)$, i estem per tant en el cas a).

Nota: Què passa si la família inicial donada compleix $v(s) \wedge v'(s) = 0$?

4.5 Cercle osculador

76. Donada una corba regular α amb curvatura no nula a cada punt anomenarem *pla osculador* de α en el punt $\alpha(s)$ al pla que passa per $\alpha(s)$ i és paral·lel als vectors $T(s)$ i $N(s)$.

- Demostreu que el pla osculador de α en el punt $\alpha(s)$ és el límit dels plans que passen per $\alpha(s + h_1)$, $\alpha(s + h_2)$ i $\alpha(s + h_3)$ quan $h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0$.
- El límit dels cercles que passen per $\alpha(s + h_1)$, $\alpha(s + h_2)$ i $\alpha(s + h_3)$ quan $h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0$ és un cercle del pla osculador amb centre a la recta que passa per $\alpha(s)$ i que té $N(s)$ com vector director i amb radi igual a $1/k(s)$ (aquest cercle s'anomena *cercle osculador* de α en el punt $\alpha(s)$).

77. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si tots els centres dels cercles osculadors de α estan continguts en una recta aleshores α és una circumferència. Indicació: recordeu que el centre del cercle osculador de α en el punt $\alpha(s)$ és

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s).$$

Solució: Parametritzem α pel paràmetre arc s i definim la corba dels centres dels cercles osculadors $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$. La hipòtesi de que β està continguda en una recta es pot traduir en que la curvatura de β és zero, o equivalentment que $\beta' \times \beta'' = 0$. Utilitzant les fórmules de Frenet de α obtenim

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha' - \frac{k'}{k^2}N + \frac{1}{k}N' = T - \frac{k'}{k^2}N + \frac{1}{k}(-kT - \tau B) \\ &= -\frac{k'}{k^2}N - \frac{\tau}{k}B \\ \beta'' &= -\left(\frac{k'}{k^2}\right)'N + \frac{k'}{k^2}(kT + \tau B) - \left(\frac{\tau}{k}\right)'B - \frac{\tau^2}{k}N \\ &= \frac{k'}{k}T - \left[\left(\frac{k'}{k^2}\right)' + \frac{\tau^2}{k}\right]N + \left(\frac{2k'\tau - \tau'k}{k^2}\right)B \\ \beta' \times \beta'' &= \left[\frac{k'(2k'\tau - \tau'k)}{k^4} + \frac{\tau}{k}\left(\left(\frac{k'}{k^2}\right)' + \frac{\tau^2}{k}\right)\right]T - \frac{\tau k'}{k^2}N - \frac{(k')^2}{k^3}B \end{aligned}$$

Imposant ara que $\beta' \times \beta'' = 0$ obtenim tres equacions que impliquen que $k' = 0$ (i per tant k és constant) i $\tau = 0$ (i per tant, la corba α és plana). Així, es dedueix que α és una circumferència.

- 78.** Demostreu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors és una corba tal que la seva tangent en cada punt és ortogonal a la tangent de la corba inicial en el punt corresponent.

Solució: La corba $\sigma(s)$, lloc geomètric dels centres de curvatura, s'escriu com

$$\sigma(s) = \alpha(s) + \rho(s)N(s),$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura i $N(s)$ la normal principal. Derivant respecte del paràmetre arc s tenim

$$\sigma'(s) = T(s) + \rho'(s)N(s) + \rho(s)(-k(s)T(s) - \tau(s)B(s))$$

on $\tau(s)$ és la torsió i $B(s)$ el vector binormal.

Com que $\rho(s)k(s) = 1$, $\sigma'(s)$ és combinació lineal de $N(s)$ i $B(s)$, i és per tant ortogonal a $T(s)$, per a tot s .

- 79.** Vegeu que en un punt que no sigui extrem de la curvatura d'una corba plana, la corba travessa el cercle osculador en aquest punt.

Solució: Prenem, amb centre en aquest punt, la referència $T(0), N(0)$. D'aquesta manera la corba $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ compleix $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $y''(0) = k(0) = 1/\rho$, on ρ és el radi de curvatura en $\gamma(0)$. Podem pensar que s és el paràmetre arc.

Sigui $D(s)$ la funció distància dels punts de la corba al centre de curvatura $(0, \rho)$. Tenim

$$D(s) = \sqrt{x(s)^2 + (y(s) - \rho)^2}.$$

Farem les derivades successives de $D(s)$ observant que Aquestes derivades es simplifiquen bastant si anem pensant que només ens interessa el seu valor en $s = 0$.

En efecte,

$$\begin{aligned} D'(s) &= (x(s)x'(s) + (y(s) - \rho)y'(s))D(s)^{-1} \\ D''(s) &= (x'(s)^2 + x(s)x''(s) + y'(s)^2 + (y(s) - \rho)y''(s))D(s)^{-1} + D'(s)\lambda(s), \\ D'''(s) &= (x''(s)^2 + x'(s)x'''(s) + x''(s)^2 + 2y'(s)y''(s) + (y(s) - \rho)y'''(s))D(s)^{-1} \\ &\quad + D'(s)\mu(s) + D''(s)\nu(s), \end{aligned}$$

on $\lambda(s), \mu(s), \nu(s)$ són certes funcions.

Posant ara $s = 0$ obtenim

$$\begin{aligned} D(0) &= \rho \\ D'(0) &= 0 \\ D''(0) &= 0 \\ D'''(0) &= -y'''(0). \end{aligned}$$

És fàcil veure que $k'(0) = y'''(0)/2$, de manera que la hipòtesis de que el punt no sigui extrem de la curvatura vol dir que $y'''(0) \neq 0$.

Per tant, si desenvolupem $D(s)$ per Taylor obtenim

$$D(s) = \rho + as^3 + \dots$$

on $a = -k'(0)/3$. Així a té signe oposat a $k'(0)$: positiu si la curvatura decreix i negatiu si la curvatura creix.

Si $a > 0$, els punts de la corba amb $s < 0$ són interiors al cercle osculador, i els punts de la corba amb $s > 0$ són exteriors al cercle osculador.

Si $a < 0$, els punts de la corba amb $s < 0$ són exteriors al cercle osculador, i els punts de la corba amb $s > 0$ són interiors al cercle osculador.

80. Demostreu que cercles osculadors pròxims d'una corba plana no es tallen.

Solució: Sigui $\gamma := \gamma(s)$ una corba plana parametritzada per l'arc. La corba $\sigma := \sigma(s)$ dels centres de curvatura és la corba

$$\sigma(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s),$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura i $N(s)$ la normal a γ en el punt $\gamma(s)$.

Puntualitzarem l'enunciat suposant que $\rho'(0) > 0$. En particular existeix un petit entorn de 0 en el que $\rho'(s) > 0$. Veurem que els cercles osculadors corresponents a aquests valors de s no tallen el cercle osculador corresponent a $s = 0$.

La longitud de σ entre $\sigma(0)$ i $\sigma(s)$ és

$$l(\sigma(0), \sigma(s)) = \int_0^s |\sigma'(s)| ds = \int_0^s |\rho'(s)| ds = \rho(s) - \rho(0).$$

Sigui Q un punt qualsevol del cercle osculador en el punt $\gamma(0)$. Veurem que Q és interior al cercle osculador en el punt $\gamma(s)$. En efecte,

$$d(Q, \sigma(s)) \leq d(Q, \sigma(0)) + d(\sigma(0), \sigma(s)) \leq \rho(0) + l(\sigma(0), \sigma(s)) = \rho(s).$$

Però el signe igual en aquesta igualtat només es pot donar si la corba de centres de curvatura és una recta (en el petit interval que estem considerant). Però això vol dir que el vector normal $N(s)$ és constant, la qual cosa només es dona quan γ és una recta, situació implícitament no considerada ja que quan parlem de $\rho(s)$ entenem que $k(s) \neq 0$. Per tant

$$d(Q, \sigma(s)) < \rho(s),$$

i tot punt del cercle osculador en el punt $\gamma(0)$ és interior al cercle osculador en el punt $\gamma(s)$.

4.6 Esfera osculadora

81. Una corba de $\mathbb{R}^3$ es diu *esfèrica* si existeix una esfera que la conté.

- a) S'anomena *esfera osculadora* a una corba en un punt $\gamma(s)$ al límit de les esferes que passen per $\gamma(s)$ i tres punts pròxims. Demostreu que el centre de l'esfera osculadora en el punt $\gamma(s)$ és :

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}B(s)$$

on s és el paràmetre arc.

- b) Denotem $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ i $\Theta(s) = \frac{1}{\tau(s)}$ els inversos de la curvatura i la torsió d'una corba $\gamma(s)$. Suposem s paràmetre arc. Suposant que $R' \neq 0$ demostreu que $\gamma(s)$ és una corba esfèrica si i només si $R^2 + (\Theta R')^2 = a^2$, on a és una constant.
- c) Demostreu que la corba $\gamma(t) = (a, -1, 0) + (a \cos t, a \sin t, 2a \sin(t/2))$ és esfèrica (*Indicació:* En aquest cas és més fàcil trobar el centre i el radi de l'esfera on està continguda la corba $\gamma(t)$, per exemple fent un dibuix).

Solució:

- (a) Equivalentment podem definir l'esfera osculadora com una esfera amb ordre de contacte 3 en un punt (l'equació d'una esfera té 4 paràmetres i gràcies a això podem aconseguir ordre 3).

L'equació de l'esfera de centre $c(s_0)$ i radi

$$\sqrt{\frac{1}{k^2(s_0)} + \frac{k'^2(s_0)}{k^4(s_0)\tau^2(s_0)}}$$

és

$$\langle x - c(s_0), x - c(s_0) \rangle - \frac{1}{k^2(s_0)} - \frac{k'^2(s_0)}{k^4(s_0)\tau^2(s_0)} = 0.$$

Sigui

$$f(s) = \langle \alpha(s) - c(s_0), \alpha(s) - c(s_0) \rangle - \frac{1}{k^2(s_0)} - \frac{k'^2(s_0)}{k^4(s_0)\tau^2(s_0)}$$

i fem les comprovacions:

$$\begin{aligned} f(s_0) &= 0 \\ \frac{df}{ds} \Big|_{s=s_0} &= 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c(s_0) \rangle \Big|_{s=s_0} = 2\langle T(s_0), -\frac{1}{k(s_0)}N(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}B(s_0) \rangle = 0 \\ \frac{d^2f}{ds^2} \Big|_{s=s_0} &= 2\langle \alpha''(s), \alpha(s) - c(s_0) \rangle \Big|_{s=s_0} + 2\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \Big|_{s=s_0} = 0 \\ \frac{d^3f}{ds^3} \Big|_{s=s_0} &= 2\langle \alpha'''(s), \alpha(s) - c(s_0) \rangle \Big|_{s=s_0} + 6\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle \Big|_{s=s_0} \\ &= 2\langle k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0) - \tau(s_0)k(s_0)B(s_0), \alpha(s_0) - c(s_0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

- (b) Si γ és una corba esfèrica l'esfera osculadora no depèn de s i coincideix amb l'esfera que conté γ . Per tant el radi de l'esfera osculadora és constant, i.e.,

$$R^2 + (\Theta R')^2 = a^2 \quad (*)$$

Recíprocament si $R^2 + (\Theta R')^2 = a^2$ cal veure que $c(s) \equiv \text{ctt}$. Tenim

$$c'(s) = (-R\Theta^{-1} - (\Theta R')')B(s)$$

Però si derivem $(*)$ obtenim $RR' + \Theta R'(\Theta R')' = 0$ d'on si suposem $R' \neq 0$ i $\Theta^{-1} \neq 0$ podem concloure $c'(s) = 0$, com volíem veure.

- (c) Tenim $\gamma(t) = (a(1 + \cos(t)), -1 + a \sin(t), 2a \sin(t/2))$. Fer la comprovació pel criteri de l'apartat anterior exigeix uns càlculs realment difícils, en canvi és relativament senzill fent un dibuix veure que la corba està sobre l'esfera de centre $(0, -1, 0)$ i radi $a + 1$. En efecte,

$$d(\alpha(t), (0, -1, 0))^2 = 1 + a^2 + 2a \sin(t) + 4 \sin^2(t/2) = (a + 1)^2$$

82. Sigui α una corba regular. Demostreu que

- a) α està sobre una esfera de centre P si i només si $\alpha'(t)$ és ortogonal a $\alpha(t) - P$ per a tot t .
Apliqueu-ho a la corba $\alpha(t) = (a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t)$.
- b) α té rapidesa constant si i només si $\alpha''(t)$ és ortogonal a $\alpha'(t)$ per a tot t .

Solució: a) Com $(\alpha(t) - P) \cdot (\alpha(t) - P) = R^2$, on R és el radi de l'esfera, derivant tenim $\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - P) = 0$, com volíem. En el cas particular de la corba donada $\alpha'(t) = (2a \sin t \cos t, a \cos^2 t - a \sin^2 t, -a \sin t)$ i $\alpha'(s) \cdot \alpha(s) = 0$, per tant $\alpha(t)$ està continguda a l'esfera de centre $(0, 0, 0)$ i radi $|\alpha(t)| = a$.

b) La rapidesa és, per definició, $v(t) = |\alpha'(t)| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}$. Derivant tenim

$$v'(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{|\alpha'(t)|}$$

per tant, $v'(t) = 0$ si i només si $\alpha'(t)$ i $\alpha''(t)$ són ortogonals.

83. Trobeu els plans osculadors, les circumferències osculadores i les esferes osculadores de la corba $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. És cert, en general, que les esferes osculadores travessen la corba?

Solució: Hem vist a l'apartat a) del problema 48 que el pla osculador en el punt $\gamma(t)$ és el pla

$$\Pi_t : (x, y, z) = (t, t^2, t^3) + \lambda(1, 2t, 3t^2) + \mu(0, 2, 6t).$$

El centre de la circumferència osculadora és el punt

$$C(t) = (t, t^2, t^3) + \frac{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}} \frac{1}{\sqrt{4 + 36t^2}} (0, 2, 6t)$$

i la circumferència, un cop fixat t , es pot donar com la corba parametritzada $\sigma(u)$ donada per

$$\sigma(u) = C(t) + \rho(t) (\cos u T(t) + \sin u N(t))$$

on $T(t), N(t)$ són els vectors tangent i normal a $\gamma(t)$ calculats a l'apartat a) del problema 48.

Observem que en $t = 0$ tenim $T(0) = (1, 0, 0)$, $N(0) = (0, 1, 0)$ i $\rho(0) = 1/2$, per tant

$$\sigma(u) = (0, \frac{1}{2}, 0) + \frac{1}{2}(\cos u, \sin u, 0).$$

El centre de l'esfera osculadora és el punt

$$O(t) = \gamma(t) + \rho(t)N(t) + \frac{\rho'(t)}{\tau(t)}v(t)B(t)$$

on $\rho(t) = 1/k(t)$ és el radi de curvatura i $v(t) = |\alpha'(t)|$ és la velocitat.

L'equació és doncs

$$|X - O(t)|^2 = \rho(t)^2 + \left(\frac{\rho'(t)}{\tau(t)} v(t) \right)^2$$

amb $X = (x, y, z)$.

Els càlculs en un t arbitrari són molt llargs, de manera que mirem només què tenim en $t = 0$.

Mirant el problema 48 veiem que $\rho(0) = 1/2$, $\tau(0) = -3$, $\rho'(0) = 0$. Per tant, l'esfera osculadora és

$$|X - (0, 1/2, 0)|^2 = \frac{1}{4}$$

que talla el pla osculador ($z = 0$) en el cercle osculador abans calculat.

Es veu molt fàcilment que tots els punts de la corba $\gamma(t)$ donada estan fora de l'esfera osculadora del punt $\gamma(0) = (0, 0, 0)$. Només s'ha de veure que $d(\gamma(t), (0, 1/2, 0)) \geq 0$, per a tot t . Això és així perquè la funció curvatura, o equivalentment, la funció radi de curvatura, té un extrem en $t = 0$. En els punts on $\rho(t)$ és creixent o decreixent la corba travessa l'esfera osculatriu, com passava amb les corbes planes respecte del cercle osculador.

Això es veu de manera totalment anàloga a com ho hem vist per als cercles osculadors, problema 79. La referència que hem d'agafar ara és la de Frenet en el punt considerat. A partir d'aquí es repeteixen, mutatis mutandi, els càlculs de la pàgina 82.

Capítol 5

Superfícies a $\mathbb{R}^3$

5.1 Preliminars

84. Sigui S la superfície definida per l'equació $x + y = z^3 + 1$.

1. Comproveu que S és una superfície regular.
2. Doneu una parametrització de S .
3. Determineu per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ el vector $\vec{v} = (a, 3, 1)$ és tangent a S en el punt $p = (1, 1, 1)$.

Solució: Recordem que diem que una superfície S és regular si per a cada punt $p \in S$ existeix un entorn $U \ni p$ i una parametrització $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular, és a dir, tal que $J(\varphi)$ és de rang 2 en tot punt. Prenem com a parametrització $\varphi(x, z) = (x, z^3 + 1 - x, z)$. Aleshores

$$\begin{aligned}\varphi_x &= (1, 1, 0) \\ \varphi_z &= (0, 3z^2, 1)\end{aligned}$$

i per tant $D\varphi$ té rang 2 en tot punt i la parametrització és regular. Observem ara que si $p = (1, 1, 1)$ tenim $T_p S = \langle (1, 1, 0), (0, 3, 1) \rangle = \langle (1, -1, 3) \rangle^\perp$. Per tant cap imposar $\vec{v} \cdot (1, -1, 3) = 0$. Tenim

$$\vec{v} \cdot (1, -1, 3) = a - 3 + 3 = a$$

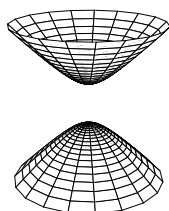
i cal $a = 0$.

85. Doneu parametritzacions regulars locals de les quàdriques següents:

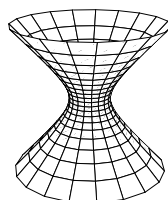
1. Cilindre

- a) El·líptic $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
- b) Hiperbòlic $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
- c) Parabòlic $y = cx^2$.

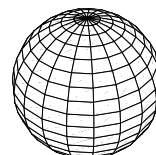
2. El·lipsoide $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.
3. Hiperboloide d'un full $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.
4. Hiperboloide de dos fulls $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1$.
5. Paraboloides el·líptic $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = cz$.
6. Paraboloides hiperbòlic $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = cz$.
7. Con $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z^2$.



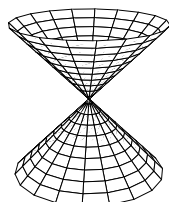
Hiperboloide de dos fulls



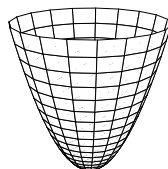
Hiperboloide d'un full



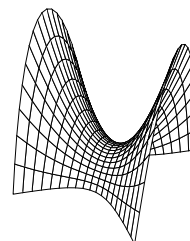
El·lipsoide



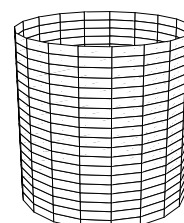
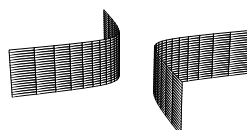
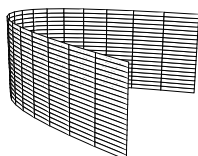
Con



Paraboloides el·líptic



Paraboloides hiperbòlic



Cilindre parabòlic

Cilindre hiperbòlic

Cilindre el·líptic

Solució:

(1a) Per parametritzar el cilindre el·líptic posem

$$\varphi(\theta, t) = (a \cos \theta, b \sin \theta, t)$$

$$\text{amb } (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

(1b) Pel cilindre hiperbòlic tenim

$$\varphi(\theta, t) = (a \cosh \theta, b \sinh \theta, t)$$

$$\text{amb } (\theta, t) \in \mathbb{R}^2.$$

(1c) Finalment, el cilindre parabòlic:

$$\varphi(s, t) = (s, cs^2, t)$$

$$\text{amb } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

(2) En l'equació $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ introduïm una nova variable $w = +\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ de manera que ens quedi $w^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. Parametritzem el conjunt de (w, z) que verifiquen aquesta equació com abans

$$\begin{aligned} w &= \cos \varphi \\ z &= c \sin \varphi \end{aligned}$$

amb $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja que $w \geq 0$. D'altra banda, per la definició de w tenim que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = w^2$, d'on

$$\begin{aligned} x &= aw \cos \theta \\ y &= bw \sin \theta \end{aligned}$$

amb $\theta \in (0, 2\pi)$. De manera que obtenim la següent parametrització de l'el·lipsoïde:

$$\psi(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \cos \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, c \sin \varphi)$$

$$\text{amb } (\theta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^2.$$

(3) De la mateixa manera es dedueix una parametrització regular de l'hiperboloïde d'un full:

$$\psi(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \cosh \varphi, b \sin \theta \cosh \varphi, c \sinh \varphi)$$

$$\text{amb } (\theta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

(4) Parametritzem també l'hiperboloide de dos fulls mitjançant:

$$\psi(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \sinh \varphi, b \sin \theta \sinh \varphi, \pm c \cosh \varphi)$$

$$\text{amb } (\theta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2.$$

(5) El paraboloides el·líptic:

$$\varphi(\theta, t) = (at \cos \theta, bt \sin \theta, t^2/c)$$

$$\text{amb } (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2.$$

(6) El paraboloides hiperbòlic (per $z > 0$):

$$\varphi(s, t) = (at \cosh s, bt \sinh s, t^2/c)$$

amb $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, encara que aquest també es pot parametritzar aïllant la coordenada $z = \frac{1}{c} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)$ i fent variar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(7) El con:

$$\varphi(\theta, t) = (at \cos \theta, bt \sin \theta, t)$$

$$\text{amb } (\theta, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}^2.$$

86. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície i $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projecció sobre el pla xy . És π una aplicació diferenciable?

Solució: La idea intuïtiva de la definició d'aplicació diferenciable sobre una superfície, és que escrita en coordenades aquesta aplicació sigui diferenciable.

A més, ser diferenciable és una qüestió local, de manera que ens podem restringir a una carta local $\varphi : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ donada per $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Per hipòtesis, aquestes tres funcions coordenades són diferenciables, de manera que l'aplicació que ens demana el problema, que en coordenades és $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $\pi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ és diferenciable.

87. Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que l'aplicació antipodal de S^2 és un difeomorfisme.

Solució: Si parametritzem l'esfera, com és habitual, per la longitud i la colatitud, $\psi(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ l'aplicació antipodal en coordenades està donada per

$$(\theta, \varphi) \rightarrow (\theta + \pi, \pi - \varphi),$$

la qual és clarament diferenciable.

88. Comproveu que el paraboloides $\mathcal{P}$ definit per $z = x^2 + y^2$ és una superfície difeomorfa al pla.

Solució: Definim $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, per $f(x, y, z) = (x, y)$. Observem que f en coordenades és la identitat. En particular diferenciable, cosa que ja sabem pel problema 86. Però f és clarament bijectiva i hem acabat.

89. Construïu un difeomorfisme entre l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i l'el·lipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Solució: Només hem de definir $f : \text{Esfera} \rightarrow \text{El·lipsoide}$ per $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$. Clarament ben definida ($f(x, y, z) \in \text{El·lipsoide}$) i bijectiva. A més, és diferenciable, ja que si pensem les dues superfícies com gràfiques de les corresponents funcions $z = z(x, y)$ (podem estudiar separatament els casos $z > 0$ i $z < 0$ i cobrir posteriorment els punts $z = 0$ amb cartes anàlogues però del tipus $x = x(y, z)$ i $y = y(x, z)$), f en coordenades és l'aplicació

$$(x, y) \rightarrow (ax, by)$$

la qual és clarament diferenciable.

90. a) Demostreu que l'equació del pla tangent en el punt (x_0, y_0, z_0) d'una superfície S donada per l'equació $f(x, y, z) = 0$, on 0 és un valor regular de f , és

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (5.1)$$

b) Apliqueu-ho a la superfície d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ i comproveu que en els punts de la forma $(x, y, 0)$ el pla tangent és paral·lel a l'eix $0z$.

c) Demostreu que l'equació del pla tangent a una superfície definida per $z = f(x, y)$, en el punt $p_0 = (x_0, y_0)$, és

$$z = f(p_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y - y_0).$$

Solució: a) L'equació (5.1) representa un pla que passa pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i té vector director $\text{grad } f(P)$. Per veure que aquest vector és justament el vector normal del pla tangent a S en P observem que qualsevol corba $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ sobre S compleix

$$f(x(s), y(s), z(s)) = 0.$$

Podem suposar $P = \gamma(0)$. Derivant en $s = 0$ tenim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y'(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)z'(0) = 0.$$

Però aquesta igualtat es pot escriure també com

$$\text{grad } f(P) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

És a dir, $\text{grad } f(P)$ és ortogonal a tots els vectors tangents en P a corbes sobre la superfície. Per tant, és el vector normal del pla tangent.

b) Si $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ tenim $\text{grad } f(P) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$ i per tant el pla tangent és

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0.$$

Ara és clar que si $z_0 = 0$ aquest pla és paral·lel a l'eix z .

c) Posant $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ estem en el cas anterior.

91. Determineu els plans tangents a la superfície $f(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - 1})$ en els punts $f(0, \sqrt{2})$ i $f(\sqrt{2}, 0)$.

92. Diem que dues superfícies de $\mathbb{R}^3$, S_1 i S_2 , s'intersecten transversalment si, per a cada $p \in S_1 \cap S_2$ es compleix $T_p \mathbb{R}^3 = T_p S_1 + T_p S_2$. Demostreu que si S_1 i S_2 s'intersecten transversalment llavors el conjunt $S_1 \cap S_2$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 1.

Solució: Aplicació directa del teorema de la funció implícita¹.

Considerem dues parametritzacions $\varphi(u, v)$ i $\psi(\bar{u}, \bar{v})$ i estudiem la seva intersecció $\varphi(u, v) = \psi(\bar{u}, \bar{v})$.

Per hipòtesis, un dels vectors φ_u o φ_v és linealment independent amb la parella $\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}}$. Suposem que siguin $\varphi_v, \psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}}$ linealment independents.

Considerem

$$\begin{aligned} F : \quad U \times \bar{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u, v, \bar{u}, \bar{v} &\mapsto \varphi(u, v) - \psi(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

La intersecció buscada són els zeros de F (que la pensem com una aplicació d'un obert de $\mathbb{R}$ per un obert de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$). El jacobià de F respecte de les tres darreres variables $v, \bar{u}, \bar{v}$ és justament el determinant de la matriu que té per columnes les components de $\varphi_v, \psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}}$, i és per tant, diferent de zero.

Així podem posar $v = v(u), \bar{u} = \bar{u}(u), \bar{v} = \bar{v}(u)$, que correspon a dues parametritzacions de la intersecció $v = v(u)$ (corba sobre la primera superfície), i $\bar{u} = \bar{u}(u), \bar{v} = \bar{v}(u)$, (la mateixa corba pensada ara sobre la segona superfície.)

5.2 L'aplicació de Gauss

93. Descriu la regió de S^2 recoberta per la imatge de l'aplicació de Gauss de les superfícies següents:

a) Cilindre circular $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$.

b) Con circular $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - c^2 z^2 = 0\}$.

¹Donada

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x, y &\mapsto F(x, y) \end{aligned}$$

amb $F(a, b) = 0$ i

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) \neq 0$$

podem posar, localment al voltant de (a, b) , les y 's en funció de les x 's, i.e. existeixen funcions diferenciables $y_j = y_j(x)$ tals que $F(x, y(x)) = 0$.

- c) Hiperboloide d'un full $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.
- d) Paraboloid circular $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$.
- e) Tor $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.
- f) $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

Solució: Abans de començar amb el problema farem dues observacions sobre l'aplicació de Gauss d'una superfície de revolució S , que es dedueixen de l'expressió del vector normal N de la parametrització habitual $\varphi(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))$ on $(x(u), z(u))$ és una corba del pla xz que gira al voltant de l'eix z (veure el problema 121)

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + z'^2}}(-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, x'(u))$$

1. La imatge per l'aplicació de Gauss d'un meridià ($v = \text{constant}$) de S està continguda en un meridià de l'esfera S^2 , ja que aquests meridians estan caracteritzats per ser la intersecció amb l'esfera dels plans $y = \lambda x$. En el nostre cas $\lambda = \tan v$.
2. La imatge per l'aplicació de Gauss d'un paral·lel ($u = \text{constant}$) de S descriu tot un paral·lel de l'esfera S^2 , ja que aquests paral·lels estan caracteritzats per ser la intersecció amb l'esfera dels plans $z = \text{constant}$. En el nostre cas aquesta constant és $x'/\sqrt{x'^2 + z'^2}$.

No oblidem que N està determinat llevat del signe. A l'anterior expressió hem pres com sentit positiu de N el donat per la direcció de $\varphi_u \wedge \varphi_v$, i depèn doncs de l'ordre de les variables (u, v) .

Observem que en el punt 1 anterior diem que la imatge d'un meridià està continguda en un meridià (en general no serà igual a tot el meridià) i en canvi en el punt 2 diem que la imatge del paral·lel és tot el paral·lel. Així, per veure quina és la imatge de l'aplicació de Gauss de S només hem d'observar la imatge de la seva restricció a un meridià de S , és a dir, del vector normal $(-z'(u), x'(u))$ de la corba generatriu $\alpha(u)$ de S . Les superfícies (a)–(f) són totes de revolució, per tant, en cada cas la imatge de l'aplicació de Gauss és

- (a) l'equador de S^2 ,
- (b) un paral·lel de S^2 que depèn de c , ja que en aquest cas $x(u) = cu, z(u) = u$, i per tant, recordant que si φ és la latitud d'un punt (x, y, z) sobre l'esfera tenim

$$\tan \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

en el nostre cas, mirant l'expressió de $N(u, v)$ que hem obtingut abans, serà

$$\tan \varphi = \frac{x'(u)}{|z'(u)|} = c.$$

Es tracte doncs del paral·lel de latitud $\theta = \arctan c$.

- (c) una banda oberta d'amplada $\frac{\pi}{2}$ centrada a l'equador de S^2 , ja que en aquest cas $x(u) = \cosh u, z(u) = \sinh u$, i per tant tenim

$$\tan \varphi = \frac{x'(u)}{|z'(u)|} = \tanh u.$$

Com $-1 < \tanh u < 1$, tenim $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$. Després fem variar v entre 0 i 2π .

- (d) l'hemisferi nord obert, ja que en aquest cas $x(u) = u, z(u) = u^2$, i per tant,

$$\tan \varphi = \frac{x'(u)}{|z'(u)|} = \frac{1}{2|u|}.$$

Així $0 < \tan \varphi < \infty$, i per tant $0 < \varphi \leq \pi/2$, que descriu tot l'hemisferi nord. Aquesta és la normal que apunta 'cap endins' en el paraboloid.

- (e) tota l'esfera dos cops. En aquest cas $x(u) = R + r \cos u, z(u) = r \sin u$. Per tant $\tan \varphi = -\frac{\sin u}{|\cos u|}$, cosa que vol dir que φ pot prendre qualsevol valor, és a dir, per a una v fixada tenim tot el meridià. Però els meridians estan caracteritzats per $y = \lambda x$ amb $\lambda = \tan v$, per tant per als valors v i $v + \pi$ estem en el mateix meridià. Per tant aquest meridià està recorregut dues vegades. Al variar v s'agafen tots els meridians dos cops, es a dir la imatge de l'aplicació de Gauss del tor és S^2 recorreguda dos cops.

- (f) En aquest cas $x(u) = \cosh u, z(u) = u$, i per tant $\tan \varphi = \sinh u$, cosa que vol dir que la imatge de l'aplicació de Gauss és tot S^2 , excepte els pols, ja que $-\infty < \sinh u < \infty$.

94. Helicoide. a) Comproveu que $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ és una parametrització regular de la superfície S de $\mathbb{R}^3$ donada per l'equació

$$y \cos \frac{z}{a} - x \sin \frac{z}{a} = 0.$$

Aquesta superfície es diu *helicoide*.

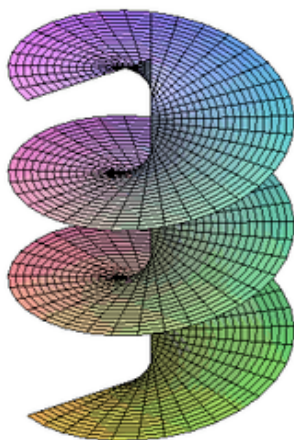
- b) Calculeu el vector normal N i l'equació del pla tangent Π en un punt arbitrari de S .
- c) Demostreu que, al llarg de la corba coordenada $u = u_0$, el pla tangent a S gira de manera que la tangent de l'angle que forma amb l'eix z és proporcional a la distància del punt $\varphi(u_0, v)$ a l'eix z . Entenem que l'angle entre el pla i l'eix z és el complementari de l'angle entre el vector normal al pla i l'eix z .
- d) L'aplicació de Gauss, és exhaustiva? És injectiva?²

Solució: a) És clar que

$$y \cos \frac{z}{a} - x \sin \frac{z}{a} = v \sin u \cos u - v \cos u \sin u = 0.$$

Per tant, els punts $\varphi(u, v)$ verifiquen l'equació implícita de l'helicoide.

²L'aplicació de Gauss de les superfícies minimals ha estat molt estudiada, vegeu per exemple el survey *Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* , F. López, F. Martín, Pub. Mat. UAB, 43, 1999.



b) Tenim

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (-v \sin u, v \cos u, au) \\ \varphi_v(u, v) &= (\cos u, \sin u, a) \\ N(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}}(-a \sin u, a \cos u, -v)\end{aligned}$$

El pla tangent en el punt de coordenades (u, v) està donat per

$$N(u, v) \cdot (x - v \cos u, y - v \sin u, z - au) = 0.$$

La condició de que $\varphi(u, v)$ sigui regular, esmentada a l'apartat a), és equivalent a la condició $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$, que es comprova ara fàcilment.

c) Per calcular l'angle entre $N(u, v)$ i l'eix de les z 's fem

$$N(u, v) \cdot (0, 0, 1) = \cos \theta = -\frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}}.$$

Entenem que l'angle de què ens parla el problema és el complementari de θ , $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Per tant,

$$\tan \beta = \cot \theta = -\frac{v}{a},$$

i com que v és justament la distància de $\varphi(u, v)$ a l'eix de les z 's hem acabat.

De fet, les corbes $u = u_0$ de que parla el problema són rectes del pla $z = au_0$ de pendent, en aquest pla, $\tan u_0$. Al llarg d'aquestes rectes, a mesura que ens allunyem de l'eix de les z 's, el pla tangent va girant de manera proporcional a la distància que ens separa de l'eix.

d) No agafa els pols. Cada punt de l'esfera diferent dels pols té infinites antiimatges. De fet, acabem de veure que $-\infty < \tan \beta = -\frac{v}{a} < \infty$, ja que v pot prendre tots els valors reals. Per tant, en variar v amb $u = u_0$ obtenim com imatge de l'aplicació de Gauss tot el meridià determinat pel pla $y = -\cot u x$, excepte els pols.

Com que per a cada valor $u = u_0$ obtenim tot el meridià, en variar u_0 obtenim aquest meridià infinites vegades.

També existeix una altra recta continguda a l'helicoid: l'eix Oz , donat per $v = 0$. Quan ens restringim a aquesta recta el vector normal N gira constantment descrivint infinites vegades l'equador de S^2 .

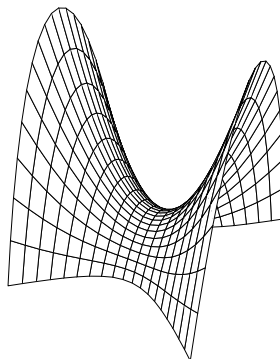
- 95.** Estudieu l'aplicació de Gauss restringida a cada generatriu (recta continguda) del paraboloid hiperbòlic

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid cz = xy\}.$$

Solució: El paraboloid hiperbòlic d'equació $cz = xy$ té com a generatrius les rectes $x = x_0$ i $y = y_0$, la situació és completament simètrica en x i en y . Utilitzant la parametrització $(x, y) \mapsto (x, y, \frac{xy}{c})$ tenim que el seu vector normal és

$$N(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}}, \frac{-c}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}} \right).$$

De manera que la restricció a $x = x_0$ de N està continguda al pla $cy + x_0z = 0$, i de fet descriu la meitat del cercle màxim de S^2 corresponent a la intersecció de S^2 amb aquest pla per l'origen.



5.3 Primera forma fonamental

- 96.** Trobeu la primera forma fonamental de les quàdriques del problema **85**, respecte de les parametritzacions corresponents.

Solució: Només escriurem la primera forma fonamental del el·lipsoide de semieixos (a, b, c) . Posem $u = \theta$ (longitud) i $v = \varphi$ (latitud), aleshores:

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (a \cos v \cos u, b \cos v \sin u, c \sin v) \\ \varphi_u &= (-a \cos v \sin u, b \cos v \cos u, 0) \\ \varphi_v &= (-a \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, c \cos v) \\ E(u, v) &= \cos^2 v (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \\ F(u, v) &= \frac{a^2 - b^2}{4} \sin 2u \sin 2v \\ G(u, v) &= a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 v\end{aligned}$$

En particular, si $a = b = c = R$ obtenim la primera forma fonamental de l'esfera de radi R en coordenades esfèriques (θ, φ) :

$$\begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

que s'acostuma a escriure

$$\begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix},$$

on r és la distància mesurada sobre l'esfera (coordenades polars geodèsiques).

97. Trobeu la primera forma fonamental del pla en coordenades polars.

Solució: Sigui $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ la parametrització del pla $\{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ amb coordenades polars. Llavors,

$$\begin{aligned}\varphi_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \varphi_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}E(r, \theta) &= 1 \\ F(r, \theta) &= 0 \\ G(r, \theta) &= r^2\end{aligned}$$

98. Projectió estereogràfica. Trobeu la primera forma fonamental de l'esfera en les coordenades induïdes per la projecció estereogràfica. Comproveu que la projecció estereogràfica és conforme, i.e. que conserva els angles.

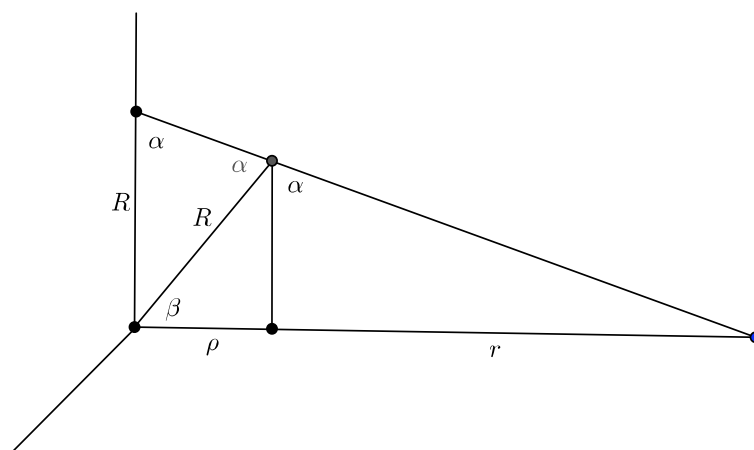
Indicació. L'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$ és l'esfera de radi 1 centrada a l'origen de coordenades. La projecció estereogràfica de S^2 sobre el pla de l'equador (d'equació $z = 0$) està definida de la manera següent: Si P és qualsevol punt de S^2 diferent del pol nord, la imatge P' de P és el

punt del pla $z = 0$ obtingut per intersecció d'aquest pla amb la recta que uneix P i el pol nord. Si (x, y, z) són les tres coordenades d'un punt $P \in S^2$ i $(x', y', 0)$ són les coordenades de la seva projecció estereogràfica P' , expresseu x' i y' en funció de x, y, z .

Solució: Treballarem amb les coordenades cilíndriques de $\mathbb{R}^3$, i.e., (r, θ, z) amb el canvi de coordenades habitual: $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$. La projecció estereogràfica de l'esfera de radi R sobre el pla té com a inversa

$$\sigma(r, \theta) = \left(\frac{2r \cos \theta}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}, \frac{2r \sin \theta}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}, \frac{R\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right)}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right)$$

prenent coordenades polars (r, θ) en el pla. En efecte, treballant amb les dues coordenades (r, z) de les cilíndriques (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$ tenim que σ ve determinada per la solució en λ de $(0, R) + \lambda(r - 0, 0 - R) = (\lambda r, R(1 - \lambda)) \in \{r^2 + z^2 = R^2\}$, d'on $\lambda = \frac{2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}$.



De fet, es veu directament mirant el dibuix, en el que $\beta = 2\alpha - \pi/2$, que $\tan \alpha = \frac{r}{R}$, i per tant, les coordenades (cilíndriques) del punt de tall de la recta que passa pel pol nord i l'esfera són

$$\begin{aligned} \rho &= R \cos \beta = R \sin 2\alpha = 2R \sin \alpha \cos \alpha = 2R \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2r}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \\ z &= R \sin \beta = -R \cos 2\alpha = -R(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = R \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = R \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Podem prendre llavors, σ com una parametrització de la esfera i calcular

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= \left(\frac{2R^2(R^2 - r^2) \cos \theta}{(R^2 + r^2)^2}, \frac{2R^2(R^2 - r^2) \sin \theta}{(R^2 + r^2)^2}, \frac{4R^3 r}{(R^2 + r^2)^2} \right) \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \left(\frac{-2r \sin \theta}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}, \frac{2r \cos \theta}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}, 0 \right) \end{aligned}$$

obtenint com a primera forma fonamental de l'esfera en aquestes coordenades

$$\begin{pmatrix} \frac{4R^2}{(r^2+R^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^4 r^2}{(r^2+R^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{4R^2}{(r^2+R^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

és a dir un múltiple de la primera forma fonamental del pla en coordenades polars. Això ens diu que l'angle que formen de dos vectors tangents al pla és igual al que formen les seves imatges sobre la esfera després de portar-los mitjançant la diferencial de σ , és a dir, que σ és una aplicació conforme.

5.4 Segona Forma Fonamental

99. Calculeu, a l'origen, l'aplicació de Weingarten, la primera i segona formes fonamentals i les curvatures i direccions principals de les superfícies de $\mathbb{R}^3$:

- a) $z = x^2 + y^2$ (paraboloide el·líptic).
- b) $z = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbòlic).
- c) Repetiu l'exercici per a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, però ara feu els càlculs en un punt arbitrari.

Solució: a) Parametritzem el paraboloide el·líptic com $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ de manera que tenim

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (1, 0, 2x) \\ \varphi_y &= (0, 1, 2y) \\ \varphi_x \wedge \varphi_y &= (-2x, -2y, 1) \\ \nu(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}(-2x, -2y, 1), \quad r^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi_{xx} &= (0, 0, 2) \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

Per tant, en $(x, y) = (0, 0)$, tenim

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'origen és, doncs, un punt umbilical. Totes les direccions són direccions de curvatura amb curvatura principal 2.

b)

c) Parametritzem l'esfera per $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ de manera que tenim

$$\begin{aligned}\varphi_x &= (1, 0, -x/z), & z &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ \varphi_y &= (0, 1, -y/z) \\ \varphi_x \wedge \varphi_y &= \frac{1}{z}(x, y, z) \\ \nu(x, y) &= (x, y, z) \\ e &= -\varphi_x \cdot \nu_x = \frac{x z_x}{z} - 1 \\ f &= -\varphi_x \cdot \nu_y = \frac{x z_y}{z} \\ g &= -\varphi_y \cdot \nu_y = \frac{y z_y}{z} - 1\end{aligned}$$

Per tant, com que $z_x = -x/z$ i $z_y = -y/z$

$$I = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Veiem doncs que la segona forma fonamental és un múltiple de la primera, com ja sabíem ja que a l'esfera tots els punts són umbilicals.

100. Determineu l'aplicació de Weingarten i calculeu la segona forma fonamental de les superfícies de $\mathbb{R}^3$ considerades a l'exercici **140**.

Solució: a) Tenim

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, u^2) \\ \varphi_u &= (\cos v, \sin v, 2u) \\ \varphi_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) \\ \varphi_u \wedge \varphi_v &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u) \\ \nu(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}}(-2u \cos v, -2u \sin v, 1) \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, 2) \\ \varphi_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0)\end{aligned}$$

La segona forma fonamental és doncs

$$II = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix}$$

i l'endomorfisme de Weingarten

$$W = I^{-1}II = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}} \begin{pmatrix} (4u^2 + 1)^{-1} & 0 \\ 0 & u^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(4u^2 + 1)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(4u^2 + 1)^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

5.5 Curvatura de Gauss

- 101.** Demostreu que la curvatura de Gauss K i la curvatura mitjana³ H d'una superfície $\varphi(u, v)$ es poden calcular a partir de les fórmules

$$\begin{aligned} K\sqrt{EG - F^2} &= \det(\nu, \nu_u, \nu_v) \\ -2H\sqrt{EG - F^2} &= \det(\nu, \varphi_u, \nu_v) + \det(\nu, \nu_u, \varphi_v) \end{aligned}$$

on E, F, G són els coeficients de la primera forma fonamental i ν és el camp normal unitari en la direcció donada per $\varphi_u \wedge \varphi_v$.

Solució: Si escrivim

$$\begin{aligned} \nu_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v \\ \nu_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v \end{aligned}$$

veiem directament que

$$\det(\nu, \nu_u, \nu_v) = \det(a_{ij}) \det(\nu, \varphi_u, \varphi_v) = K(\nu \cdot \varphi_u \wedge \varphi_v) = K|\varphi_u \wedge \varphi_v| = K\sqrt{EG - F^2}.$$

Anàlogament,

$$\det(\nu, \varphi_u, \nu_v) + \det(\nu, \nu_u, \varphi_v) = a_{22} \det(\nu, \varphi_u, \varphi_v) + a_{11} \det(\nu, \varphi_u, \varphi_v) = (a_{11} + a_{22})\sqrt{EG - F^2}$$

i com que la traça de l'endomorfisme de Weingarten és menys el doble de la curvatura mitjana hem acabat. Recordeu que l'endomorfisme de Weingarten és igual a menys la diferencial de la normal, $W = -d\nu$.

- 102.** Sigui S una superfície que és tangent a un pla Π al llarg d'una corba regular C . Demostreu que S té curvatura de Gauss nul·la en cada punt de C . Estudieu el cas particular del tor de revolució.

Solució: Sigui $p \in C$, volem veure que $K(p) = \det W(p) = 0$. És a dir, que l'aplicació de Weingarten en p té un valor propi nul. Sigui $\alpha(s)$ una parametrització de C de manera que $\alpha(0) = p$. Aleshores $\alpha'(0)$ és un vector del nucli de l'aplicació de Weingarten en p :

$$d\nu_S(w) = d\nu_S(\alpha'(0)) = \left. \frac{d\nu_S(\alpha(s))}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\nu_\Pi(\alpha(s))}{ds} \right|_{s=0} = 0$$

ja que $\nu_{S|_C} = \nu_{\Pi|_C}$ i aquest últim és constant en tot el pla Π .

- 103.** Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície

$$\varphi(u, v) = (u + v, uv, v)$$

³De la curvatura mitjana se'n diu també curvatura de Sophie Germain, en honor a aquesta col·lega i gran coneixedora de l'obra de Gauss que entre altres coses va publicar l'article *Mémoire sur la courbure des surfaces*.

Solució: Per variar una mica el fem amb Maple.

```
>with(Student[VectorCalculus]):with(LinearAlgebra):
>surf:=[u+v,u*v,v]; obtenim [u + v, uv, v]
>A:=Jacobian(surf,[u,v]);
>E:=simplify(Column(A,1).Column(A,1));
F:=simplify(Column(A,1).Column(A,2));
G:=simplify(Column(A,2).Column(A,2)); obtenim E = 1 + v^2, F = 1 + uv, G = 2 + u^2
>NN:=simplify(CrossProduct(Column(A,1),Column(A,2)));
N:=simplify(NN/sqrt(NN.NN)); obtenim NN = (v, -1, u - v)
> B:=simplify(Jacobian(N,[u,v]));
>l:=simplify(Column(B,1).Column(A,1));
m:=simplify(Column(B,1).Column(A,2));
n:=simplify(Column(B,2).Column(A,2)); obtenim l = 0, m =  $\frac{1}{\sqrt{1 + 2v^2 + u^2 - 2uv}}$ , n = 0
>K:=simplify((l * n - m^2)/(E * G - F^2)); obtenim K =  $-\frac{1}{(1+2v^2+u^2-2uv)^2}$ 
```

- 104.** Demostreu que la superfície $z = axy$ (hiperboloide) té, a l'origen, curvatura de Gauss $K = -a^2$ i curvatura mitjana $H = 0$.

Solució: Considerem la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, axy)$.

$$\begin{aligned}
 \varphi_x &= (1, 0, ay) \\
 \varphi_y &= (0, 1, ax) \\
 E &= 1 + a^2 y^2 \\
 F &= a^2 xy \\
 G &= 1 + a^2 x^2 \\
 N &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 x^2 + a^2 y^2}} (-ay, -ax, 1) \\
 \varphi_{xx} &= (0, 0, 0) \\
 \varphi_{xy} &= (0, 0, a) \\
 \varphi_{yy} &= (0, 0, 0) \\
 e &= 0 \\
 f &= \varphi_{xy} \cdot N = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 x^2 + a^2 y^2}} \\
 g &= 0 \\
 K &= \frac{\det II}{\det I} = -\frac{a^2}{1 + a^2 x^2 + a^2 y^2}
 \end{aligned}$$

Per tant, a l'origen $(x, y) = (0, 0)$ tenim $K = -a^2$. A l'origen la primera forma fonamental és la identitat, de manera que la traça de l'endomorfisme de Weingarten coincideix amb la traça de la segona forma fonamental II (a l'origen), que és zero. Per tant $H = 0$.

5.6 Punts umbilicals

- 105.** Sigui S una superfície connexa i suposem que tots els seus punts són *umbilicals* (un punt es diu *umbilical* si les curvatures principals en aquest punt són iguals). Demostreu que S està continguda en una esfera o en un pla.

Solució: En aquestes hipòtesis tota corba sobre la superfície és línia de curvatura. En particular, les línies coordenades són línies de curvatura. Apliquem el teorema d'Olinde⁴ a les corbes $u = \text{constant}$ i $v = \text{constant}$ (suposem $\varphi(u, v)$ una parametrització local d'aquesta superfície).

$$\begin{aligned}\nu_u(u, v) &= \lambda(u, v)\varphi_u(u, v) \\ \nu_v(u, v) &= \lambda(u, v)\varphi_v(u, v)\end{aligned}$$

Observem que la hipòtesis de que tots els punts són umbilicals és la que ens ha permès posar la mateixa funció $\lambda(u, v)$ tant a $\nu_u(u, v)$ com a $\nu_v(u, v)$. Escriurem abreujadament

$$\begin{aligned}\nu_u &= \lambda\varphi_u \\ \nu_v &= \lambda\varphi_v\end{aligned}$$

Imposant $\nu_{uv} = \nu_{vu}$ obtenim

$$\lambda_u\varphi_v = \lambda_v\varphi_u.$$

Però com φ_u i φ_v són linealment independents, ha de ser $\lambda_u = \lambda_v = 0$, i per tant $\lambda = \text{constant}$. Si aquesta constant és zero estem en el cas del pla. Suposem, doncs, a partir d'ara $\lambda \neq 0$. Integrant obtenim

$$\nu = \lambda\varphi + \vec{a}$$

on $\vec{a}$ és un vector constant. Com $\nu \cdot \nu = 1$ tenim

$$1 = \lambda^2\varphi \cdot \varphi + 2\lambda\varphi \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a}.$$

Així

$$\left(\varphi + \frac{\vec{a}}{\lambda}\right) \cdot \left(\varphi + \frac{\vec{a}}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Per tant, tots els punts de la forma $\varphi(u, v)$ pertanyen a l'esfera de centre $-\vec{a}/\lambda$ i radi $1/\lambda$.

- 106.** Demostreu que si totes les normals a una superfície connexa passen per un punt fix la superfície està continguda en una esfera.

Solució: Suposem que el punt fix és l'origen. Llavors la parametrització de la superfície compleix

$$\varphi(u, v) = \lambda(u, v)\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)$$

⁴Condicció necessària i suficient per a que una corba C sobre una superfície sigui línia de curvatura és que

$$\nu'(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$$

on $\nu(t) = \nu(\gamma(t))$, essent $\gamma(t)$ qualsevol parametrització de C . En aquest cas, $-\lambda(t)$ és la curvatura principal de la superfície al llarg de $\gamma(t)$.

per a una certa funció $\lambda(u, v)$. En particular, $\varphi \cdot \varphi_u = \varphi \cdot \varphi_v = 0$, on hem escrit φ en lloc de $\varphi(u, v)$, etc. Això implica que les derivades parcials de la norma de φ , són zero. És a dir, la norma de φ és constant, i per tant tots els punts $\varphi(u, v)$ estan sobre l'esfera de centre l'origen i radi $R = |\varphi(u, v)|$.

- 107.** Demostreu que un punt d'una superfície és *umbilical* si i només si la segona forma fonamental en aquest punt és un múltiple de la primera. Calculeu els punts *umbilicals* de l'el·lipsoide d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

on $0 < c < b < a$. Demostreu que els plans tangents a l'el·lipsoide en els punts umbilicals són paral·lels a les seccions cícliques (plans que tallen l'el·lipsoide en cercles).

Solució: Parametritzem l'el·lipsoide per $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, amb

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \sin v \\ y &= b \cos u \cos v \\ z &= c \sin u \end{aligned}$$

Obtenim

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (-a \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, c \cos u) \\ \varphi_v &= (a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, 0) \\ \varphi_u \wedge \varphi_v &= (bc \cos^2 u \sin v, ac \cos^2 u \cos v, ab \sin u \cos u) \\ \nu &= \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \\ \varphi_{uu} &= (-a \cos u \sin v, -b \cos u \cos v, -c \sin u) \\ \varphi_{uv} &= (-a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-a \cos u \sin v, -b \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

El coeficient F de la primera forma fonamental val

$$F = \varphi_u \cdot \varphi_v = (b^2 - a^2) \sin u \cos u \sin v \cos v.$$

El coeficient f de la segona forma fonamental val

$$f = \varphi_{uv} \cdot \nu = 0.$$

Com que en els punts umbilicals la primera i la segona forma fonamentals són proporcionals ha de ser $F = 0$, i per tant tenim quatre possibilitats: $u = 0, v = \pi/2, v = \pi, v = 3\pi/2$, ja que estem assumint $-\pi/2 < u < \pi/2, 0 < v < 2\pi$.

Primer cas: $u = 0$. La primera forma fonamental val

$$I = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v \end{pmatrix}$$

i la segona

$$II = \frac{-abc}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que, en general tenim,

$$\begin{aligned} e &= \varphi_{uu} \cdot \nu = \frac{-abc \cos u}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \\ g &= \varphi_{vv} \cdot \nu = \frac{-abc \cos^3 u}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \end{aligned}$$

Per tal de que la primera i la segona forma fonamentals siguin proporcionals ha de ser

$$a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v = c^2,$$

equivalentment

$$\cos^2 v = \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2},$$

cosa impossible, ja que $0 < c < b < a$.

Segon cas: $v = \pi/2$. La primera forma fonamental val

$$I = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & b^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

i la segona

$$II = \frac{-abc \cos u}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Per tal de que la primera i la segona forma fonamentals siguin proporcionals ha de ser

$$(a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u) \cos^2 u = b^2 \cos^2 u,$$

és a dir

$$\cos^2 u = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2},$$

o bé,

$$\cos u = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

Observem que hi ha dos angles $u_1, u_2 = -u_1$, entre $-\pi/2$ i $\pi/2$, amb aquest cosinus. Tenim doncs dos punts umbilicals

$$U_i = (a \cos u_i, 0, c \sin u_i), \quad i = 1, 2,$$

és a dir,

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, 0, c \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right), \\ U_2 &= \left(a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, 0, -c \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right). \end{aligned}$$

El pla tangent a l'elipsoide en U_i és

$$(x - a \cos u_i)bc \cos u_i + (z - c \sin u_i)ab \sin u_i = 0.$$

Es pot escriure com

$$z = -\left(\frac{c}{a} \cot u_i\right)x + d_i$$

per a una certa constant d_i . Són doncs paral·lels a les seccions cícliques (veure Lema below).

Tercer cas: $v = \pi$. La primera forma fonamental val

$$I = \begin{pmatrix} b^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

i la segona

$$II = \frac{-abc \cos u}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Per tal de que la primera i la segona forma fonamentals siguin proporcionals ha de ser

$$(b^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u) \cos^2 u = a^2 \cos^2 u,$$

equivalentment

$$\cos^2 v = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2},$$

cosa impossible, ja que $0 < c < b < a$.

Quart cas: $v = 3\pi/2$. És igual al cas $v = \pi/2$, només canvia el signe de la x , de manera que els quatre punts umbilicals de l'elipsoide són

$$\left(\pm a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right).$$

Lema. El pla $z = \lambda x$, amb

$$\lambda = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}$$

talla l'elipsoide donat en circumferències.

Demostració. Substituint $z = \lambda x$ a l'equació de l'elipsoide obtenim

$$y = b\sqrt{1 - Ax^2}, \quad \text{amb } A = \frac{c^2 + a^2\lambda^2}{a^2c^2}.$$

Així, la corba solució és

$$\gamma(x) = (x, b\sqrt{1 - Ax^2}, \lambda x).$$

Com que

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \left(1, \frac{-bAx}{\sqrt{1 - Ax^2}}, \lambda\right) \\ \gamma''(x) &= \left(0, \frac{-bA}{(\sqrt{1 - Ax^2})^3}, 0\right) \end{aligned}$$

la curvatura val

$$k = \frac{bA\sqrt{1+\lambda^2}}{(\sqrt{(1+\lambda^2)(1-Ax^2)} + A^2b^2x^2)^3}$$

Per que sigui constant (i així $\gamma(x)$ sigui un cercle) el coeficient de x^2 ha de ser zero. És a dir,

$$Ab^2 = 1 + \lambda^2$$

Substituint A pel seu valor i simplificant obtenim

$$\lambda = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}}$$

com volíem.

108. Determineu els punts *umbilicals* de les superfícies definides per

a) $z = xy$.

b) $z = x^3 - 3xy^2$.

c) $z = \frac{x^2}{a^2} + \epsilon \frac{y^2}{b^2}$, on $\epsilon = \pm 1$.

Solució: Recordem que la curvatura de Gauss K compleix que $K = k_1k_2$, on k_1, k_2 són les curvatures principals. En els punts umbilicals, $K = k^2 \geq 0$.

a) Hem vist a l'exercici **104** que la curvatura de Gauss de l'hiperboloide $z = xy$ és estrictament negativa en tots els punts. Per tant, no hi ha punts umbilicals.

b) Hem vist a l'exercici **150** que la curvatura de Gauss de la sella de mico $z = x^3 - 3xy^2$ és estrictament negativa en tots els punts, excepte a l'origen, on val zero. A l'origen l'endomorfisme de Weingarten s'anul·la, de manera que és un punt umbilical amb $k_1 = k_2 = 0$.

c) $\epsilon = 1$. La parametrització és $\varphi(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2})$. Primera i segona forma fonamental

$$I = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^2b^2} \\ \frac{4uv}{a^2b^2} & 1 + \frac{4v^2}{b^4} \end{pmatrix}, \quad II = -\frac{2}{\sqrt{a^4b^4 + 4u^2b^4 + 4v^2a^4}} \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Per tant la curvatura de Gauss val

$$K = \frac{4a^6b^6}{(a^4b^4 + 4u^2b^4 + 4v^2a^4)^2}$$

I la curvatura mitjana val

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = -\frac{a^2b^2}{(a^4b^4 + 4u^2b^4 + 4v^2a^4)^{3/2}}$$

La condició d'umbilical es pot escriure com $H^2 = K$.

$$H^2 - K = \frac{(a^4 b^8 + 8 a^4 b^4 v^2 - 2 a^6 b^6 - 8 a^2 b^6 u^2 + 16 a^4 v^4 - 8 a^6 v^2 b^2 + 32 a^2 v^2 b^2 u^2 + b^4 a^8 + 8 b^4 a^4 u^2 + 16 b^4 u^4) a^4 b^4}{(a^4 b^4 + 4 u^2 b^4 + 4 v^2 a^4)^3}$$

Suposem $a > b$. El parèntesis del numerador es pot escriure com

$$(4a^2 v^2 + b^2 a^2 (b^2 - a^2))^2 + 8a^2 b^4 u^2 (a^2 - b^2) + 32a^2 b^2 u^2 v^2 + 16b^4 u^4$$

que és una suma de quadrats que no s'anul·la mai. No hi ha punts umbilicals.

Suposem $a < b$. El parèntesis del numerador es pot escriure com

$$(4b^2 u^2 + b^2 a^2 (a^2 - b^2))^2 + 8a^4 b^2 v^2 (b^2 - a^2) + 32a^2 b^2 u^2 v^2 + 16a^4 v^4$$

que és una suma de quadrats que no s'anul·la mai. No hi ha punts umbilicals.

5.7 Curvatura de Gauss II

- 109.** Demostreu que si l'aplicació de Gauss d'una superfície S és *conforme*, llavors S és una esfera o una superfície minimal (curvatura mitjana zero).

Solució: Prenem una parametrització $\varphi(u, v)$ i en un punt arbitrari P prenem la base ortonormal de $T_P S$ formada pels vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten, és a dir, vectors unitaris que donen les direccions principals.

Així, en P , tindrem

$$\begin{aligned} d\nu(e_1) &= -k_1 e_1 \\ d\nu(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned}$$

Per a tota $\eta \in \mathbb{R}$ considerem el vector $v \in T_P S$ donat per $v = e_1 + \eta e_2$.

El cosinus de l'angle entre e_1 i v està donat per

$$\frac{e_1 \cdot v}{|e_1||v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Per altra banda

$$d\nu(v) = -k_1 e_1 - \eta k_2 e_2$$

de manera que el cosinus de l'angle format entre $d\nu(e_1)$ i $d\nu(v)$ és

$$\frac{d\nu(e_1) \cdot d\nu(v)}{|d\nu(e_1)||d\nu(v)|} = \frac{k_1^2}{|k_1|\sqrt{k_1^2 + k_2^2 \eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}}.$$

Igualant els valors d'aquests cosinus obtenim

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = 1.$$

Si $k_1 = k_2$ estem en el cas d'una esfera i si $k_1 = -k_2$ en el cas d'una superfície minimal.

110. Demostreu que les superfícies

$$\begin{aligned}\varphi(t, s) &= (t \cos s, t \sin s, s) && \text{Helicoide} \\ \psi(t, s) &= (t \sin s, t \cos s, \log t) && \text{Logaritmoide}\end{aligned}$$

tenen, en punts corresponents [mateixes coordenades (t, s)], la mateixa curvatura de Gauss, però l'aplicació que porta el punt de coordenades (t, s) de l'helicoide al punt de coordenades (t, s) del logaritmoide no és una isometria. [La curvatura no determina la mètrica].

Solució: Calculem la curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned}\varphi_t &= (\cos s, \sin s, 0) \\ \varphi_s &= (-t \sin s, t \cos s, 1) \\ E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= 1 + t^2 \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, -\cos s, t) \\ \varphi_{tt} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{ts} &= (-\sin s, \cos s, 0) \\ \varphi_{ss} &= (-t \cos s, -t \sin s, 0) \\ e &= 0 \\ f &= -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ g &= 0 \\ K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned}
 \psi_t &= (\sin s, \cos s, \frac{1}{t}) \\
 \psi_s &= (t \cos s, -t \sin s, 0) \\
 E &= 1 + \frac{1}{t^2} \\
 F &= 0 \\
 G &= t^2 \\
 \nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, \cos s, -t) \\
 \psi_{tt} &= (0, 0, -\frac{1}{t^2}) \\
 \psi_{ts} &= (\cos s, -\sin s, 0) \\
 \psi_{ss} &= (-t \sin s, -t \cos s, 0) \\
 e &= \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \\
 f &= 0 \\
 g &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
 K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2}
 \end{aligned}$$

Per veure que l'aplicació $f : \text{helicoide} \rightarrow \text{logaritmoide}$ donada per $f(\varphi(t, s)) = \psi(t, s)$ no és isometria hem de veure si la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base (φ_t, φ_s) coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base $(f_*\varphi_t, f_*\varphi_s)$.

Però

$$f_*\varphi_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi(t, s_0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(t, s_0) = \psi_t.$$

Anàlogament $f_*\varphi_s = \psi_s$. Però en els càlculs anteriors es veu que la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base (φ_t, φ_s) no coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base (ψ_t, ψ_s) .

111. Justifiqueu per què les següents superfícies no són dues a dues localment isomètriques:

- a) l'esfera,
- b) el cilindre,
- c) la sella definida per $z = x^2 - y^2$.

Solució: El Teorema Egregi de Gauss ens diu que si dos superfícies S_1 i S_2 són localment isomètriques aleshores les seves curvatures de Gauss són iguals en els punts corresponents per una isometria, és a dir, existeix una aplicació $F : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $K_{S_2} = K_{S_1} \circ F$. Ja sabem

que la curvatura de Gauss de l'esfera és constant i positiva, la del cilindre idènticament nul·la i finalment, la de la sella $z = x^2 - y^2$ no és constant en (x, y) . Per tant, cap parella d'aquestes tres superfícies poden ser localment isomètriques.

- 112.** Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'homotècia de raó positiva λ . Comproveu que $\bar{S} = F(S)$ és també una superfície i expresseu la curvatura de Gauss i la curvatura mitja de $\bar{S}$ en termes de les de S .

Solució: Si $\varphi(u, v)$ és una carta de S , llavors $\Psi(u, v) = F(\varphi(u, v))$ és una carta de $\bar{S}$. Així

$$\begin{aligned}\Psi_u &= dF\varphi_u \\ \Psi_v &= dF\varphi_v\end{aligned}$$

Equivalentment, si escrivim en coordenades posant $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ i $\Psi(u, v) = (\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v))$

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_u & \bar{x}_v \\ \bar{y}_u & \bar{y}_v \\ \bar{z}_u & \bar{z}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

Però com $F = \lambda Id$, tenim

$$\begin{aligned}\Psi_u &= \lambda\varphi_u \\ \Psi_v &= \lambda\varphi_v\end{aligned}$$

I per tant, si la primera forma fonamental de S és

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

la primera forma fonamental de $\bar{S}$ és

$$\bar{\mathbf{I}} = \lambda^2 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

També és clar que $\bar{\nu} = \nu$. Això vol dir que en punts amb les mateixes coordenades (u, v) les superfícies tenen la mateixa normal, ben entès que $\nu(u, v) = \nu(\varphi(u, v))$ i $\bar{\nu}(u, v) = \nu(\Psi(u, v))$.

En particular

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_u &= \frac{\partial \bar{\nu}(\Psi(u, v))}{\partial u} = \frac{\partial \nu(\varphi(u, v))}{\partial u} = \nu_u \\ \bar{\nu}_v &= \frac{\partial \bar{\nu}(\Psi(u, v))}{\partial v} = \frac{\partial \nu(\varphi(u, v))}{\partial v} = \nu_v\end{aligned}$$

Aplicant les fórmules del problema 101 tenim

$$\bar{K}\lambda^2\sqrt{EG - F^2} = \det(\bar{\nu}, \bar{\nu}_u, \bar{\nu}_v) = \det(\nu, \nu_u, \nu_v) = K\sqrt{EG - F^2}$$

i, per tant,

$$\bar{K} \cdot \lambda^2 = K.$$

Anàlogament

$$\begin{aligned} 2\bar{H}\lambda^2\sqrt{EG-F^2} &= \det(\bar{\nu}, \Psi_u, \bar{\nu}_v) + \det(\bar{\nu}, \bar{\nu}_u, \Psi_v) \\ &= \lambda \det(\nu, \varphi_u, \nu_v) + \lambda \det(\nu, \nu_u, \varphi_v) = \lambda 2H\sqrt{EG-F^2} \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\bar{H} \cdot \lambda = H.$$

5.8 Línies de curvatura

113. Equacions diferencials de les línies asimptòtiques i de les línies de curvatura. Sigui p un punt d'una superfície S . Diem que una direcció de $T_p S$ és asimptòtica si la curvatura normal de S en aquesta direcció és zero. Una corba regular de S es diu asimptòtica si, en cada punt, la seva recta tangent és una direcció asimptòtica de S . Sigui $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrització de S i denotem, respectivament, per E, F, G i e, f, g els coeficients de la primera i segona formes fonamentals de S referits a la parametrització φ . Demostreu que, si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es una corba regular sobre S , llavors:

a) α és línia de curvatura si i només si

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

b) α és asimptòtica si i només si $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$.

114. Demostreu que les corbes coordenades de la superfície

$$\varphi(u, v) = (e^a \cos b, e^a \sin b, a), \quad a = a(u, v) = \frac{u-v}{2}, b = b(u, v) = \frac{u+v}{2}$$

són línies asimptòtiques. Comproveu que sobre la línia $v = 0$ tenim $\tau^2 = -K$.

Solució: Calculem la segona forma fonamental.

$$\begin{aligned}
 \varphi_u &= \left(\frac{1}{2}e^a \cos b - \frac{1}{2}e^a \sin b, \frac{1}{2}e^a \sin b + \frac{1}{2}e^a \cos b, \frac{1}{2} \right) \\
 \varphi_v &= \left(-\frac{1}{2}e^a \cos b - \frac{1}{2}e^a \sin b, -\frac{1}{2}e^a \sin b + \frac{1}{2}e^a \cos b, -\frac{1}{2} \right) \\
 \nu &= (-\cos b, -\sin b, e^a) \frac{1}{\sqrt{1+e^{2a}}} \\
 \varphi_{uu} &= \left(-\frac{1}{2}e^a \sin b, \frac{1}{2}e^a \cos b, 0 \right) \\
 \varphi_{uv} &= \frac{1}{4}e^a (-2 \cos b, -2 \sin b, -\frac{1}{2}) \\
 \varphi_{vv} &= \left(\frac{1}{2}e^a \sin b, -\frac{1}{2}e^a \cos b, 0 \right) \\
 e &= \varphi_{uu} \cdot N = 0 \\
 f &= \varphi_{uv} \cdot N = -\frac{1}{2}e^{u/2} \\
 g &= \varphi_{vv} \cdot N = 0
 \end{aligned}$$

El fet de que $e = 0$ vol dir que les línies coordenades $v = \text{constant}$ són asimptòtiques. En efecte, el vector tangent a aquestes corbes té coordenades $(1, 0)$ respecte de la base (φ_u, φ_v) de manera que si diem e_1 a aquest vector tenim

$$II(e_1, e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e = 0.$$

Anàlogament, el fet de que $g = 0$ vol dir que les línies coordenades $u = \text{constant}$ són asimptòtiques. En efecte, el vector tangent a aquestes corbes té coordenades $(0, 1)$ respecte de la base (φ_u, φ_v) de manera que si diem e_2 a aquest vector tenim

$$II(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g = 0.$$

Per calcular la torsió de la línia $v = 0$ hem de calcular φ_{uuu} . És fàcil veure que aquesta derivada tercera la podem escriure com

$$\varphi_{uuu} = \frac{1}{2}\varphi_{uu} - \frac{1}{4}e^{u/2}(\cos u/2, \sin u/2, 0).$$

També ens simplifica els càlculs observar que

$$\varphi_u = \varphi_{uu} + \frac{1}{2}(e^{u/2} \cos u/2, e^{u/2} \sin u/2, 1).$$

Llavors

$$\tau(u) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_{uu} \cdot \varphi_{uuu}}{|\varphi_u \wedge \varphi_{uu}|^2} = \frac{1}{1+e^2}.$$

Per altra banda la primera forma fonamental val

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^u + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}e^u + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

de manera que

$$K(u, 0) = \frac{\det II(u, 0)}{\det I(u, 0)} = \frac{-f^2}{\frac{1}{4}e^u(1+e^u)} = -\frac{1}{1+e^u} = -\tau(u).$$

115. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular, i sigui $\alpha : I \rightarrow S$ una corba regular continguda a S . Suposem que α és una corba asimptòtica (i.e. que la seva curvatura normal és zero).

- Demostreu que $B = \nu \circ \alpha$, on B és el binormal a α i ν és el normal a S .
- Calculeu $II(T, T)$ i $II(N, T)$, on T i N són respectivament el tangent i el normal principal a α , i II és la segona forma fonamental.
- Demostreu que per tot $t \in I$ es compleix la igualtat $-\tau(t)^2 = K(\alpha(t))$, on τ és la torsió de α i K és la curvatura de Gauss de S .

Solució:

(a) Suposem que la corba α està parametritzada per l'arc. Tenim

$$k_n(\alpha'(t)) = II(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \langle -d\nu(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle = k(t)\langle \nu(\alpha(t)), \nu(t) \rangle = 0$$

ja que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \nu(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \nu(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle + \left\langle \nu(\alpha(t)), \frac{d}{dt} \alpha'(t) \right\rangle \\ &= \langle d\nu(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle + \langle \nu(\alpha(t)), k(t)\nu(t) \rangle. \end{aligned}$$

Com que la corba és regular tenim $k(t) \neq 0$ i per tant $\langle N(t), \nu(\alpha(t)) \rangle = 0$. Per tant, sobre α , ν és ortogonal a T i N . Això vol dir que $B = \pm \nu \circ \alpha$. Com que la tria del signe és arbitrària podem suposar $B = \nu \circ \alpha$.

(b) És clar que $II(T, T) = k_n(\alpha) = 0$. D'altra banda

$$\begin{aligned} II(N, T) &= II(T, N) = \langle -d\nu(T), N \rangle = \left\langle -\frac{d}{dt} \nu(\alpha(t)), N \right\rangle \\ &= \left\langle \nu(\alpha(t)), \frac{d}{dt} N \right\rangle = \langle \nu(\alpha(t)), -kT - \tau B \rangle = -\tau \langle N, N \rangle = -\tau \end{aligned}$$

(c) Sobre els punts de la forma $\alpha(t)$ podem expressar la primera i la segona formes fonamentals en la base formada per T i N . Aleshores

$$I(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & * \end{pmatrix}$$

Per tant $W(\alpha(t)) = II(\alpha(t))$ i la curvatura de Gauss sobre la corba és

$$K(\alpha(t)) = \det W(\alpha(t)) = -\tau^2(\alpha(t))$$

- 116.** Si el pla osculador al llarg d'una línia de curvatura (no asimptòtica en cap punt) forma angle constant amb el pla tangent a la superfície, llavors la corba és plana.

Solució: Conseqüència quasi directa d'Olinde. Sabem que al llarg d'una línia de curvatura $\gamma(s)$ es compleix

$$\frac{d\nu}{ds} = k\gamma'(s)$$

on $k = k(s)$ és la curvatura normal en la direcció $\gamma'(s)$.

L'angle entre el pla osculador i el pla tangent és l'angle entre els seus vectors normals: el binormal a la corba B i el normal a la superfície ν .

Derivant el producte escalar tenim

$$(B \cdot \nu)' = B' \cdot \nu + B \cdot \nu' = B' \cdot \nu + B \cdot kT = B' \cdot \nu = \tau N \cdot \nu = 0,$$

on $T = \gamma'(s)$ i N és el normal principal a la corba.

Per tant, si $N \cdot \nu \neq 0$ podem assegurar $\tau = 0$ i la corba és plana. Però la relació $k_n = k \cos(N, \nu)$ ens diu que si N i ν fossin ortogonals, seria $k_n = 0$, en contra de que la corba no sigui asimptòtica en cap punt.

- 117.** Demostreu que una corba γ sobre una superfície és línia de curvatura si i només si la recta tangent a γ i la recta tangent a la seva imatge esfèrica per l'aplicació de Gauss són paral·leles en punts corresponents.

Solució: Que les línies de curvatura tenen aquesta propietat és el Teorema d'Olinde Rodrigues. Recíprocament, si $\nu'(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$ aquesta funció $\lambda(s)$ és la curvatura normal en la direcció $T = \gamma'(s)$. En efecte, $II(T, T) = I(\nu', T) = \lambda I(T, T)$, és a dir $\lambda = II(T, T)/I(T, T)$ que és la definició de curvatura normal.

- 118.** Recordeu que una línia de curvatura d'una superfície és una corba tal que el seu vector tangent és una direcció principal en cada punt.

- Demostreu que una corba $\alpha : I \rightarrow S$ és línia de curvatura de S si i només si $(\nu \circ \alpha)'(t)$ és múltiple de $\alpha'(t) \forall t \in I$, on ν és el normal a S .
- Suposem que dues superfícies S_1 i S_2 es tallen en una corba C , que és línia de curvatura de S_1 . Demostreu que C és línia de curvatura de S_2 si i només si l'angle entre S_1 i S_2 és constant al llarg de C .
- Com aplicació comproveu que els meridians i els paral·lels d'una superfície de revolució són línies de curvatura.

Solució:

- (a) Una corba $\alpha : I \rightarrow S$ és línia de curvatura si i només si α' és una direcció principal $\forall t$, és a dir, si i només si $d\nu(\alpha'(t)) = \lambda(t) \cdot \alpha'(t) \forall t$. Equivalentment, $(\nu \circ \alpha)'(t) = \lambda(t) \cdot \alpha'(t)$.

- (b) Sigui $\alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C . Siguin ν_1 el normal a S_1 i ν_2 el normal a S_2 . Com són unitaris $0 = \langle \nu_i, \nu_i \rangle' = 2\langle \nu_i, \nu_i' \rangle$ on

$$\nu_i' = \frac{d}{ds} \nu_i(\alpha(s))$$

i

$$\langle \nu_i, \nu_i' \rangle = \frac{d}{ds} \langle \nu_i(\alpha(s)), \nu_i'(\alpha(s)) \rangle.$$

Per tant, $\nu_i \perp \nu_i'$ per $i = 1, 2$. Si l'angle entre S_1 i S_2 és constant al llarg de $\alpha(s)$ tenim $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ és una funció constant al llarg de $\alpha(s)$, d'on

$$0 = \langle \nu_1, \nu_2' \rangle + \langle \nu_1', \nu_2 \rangle,$$

Per ser C línia de curvatura de S_1 , $\nu_1' = -k_1 \alpha'(s)$, i per tant

$$\langle \nu_1', \nu_2 \rangle = 0$$

ja que $\alpha'(s)$ és tangent a S_2 .

Així,

$$\langle \nu_1, \nu_2' \rangle = 0$$

i ν_2' és, doncs, perpendicular a ν_1 i a ν_2 , i.e., té la direcció de $\alpha'(s)$ i per tant $\alpha(s)$ és també línia de curvatura de la segona superfície.

Recíprocament, si $\alpha(s)$ és també línia de curvatura de la segona superfície, llavors

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle' = \langle \nu_1, \nu_2' \rangle + \langle \nu_1', \nu_2 \rangle = 0,$$

i hem acabat.

- (c) Els meridians i paral·lels són corbes planes. Són doncs línies de curvatura d'aquest pla ($-d\nu = W = 0$). A més, l'angle entre la normal a aquest pla i la normal a la superfície de revolució és constant, vegeu 93.

119. Determineu les corbes asimptòtiques i les línies de curvatura de l'helicoida $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$ i comproveu que la seva curvatura mitjana és zero.

Solució: Calculem l'aplicació de Weingarten.

$$\begin{aligned}
 \varphi_u &= (-v \sin u, v \cos u, c) \\
 \varphi_v &= (\cos u, \sin u, 0) \\
 \nu &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + v^2}}(-c \sin u, c \cos u, -v) \\
 \varphi_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0) \\
 \varphi_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0) \\
 \varphi_{vv} &= (0, 0, 0) \\
 e &= \varphi_{uu} \cdot \nu = 0 \\
 f &= \varphi_{uv} \cdot \nu = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} \\
 g &= \varphi_{vv} \cdot \nu = 0
 \end{aligned}$$

Per tant

$$W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{v^2+c^2} \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Com la traça és zero la curvatura mitjana és zero.

L'equació de les línies de curvatura és

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ v^2+c^2 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = cu'^2(v^2+c^2) - cv'^2 = 0.$$

Resolent l'equació diferencial

$$\frac{v'}{\sqrt{v^2+c^2}} = u'$$

obtenim $v = c \sinh(u+k)$, on k és una constant arbitrària.

Per calcular les línies asimptòtiques resollem l'equació

$$(u' \quad v') \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 2cu'v' = 0.$$

Per tant, les línies asimptòtiques són les línies coordenades, $u = \text{constant}$ i $v = \text{constant}$.

120. Teorema de Monge⁵. Demostreu que una corba d'una superfície S és línia de curvatura si i només si les rectes normals a S al llarg de la corba formen una superfície desenvolupable.

Solució: Primer mètode. Sigui $\gamma(s)$ una línia de curvatura d'una certa superfície S . Suposem-la parametritzada per l'arc i denotem $\nu(s)$ la restricció a $\gamma(s)$ del vector normal a S .

La superfície engendrada per les normals de què ens parla el problema és

$$\varphi(s, t) = \gamma(s) + t\nu(s).$$

⁵No és que Monge trobés aquest teorema com una propietat de les línies de curvatura sinó que Monge defineix les línies de curvatura com línies tals que les normals en punts pròxims es tallen.

Recordem que, tal com va dir Olinde,

$$\frac{d\nu}{ds} = -k_n(s)\gamma'(s)$$

on $k_n(s)$ és la curvatura principal en la direcció principal $\gamma'(s)$.

Així

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \gamma'(s) + t\nu'(s) = (1 - kt)\gamma'(s) \\ \varphi_t &= \nu.\end{aligned}$$

Observem que la relació entre la curvatura de $\gamma(s)$, $k(s)$, i la curvatura principal $k_n(s)$ és $k_n(s) = k \cos \theta$, on θ és l'angle entre la normal a la superfície i la normal principal de $\gamma(s)$.

Per tant,

$$\widehat{\nu}(s, t) = \gamma'(s) \wedge \nu(s)$$

és el vector normal a la nova superfície i depèn només de s . És doncs constant al llarg de les generatrius. Això demostra ja que aquesta superfície és desenvolupable: és reglada amb el mateix pla tangent sobre les generatrius.

No obstant, podem trobar explícitament la línia de regressió, que jo en diré la línia que desenvolupa, ja que és una corba dins la superfície tal que les seves tangents coincideixen amb les generatrius de la superfície reglada.

En efecte, aquesta corba ha de ser de la forma

$$\sigma(s) = \gamma(s) + t(s)\nu(s)$$

i tal que

$$\sigma'(s) = \gamma'(s) + t'(s)\nu(s) + t(s)\nu'(s) = (1 - k_n(s)t(s))\gamma'(s) + t'(s)\nu(s)$$

tingui la direcció de $\nu(s)$. És a dir, ha de ser $1 - k_n(s)t(s) = 0$, que equival a $t(s) = \rho_n(s)$ on $\rho_n(s)$ és el radi de curvatura principal ($\rho = \rho_n \cos \theta$).

Si la línia de curvatura és també geodèsica (la normal a la corba i la normal a la superfície coincideixen) llavors la línia de regressió és justament l'evoluta d'aquesta línia.

Segon mètode. La línia de regressió és la línia característica de la família uniparamètrica de plans tangents.

família uniparamètrica de plans tangents a la superfície de Monge:

$$(x - \gamma(s)) \cdot \widehat{\nu}(s) = 0$$

Derivada primera:

$$(x - \gamma(s)) \cdot \widehat{\nu}'(s) = 0,$$

ja que $\gamma'(s) \cdot \widehat{\nu}(s) = 0$.

A més, $\widehat{\nu}'(s) = \gamma''(s) \wedge \nu(s) + \gamma'(s) \wedge \nu'(s) = k(s)n(s) \wedge \nu(s) = k\gamma'(s)$, de manera que de les dues equacions anteriors deduïm que $(x - \gamma(s))$ és ortogonal a $\widehat{\nu}(s)$ i a $\gamma'(s)$, per tant, ha de ser $x - \gamma(s) = \lambda(s)\nu(s)$, per a una certa funció $\lambda(s)$.

Derivada segona (derivem $(x - \gamma(s))k(s)\gamma'(s)$):

$$-k(s) + (x - \gamma(s))k'(s)\gamma'(s) + (x - \gamma(s))k(s)^2\vec{n}(s) = 0$$

on $\vec{n}(s)$ és el vector normal principal de $\gamma(s)$. Però el terme del mig de la suma és zero, de manera que tenim

$$-k(s) + \lambda(s)k(s)^2 \cos \theta = 0,$$

és a dir $\lambda(s) = \rho_n(s)$ com ja sabíem.

5.9 Superfícies de revolució

121. El conjunt de punts descrit per una corba plana regular $C \subset \Pi$ al girar sobre un eix contingut en el pla Π i que no talla a la corba C és una superfície regular anomenada *superfície de revolució* generada per la corba C .

- a) Proveu que si $C = \{(x, 0, z) \in \Pi = \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3, f(x, z) = 0\}$ i es pren com a eix de gir Oz aleshores la superfície de revolució generada per C ve donada per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$. Apliqueu-ho al cas particular en que C és una circumferència que no conté en el seu interior l'origen de coordenades.
- b) Demostreu que si $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ és una parametrització regular de C aleshores

$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$

és una parametrització regular de S . Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen paral·lels si $u = u_0$ i meridians si $v = v_0$. Trobeu una parametrització regular del tor de revolució.

- c) Trobeu la primera forma fonamental d'una superfície de revolució utilitzant la parametrització de l'apartat anterior (podeu suposar que $u \in [0, l]$ és el paràmetre arc de C).
- d) **Teorema de Pappus.** Amb les mateixes notacions dels apartats (b) i (c), comproveu que l'àrea de S està donada per

$$2\pi \int_0^l a(u) du.$$

Solució:

- (a) En coordenades cilíndriques (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$, S té equació $f(r, z) = 0$, com que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, tenim que en coordenades cartesianes S té per equació $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Sigui $0 < r < R$ i considerem la circumferència de radi r amb centre $(R, 0)$. Aquesta circumferència té equació $(x - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$, per tant, la superfície de revolució corresponent (tor) té per equació $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$.
- (b) Per construcció està clar que la imatge de φ està continguda en la superfície de revolució generada per la corba C . Vegem que aquesta parametrització és regular. Calculem els vectors tangents

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (a'(u) \cos v, a'(u) \sin v, b'(u)) \\ \varphi_v(u, v) &= (-a(u) \sin v, a(u) \cos v, 0)\end{aligned}$$

De manera que la primera forma fonamental ve donada per $E(u, v) = \|\alpha'(u)\|^2 \neq 0$, $F(u, v) = 0$ i $G(u, v) = a(u)^2 > 0$ ja que C no pot tallar a l'eix Oz . El seu determinat és $EG - F^2 = a^2 \|\alpha'\|^2 \neq 0$, per tant, la parametrització és regular. Per exemple, en el cas del tor podem prendre $\alpha(u) = (R + r \cos u, r \sin u)$ amb la qual cosa

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$$

és una parametrització regular del tor.

(c) Si u és el paràmetre arc de α aleshores la primera forma fonamental de S té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(u)^2 \end{pmatrix}$$

(d) L'element d'àrea és doncs $dA = a(u)du dv$ i l'àrea de S és igual a

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^l a(u) du = 2\pi \int_0^l a(u) du,$$

en particular, l'àrea del tor és igual a

$$2\pi \int_0^{2\pi r} (R + r \cos \frac{u}{r}) du = 2\pi R(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

122. Un altre Teorema de Pappus. Demostreu que si una làmina d'àrea A situada en el pla yz gira al voltant de l'eix de les y , genera una figura de volum V donat per

$$V = (2\pi z_0) \cdot A,$$

on z_0 és la coordenada z del centre de gravetat de la làmina. Calculeu el volum d'un tor de revolució.

Solució: Suposem que la làmina està limitada entre la gràfica de dues funcions $z = f(y)$, $z = g(y)$, amb $a \leq y \leq b$. La coordenada z del centre de gravetat està donada per

$$z_0 = \frac{1}{A} \int_L z dy dz = \frac{1}{A} \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{f(y)} z dz \right) dy = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(y)^2 - g(y)^2) dy = \frac{V}{2\pi A}.$$

on A és l'àrea de la làmina i V el volum del cos de revolució. Recordem que el volum del cos de revolució generat per la gràfica de $z = f(y)$ és

$$Volum = \pi \int_a^b f(y)^2 dy.$$

El volum del tor de revolució val doncs

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

123. Determineu l'aplicació de Weingarten i calculeu la segona forma fonamental d'una superfície de revolució i apliqueu-ho a les següents superfícies:

- a) Esfera.
- b) Tor (problema 121).
- c) Helicoide (problema 94).
- d) La superfície parametritzada per

$$\varphi(u, v) = (\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \log(u + \sqrt{u^2 + a^2})).$$

Solució: Anem a calcular primer l'aplicació de Weingarten d'una superfície de revolució en general. Les superfícies dels apartats (a), (b) i (d) en són casos particulars. Si prenem la parametrització de la corba generatriu $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ pel paràmetre arc, llavors el vector normal de S és

$$\nu(u, v) = (-b'(u) \cos v, -b'(u) \sin v, a'(u))$$

i llavors

$$\begin{aligned} W(\varphi_u) &= -d\nu(\varphi_u) = -\nu_u = (b''(u) \cos v, b''(u) \sin v, -a''(u)) \\ &= (k(u)a'(u) \cos v, k(u)a'(u) \sin v, k(u)b'(u)) = k(u)\varphi_u \\ W(\varphi_v) &= -d\nu(\varphi_v) = -\nu_v = (-b'(u) \sin v, -b'(u) \cos v, 0) = \frac{b'(u)}{a(u)}(-a(u) \sin v, a(u) \cos v, 0) \\ &= \frac{b'(u)}{a(u)}\varphi_v \end{aligned}$$

on $k(u)$ és la curvatura de $\alpha(u)$. Per tant, la matriu de l'aplicació de Weingarten W en la base φ_u, φ_v és diagonal i té com a valors propis (curvatures principals) $k(u)$ i $\frac{b'(u)}{a(u)}$. En particular, la curvatura de Gauss és igual a $K(u, v) = \frac{k(u)b'(u)}{a(u)}$. Les línies de curvatura són els meridians i els paral·lels. També podríem haver calculat la matriu de l'aplicació de Weingarten mitjançant la multiplicació de matrius $W = I^{-1} \cdot II$, on I denota la matriu de la primera forma fonamental i II la matriu de la segona forma fonamental. Aquest és un resultat de teoria que de vegades és molt útil ja que en general és molt més fàcil calcular II que $d\nu$. Si escrivim

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

llavors en el cas de les superfícies de revolució amb corba generatriu parametritzada per l'arc tenim que

$$\begin{aligned} e &= \langle \nu, \varphi_{uu} \rangle = a'b'' - a''b' \\ f &= \langle \nu, \varphi_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle \nu, \varphi_{vv} \rangle = b'a \end{aligned}$$

Particularitzem tot això als casos (a)–(d):

(a) L'esfera: $\varphi(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v)$, aleshores

$$I = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} -R \cos^2 v & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix} \quad W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

(b) El tor: $\varphi(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, llavors

$$I = \begin{pmatrix} (a + b \cos v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} (a + b \cos v) \cos v & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} \frac{-\cos v}{a + b \cos v} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b} \end{pmatrix}$$

(c) L'helicoid: $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, au)$, aleshores

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + u^2}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2 + u^2}} & 0 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{(a^2 + u^2)^{1/2}} \\ \frac{-a}{(a^2 + u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Per la superfície parametritzada per

$$\varphi(u, v) = (\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \log(u + \sqrt{u^2 + a^2}))$$

tenim que

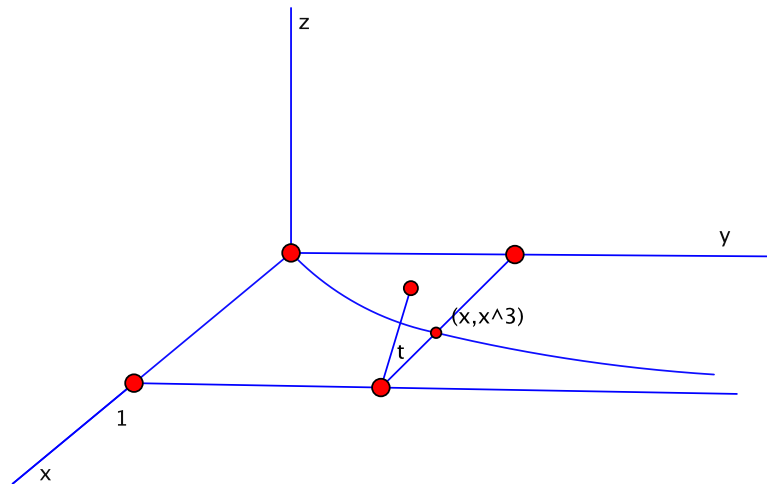
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} \frac{-a}{a^2 + u^2} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} \frac{-a}{a^2 + u^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{a^2 + u^2} \end{pmatrix}$$

Observem que aquesta última superfície també és de revolució, la seva corba generatriu és $\alpha(u) = (\sqrt{a^2 + u^2}, a \log(u + \sqrt{a^2 + u^2}))$ i s'anomena catenària. La superfície de revolució que genera es diu catenoide.

- 124.** Considerem la superfície de revolució que s'obté en girar la gràfica de la funció $y = x^3$, $x \in (-1, 1)$, al voltant de la recta $x = 1$. Trobeu els punts parabòlics, hiperbòlics i el·líptics d'aquesta superfície.

Solució: Mirant el dibuix, on hem de suposar una y fixada (pla paral·lel a x, z on té lloc la rotació) veiem que les equacions d'aquesta superfície són

$$\begin{aligned} x &= 1 - (1 - y^{1/3}) \cos t \\ y &= y \\ z &= (1 - y^{1/3}) \sin t \end{aligned}$$



Dient $\varphi(y, t)$ a l'anterior parametrització tenim

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \frac{1}{3}y^{-2/3}(\cos t, 3y^{2/3}, -\sin t) \\ \varphi_t &= (1 - y^{1/3})(\sin t, 0, \cos t) \\ \nu(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}y^{-4/3}}}(\cos t, -\frac{1}{3}y^{-2/3}, -\sin t) \\ \varphi_{yy} &= \frac{2}{9}y^{-5/3}(-\cos t, 0, \sin t) \\ \varphi_{yt} &= -\frac{1}{3}y^{2/3}(\sin t, 0, \cos t) \\ \varphi_{tt} &= (1 - y^{1/3})(\cos t, 0, -\sin t) \\ e &= \varphi_{yy} \cdot \nu = -\frac{2}{9}y^{-5/3} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}y^{-4/3}}} \\ f &= \varphi_{yt} \cdot \nu = 0 \\ g &= \varphi_{tt} \cdot \nu = (1 - y^{1/3}) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}y^{-4/3}}}\end{aligned}$$

El determinant de la segona forma fonamental és, doncs, igual a eg . Ara observem que g és sempre positiva i que e , i per tant el determinant, té el signe de $-y$.

Resumint, els punts on $y < 0$ són el·líptics, els punts on $y > 0$ són hiperbòlics, i els punts on $y = 0$ són parabòlics, cosa que es veia, o almenys s'intuïa, mirant només el dibuix.

125. Determineu les corbes asimptòtiques, les línies de curvatura, la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de les següents superfícies:

- a) La *catenoide*: superfície de revolució que s'obté girant la *catenària* (problema 4) al voltant d'una recta que no la talli i sigui perpendicular al seu eix de simetria.

- b) L'helicoides (problema 94).
- c) La *pseudoesfera*: superfície de revolució generada per la *tractriu* (problema 4) al voltant del seu eix.
- d) La *uralita*: Gràfica de $z = 2 \cos y$.

Solució:

(a) En primer lloc, observem que podem parametritzar la catenoides mitjançant

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

de manera que

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \\ \varphi_v(u, v) &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0) \\ \varphi_u \times \varphi_v &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \frac{1}{2} \sinh 2u) \\ \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= \cosh^2 u\end{aligned}$$

i llavors

$$I = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} -\operatorname{sech}^2 u & 0 \\ 0 & \operatorname{sech}^2 u \end{pmatrix}$$

amb la qual cosa

$$K(u, v) = -\operatorname{sech}^4 u \quad i \quad H(u, v) \equiv 0$$

D'altra banda, com que W és diagonal les línies coordenades són de curvatura, i com que II també és diagonal, com abans, les línies asimptòtiques són $u \pm v = \text{const.}$ Observem que al problema 123 havíem dit que la corba

$$\begin{aligned}x(u) &= \sqrt{a^2 + u^2} \\ z(u) &= a \log(u + \sqrt{a^2 + u^2})\end{aligned}$$

també era una catenària. Veiem que aquesta té la mateixa imatge que $x = a \cosh(\frac{z}{a} - \log a)$. En efecte, de la segona equació tenim que $a^2 + u^2 = (e^{z/a} - u)^2$, és a dir, $u = \frac{-a^2 e^{-z/a} + e^{z/a}}{2}$ i per tant,

$$x = \sqrt{a^2 + u^2} = \frac{a(e^{z/a} a^{-1} + e^{-z/a} a)}{2} = a \cosh\left(\frac{z}{a} - \log a\right).$$

- (b) L'helicoides ja l'havíem estudiat al problema 94. Utilitzant la mateixa parametrització recordem que

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} & 0 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{(a^2+u^2)^{1/2}} \\ \frac{-a}{(a^2+u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, les curvatures principals verifiquen $k_1 = -k_2 = \frac{a}{a^2+u^2}$ i les curvatures de Gauss i mitja són

$$K(u, v) = \frac{-a^2}{(a^2+u^2)^2} \quad i \quad H(u, v) \equiv 0.$$

Observem que $II(A, B) = 0$ si i només si $AB = 0$, per tant, φ_u i φ_v determinen les direccions asimptòtiques i per tant, les línies asimptòtiques són les corbes coordenades. D'altra banda, les direccions principals vénen donades pels vectors de coordenades $(\pm\sqrt{a^2+u^2}, 1)$ en la base φ_u, φ_v . Així una corba $\varphi(u(t), v(t))$ és una línia de curvatura si i només si $(u', v') \parallel (\pm\sqrt{a^2+u^2}, 1)$, o equivalentment,

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+u^2}} du = dv,$$

la qual cosa implica que les línies de curvatura són

$$v = \text{const} \pm \int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} du = \text{const} \pm \log(u + \sqrt{a^2+u^2}).$$

- (c) Recordem que una parametrització de la tractriu era $t \mapsto (\sin t, \cos t + \log(\tan \frac{t}{2}))$, per tant, una parametrització de la pseudoesfera s'obté posant

$$\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log(\tan \frac{u}{2})).$$

Calculant obtenim que

$$I = \begin{pmatrix} \cot^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} -\cot u & 0 \\ 0 & \cos u \sin u \end{pmatrix}$$

i per tant

$$W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} -\tan u & 0 \\ 0 & \cot u \end{pmatrix}$$

de manera que $K \equiv -1$ i $H(u, v) = \cot u - \tan u$. Com que la matriu de W en la base φ_u, φ_v és diagonal tenim que les corbes coordenades són línies de curvatura. Finalment, les direccions asimptòtiques $A\varphi_u + B\varphi_v$ verifiquen $B = \pm A \sin u$ i per tant les línies asimptòtiques s'obtenen integrant l'equació diferencial corresponent

$$u' = v' \sin u$$

i per tant

$$v = \log \tan \frac{u}{2}.$$

5.10 Àrea

126. Demostreu que l'àrea A d'una regió acotada R de la superfície $z = f(x, y)$ és

$$A = \int_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

on Q és la projecció de R sobre el pla xy . Calculeu l'àrea de l'esfera de radi r .

Solució: Recordem que l'element d'àrea d'una superfície S és la 2-forma ω sobre aquesta superfície donada en cada punt P per

$$\omega(X, Y) = \det(X, Y, \nu), \quad X, Y \in T_P S.$$

Normalment denotarem $\omega = dS$ (però ω no és la diferencial de res!). ν és el vector normal a la superfície en P .

Aquesta definició equival a dir que dS és la 2-forma que val 1 sobre una base ortonormal (positiva). Això és evident ja que si (X, Y) és una base ortonormal de T_P , llavors (X, Y, ν) és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ i per tant

$$dS(X, Y) = \det(X, Y, \nu) = 1.$$

L'àrea d'una regió acotada $R \subset S$ es defineix per

$$A(R) = \int_R dS.$$

Si R està continguda en una parametrització $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de S i $Q \subset U$ és tal que $\varphi(Q) = R$, llavors per definició d'integral d'una 2-forma sobre una superfície tenim

$$A(R) = \int_R dS = \int_Q \varphi^* dS$$

Per calcular aquest pull-back posem

$$\varphi^* dS = \lambda du \wedge dv,$$

amb $\lambda = \lambda(u, v)$. Per tant,

$$\begin{aligned} \lambda &= \varphi^* dS\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = dS\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \nu\right) \\ &= \varphi_u \wedge \varphi_v \cdot \nu = |\varphi_u \wedge \varphi_v| = |\varphi_u| \cdot |\varphi_v| \cdot \sin \alpha = \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Així doncs

$$A(R) = \int_Q \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

Si S és la gràfica de $z = f(x, y)$, podem pensar $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ i tenim $E = 1 + f_x^2$, $G = 1 + f_y^2$, $F = f_x f_y$, de manera que

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

i hem acabat.

- 127.** Sigui P un punt d'una superfície S tal que $K(P) \neq 0$. Suposem que B_n és una successió d'entorns connexos de P en S amb $\text{Area}(B_n) \rightarrow 0$ i tals que qualsevol entorn de P conté tots els B_n a partir d'un n prou gran. Demostreu que es compleix

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Area}(\nu(B_n))}{\text{Area}(B_n)} = K(P),$$

on $\nu : S \rightarrow S^2$ és l'aplicació de Gauss.

Solució: La curvatura és el Jacobià de l'aplicació de Gauss. Això vol dir que

$$\nu^* dS = K dA$$

on dS és l'element d'àrea de l'esfera S^2 i dA és l'element d'àrea de la superfície S .

Com que farem un límit al voltant de P podem suposar que ν és difeomorfisme, cosa certa sobre entorns prou petits. Així, pel teorema del canvi de variable per a integrals tenim

$$A(\nu(B_n)) = \int_{\nu(B_n)} dS = \int_{B_n} \nu^* dS = \int_{B_n} K dA$$

i pel teorema del valor mitjà per a integrals

$$A(\nu(B_n)) = \int_{B_n} K dA = A(B_n)K(\xi)$$

on $\xi \in B_n$. Dividint les àrees i prenent límits hem acabat, ja que ξ tendeix a P .

- 128.** Calculeu, utilitzant el problema anterior, la curvatura de Gauss del tor

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

en el punt $\varphi(0, 0)$.

Solució: Com que

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\ \varphi_v(u, v) &= (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0) \end{aligned}$$

la mètrica és

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^2 \end{pmatrix}$$

L'àrea sobre el tor de la regió $\mathcal{R}$ donada per $-\epsilon < u < \epsilon$, $-\delta < v < \delta$ és

$$A(\mathcal{R}) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\delta}^{\delta} r(R + r \cos u) du dv = 4Rr\delta\epsilon + 4r^2\delta \sin \epsilon.$$

Calculem ara l'àrea de la regió $\nu(\mathcal{R})$, on $\nu: \text{Tor} \rightarrow S^2$ és l'aplicació de Gauss.

La normal al tor és

$$\nu(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

per tant, $\nu(\mathcal{R})$ és la regió sobre l'esfera S^2 determinada pels vectors $\nu(u, v)$ quan $-\epsilon < u < \epsilon$, $-\delta < v < \delta$.

Si pensem, com és habitual, S^2 parametritzada per la longitud θ i la colatitud φ de manera que els seus punts són $(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$, la mètrica és

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2,$$

i la relació entre (u, v) i (θ, φ) és $\cos \varphi = -\sin u$, i $\theta = v$, com es veu comparant l'expressió de $\nu(u, v)$ amb l'expressió dels punts de S^2 en coordenades (θ, φ) que acabem de donar.

Per tant, la regió $\nu(\mathcal{R})$ està caracteritzada per $-\epsilon + \pi/2 < \varphi < \epsilon + \pi/2$, $-\delta < \theta < \delta$.

I l'àrea de $\nu(\mathcal{R})$ és

$$A(\nu(\mathcal{R})) = \int_{-\epsilon+\pi/2}^{\epsilon+\pi/2} \int_{-\delta}^{\delta} \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\delta [-\cos \varphi]_{-\epsilon+\pi/2}^{\epsilon+\pi/2} = 4\delta \sin \epsilon.$$

Finalment

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(\nu(\mathcal{R}))}{A(\mathcal{R})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\delta \sin \epsilon}{4Rr\delta\epsilon + 4r^2\delta \sin \epsilon} = \frac{1}{r(R+r)}.$$

Aquest resultat és obvi sense fer cap càlcul ja que en el punt P les direccions principals venen donades per dues circumferències ortogonals de radis respectivament r i $R+r$.

129. Sigui H l'helicoida (problema 94) parametritzat per $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ i $z = v$, on $u, v \in \mathbb{R}$. Calculeu:

- L'àrea del 'triangle' determinat per $0 \leq u \leq \sinh v$ i $0 \leq v \leq v_0$.
- La longitud dels costats de la figura de l'apartat anterior.
- Els angles que formen aquests costats.

Solució: Definim $c_i(t) = (u_i(t), v_i(t))$ amb $t \in [0, 1]$ mitjançant

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0 & i & & v_1(t) &= v_0 t \\ u_2(t) &= (\sinh v_0) t & i & & v_2(t) &= v_0 \\ u_3(t) &= \sinh(v_0 t) & i & & v_3(t) &= v_0 t \end{aligned}$$

els costats del 'triangle' T_1 a l'espai de paràmetres $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2\}$. Llavors els costats del 'triangle' T sobre l'helicoida són les corbes $\gamma_i = \varphi(c_i)$, amb $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Calculem en primer lloc l'àrea de T utilitzant l'element d'àrea de H $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{1 + u^2} du dv$:

$$\begin{aligned} A(T) &= \int_{T_1} dA = \int_{v=0}^{v=v_0} dv \left(\int_{u=0}^{u=\sinh v} \sqrt{1 + u^2} du \right) = \frac{1}{2} \int_0^{v_0} (v + \cosh v \sinh v) dv \\ &= \frac{1}{4} (v_0^2 + \cosh^2(v_0) - 1). \end{aligned}$$

Ara les longituds dels costats γ_i . Per fer això, escrivim

$$\gamma'_i(t) = \frac{d\varphi(c_i(t))}{dt} = \frac{\partial\varphi(u_i(t), v_i(t))}{\partial u} u'_i(t) + \frac{\partial\varphi(u_i(t), v_i(t))}{\partial v} v'_i(t),$$

és a dir, $\gamma'_i = u'_i\varphi_u + v'_i\varphi_v$ té coordenades $(u'_i(t), v'_i(t))$ en la base φ_u, φ_v del pla tangent de H en el punt $\gamma_i(t)$. Així tenim que

$$\|\gamma'_i(t)\|^2 = \begin{pmatrix} u'_i(t) & v'_i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u_i(t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_i(t) \\ v'_i(t) \end{pmatrix}$$

i d'altra banda, la longitud de γ_i ve donada per

$$L_i = L(\gamma_i) = \int_0^1 \|\gamma'_i(t)\| dt,$$

el que ens dóna que

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 v_0 dt = v_0 \\ L_2 &= \int_0^1 \sinh v_0 dt = \sinh v_0 \\ L_3 &= \int_0^1 v_0 \sqrt{2 + 2 \sinh^2(v_0 t)} dt = \sqrt{2} \int_0^1 v_0 \cosh(v_0 t) dt = \sqrt{2} \sinh v_0 \end{aligned}$$

Finalment tenim que si denotem per α_i l'angle oposat al costat γ_i de T aleshores

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \frac{\langle \gamma'_2(1), \gamma'_3(1) \rangle}{\|\gamma'_2(1)\| \|\gamma'_3(1)\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \sinh v_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sinh^2 v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \cosh v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}{\sinh v_0 \sqrt{v_0^2 + v_0^2 \cosh^2 v_0 (1 + \sinh^2 v_0)}} \\ &= \frac{\cosh v_0}{\sqrt{1 + \cosh^4 v_0}} \\ \cos \alpha_2 &= \frac{\langle \gamma'_1(0), \gamma'_3(0) \rangle}{\|\gamma'_1(0)\| \|\gamma'_3(0)\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \cosh 0 \\ v_0 \end{pmatrix}}{v_0 \sqrt{2v_0^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\langle \gamma'_1(1), \gamma'_2(0) \rangle}{\|\gamma'_1(1)\| \|\gamma'_2(0)\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh v_0 \\ 0 \end{pmatrix}}{v_0 \sinh v_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\cosh v_0}{\sqrt{1+\cosh^4 v_0}}\right)$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ i $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.

5.11 Geodèsiques

- 130.** Demostreu que la curvatura geodèsica d'una corba $\gamma(s)$ sobre una superfície S , en un punt $P = \gamma(s_0)$, coincideix amb la curvatura de la corba que s'obté en projectar $\gamma(s)$ ortogonalment sobre el pla tangent a S en P .

Solució: Sigui ν el vector normal a la superfície en P . La corba projectada és

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\nu$$

amb $\lambda(s)$ determinada per la condició $\bar{\gamma}'(s) \cdot \nu = 0$. Derivant obtenim $\lambda'(s) = -\gamma'(s) \cdot \nu$. Integrant, $\lambda(s) = -\gamma(s) \cdot \nu + c$. Elegim c de manera que $\lambda(s_0) = 0$, és a dir, $c = \gamma(s_0) \cdot \nu$. Suposarem que s és el paràmetre arc.

Tenim doncs

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + (-\gamma(s) \cdot \nu + c)\nu.$$

Una primera observació és que en P , $\gamma(s)$ i $\bar{\gamma}(s)$ tenen la mateixa tangent:

$$\gamma'(s_0) = \bar{\gamma}'(s_0).$$

Derivant dos cops

$$\bar{\gamma}''(s) = \gamma''(s) + (-\gamma(s)'' \cdot \nu)\nu.$$

En P ($s = s_0$) tenim

$$\bar{\gamma}' \wedge \bar{\gamma}'' = \gamma' \wedge (\gamma'' - (\gamma'' \cdot \nu)\nu) = kB - (k \cos \alpha)\gamma' \wedge \nu,$$

on B és el binormal a la corba en P i α és l'angle entre la normal principal a la corba en P i ν . Observem que α és també angle entre B i $\gamma' \wedge \nu$.

La curvatura $\bar{k}$ de $\bar{\gamma}(s)$ en $s = s_0$ és

$$\bar{k} = |\bar{\gamma}' \wedge \bar{\gamma}''| = \sqrt{k^2 + k^2 \cos^2 \alpha - 2k^2 \cos \alpha \cos \alpha} = k \sin \alpha = k_g,$$

on k_g és la curvatura geodèsica de $\gamma(s)$ en P .

- 131.** Sigui $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ una corba a $\mathbb{R}^2$ i $k_\alpha(t)$ la seva curvatura. Sigui $\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$ la parametrització d'una superfície S a $\mathbb{R}^3$. Proveu que la curvatura geodèsica de la corba $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$ dins de S coincideix amb $k_\alpha(t)$.

Solució: La superfície S és un cilindre i com ja havíem vist al problema anterior φ és una isometria local del pla sobre S . Així la curvatura geodèsica de $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ en el punt $\alpha(t)$ és igual a la curvatura geodèsica de $\beta = \varphi \circ \alpha$ en el punt $\beta(t)$. Finalment, observem que la curvatura

geodèsica d'una corba plana considerada dins del pla com a superfície de $\mathbb{R}^3$ és igual a la curvatura k_α de α com a corba plana.

- 132.** Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície. Demostreu que el centre de curvatura, el centre de curvatura normal i el centre de curvatura geodèsic estan alineats.

Demostreu que $\gamma(s)$ (s paràmetre arc) és geodèsica⁶ si el centre de curvatura i el centre de curvatura normal coincideixen. I que l'equació de les geodèsiques ve donada per

$$\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \nu(\gamma(s))) = 0.$$

on $\nu(\gamma(s))$ és la restricció a la corba del vector normal a la superfície.

Solució: Sigui P un punt de la corba. Denotem per k la curvatura de $\gamma(s)$ (com corba de $\mathbb{R}^3$) en P i per $\rho = 1/k$ el radi de curvatura. Així doncs, el centre de curvatura és el punt $A = P + \rho N$, on N és el vector normal principal a la corba en P .

La relació entre la curvatura k i la curvatura normal k_n de la corba en P està donada pel teorema de Mesunier, $k_n = k \cos \alpha$, on α és l'angle entre les normals N i ν en P . Així doncs, el centre de curvatura normal és el punt $B = P + \rho_n \nu$. Observem que $\rho = \rho_n \cos \alpha$, on $\rho_n = 1/k_n$ és el radi de curvatura normal.

Finalment el centre de curvatura geodèsic és el centre de curvatura de la corba projectada ortogonalment sobre el pla tangent a la superfície en P .

La observació fonamental és que tant la corba donada $\gamma(s)$ com la corba projectada $\bar{\gamma}(s)$ estan sobre el cilindre

$$\varphi(r, s) = \gamma(s) + r\nu, \quad \text{on } \nu = \nu(P).$$

A més $\bar{\gamma}(s)$ és la secció normal d'aquest cilindre en ser tallat pel pla tangent a la superfície en P . Fixem-nos que el vector $\vec{e} = T \wedge \nu$, on T és el vector tangent a la corba en P , és el vector normal al cilindre en P . També és la normal principal a $\bar{\gamma}(s)$ en P .

En particular

$$N = \sin \alpha \vec{e} + \cos \alpha \nu.$$

Apliquem ara el teorema de Meusnier a la corba $\gamma(s)$, com a corba sobre el cilindre. La seva curvatura normal és llavors la curvatura de la secció normal sobre el cilindre, la qual és justament la corba $\bar{\gamma}(s)$. Per tant, la curvatura normal de $\gamma(s)$ com corba sobre el cilindre coincideix amb la seva curvatura geodèsica com corba sobre la superfície (en P).

Denotant per k_g la curvatura de $\bar{\gamma}(s)$ en P , tenim que

$$k_g = k \cos \beta$$

on β és l'angle entre la normal principal a la corba, N , i la normal al cilindre, $\vec{e}$. És a dir, β és el complementari de α , de manera que tenim

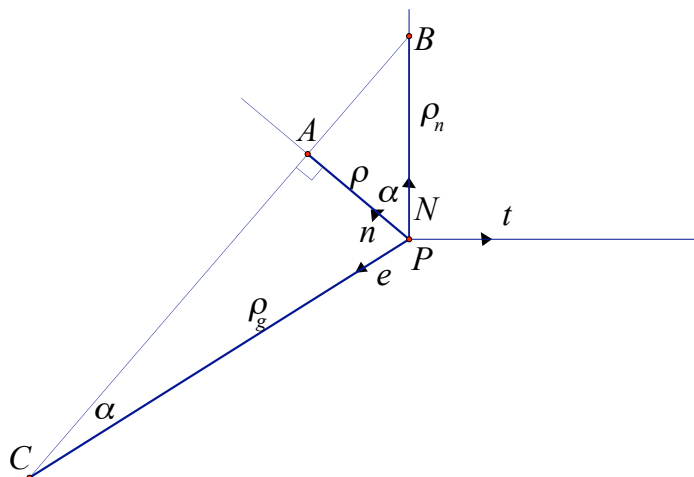
$$k_g = k \sin \alpha.$$

⁶Definim geodèsica com la corba sobre la superfície tal que la seva normal principal coincideix amb la normal a la superfície. Es pot demostrar que llavors és minimal de longitud, però de moment no ens en preocupem.

El centre de curvatura geodèsica és el punt $C = P + \rho_g \vec{e}$, on $\rho_g = 1/k_g$.

En particular $\rho = \rho_g \sin \alpha$. Com que teníem $\rho = \rho_n \cos \alpha$, dividint aquestes dues igualtats tenim

$$\cot \alpha \cdot \frac{\rho_n}{\rho_g} = 1.$$



La figura adjunta demostra que A, B, C estan alineats, ja que si dibuixem primer B , a continuació A , i tallem la recta AB amb l'eix generat per $\vec{e}$ obtenim un punt a distància ρ_g de P , que ha de ser doncs el punt C .

Finalment, en el cas de geodèsiques, veiem que si $N = \nu$, llavors $\alpha = 0$, i $k_n = k \cos \alpha = k$, i per tant el centre de curvatura i el centre de curvatura normal coincideixen.

Com que $\nu(\gamma(s))$ pertany al pla generat per $\gamma'(s)$ i $\gamma''(s)$, els tres vectors que apareixen dins el determinant són linealment dependents, i per tant el determinant és zero. I recíprocament.

133. Determineu les geodèsiques de les següents superfícies:

- a) un pla,
- b) un cilindre,
- c) una esfera.

Solució: Recordem que una corba $\alpha(t) \subset S$ és una geodèsica de una superfície S si i només si la seva acceleració no té component tangencial, és a dir si i només si $\alpha''(t)$ és paral·lel al vector normal ν de S . Això és equivalent a que la imatge de α sigui la traça de una geodèsica parametritzada i a la vegada la seva velocitat $\|\alpha'\|$ sigui constant. D'altra banda, una corba $C \subset S$ és la traça d'una geodèsica si i només si el vector normal principal N de C és igual a $\pm \nu$, la qual cosa és equivalent a la seva vegada a que per a qualsevol parametrització regular α de C , α'' sigui combinació lineal de α' i ν . Una última observació és que com que les geodèsiques parametritzades són solucions d'un sistema d'equacions diferencials de segon ordre tenim que per cada punt p i cada vector tangent $v \in T_p S$ existeix una única geodèsica parametritzada $\alpha(t)$ amb

$\alpha(0) = p$ i $\alpha'(t) = v$. De manera que per a cada punt $p \in S$ i cada direcció de $T_p S$ existeix una única traça de geodèsica que passa per aquest punt i és tangent a aquesta direcció. Anem, amb aquestes observacions, a determinar les geodèsiques, o més precisament les corbes que són traces de geodèsiques de les següents superfícies.

- (a) Les traces de les geodèsiques del pla són les rectes. De fet, tota recta continguda en una superfície i recorreguda a velocitat constant és una geodèsica.
- (b) Dins el cilindre (una superfície de revolució) tenim que els meridians (que a més són rectes) són traces de geodèsiques. Els paral·les també verifiquen que $N \parallel \nu$ i també són geodèsiques. Finalment, tota hèlix sobre el cilindre verifica que el seu vector normal N està contingut a un pla perpendicular al seu eix. D'altra banda N és perpendicular al vector tangent T , per tant, $N \parallel \nu$ i també són geodèsiques. Per la unicitat més amunt esmentada, aquestes són totes. Alternativament podem fer els càlculs. Una altra forma d'argumentar és fer servir que les isometries duen geodèsiques sobre geodèsiques; com les geodèsiques al pla són rectes i tenim una isometria entre el pla i el cilindre podem estudiar quina és la imatge de les rectes per aquesta aplicació.
- (c) Sobre la esfera, els cercles màxims són geodèsiques ja que el seu vector normal N és paral·lel al vector radial en aquest punt que és proporcional a la seva vegada al vector normal ν de l'esfera. Com per cada punt i cada direcció en tenim un de cercle màxim aquestes són totes.

134. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular i $C \subset S$ una corba regular continguda a S . Demostreu les següents afirmacions.

- a) C és geodèsica de S i línia asimptòtica de S si i només si C està continguda en una recta de $\mathbb{R}^3$.
- b) Suposem que C és geodèsica de S . Aleshores C és línia de curvatura de S si i només si C és plana.

Solució:

- (a) ($\Rightarrow$) Per ser C una geodèsica tenim que la curvatura geodèsica de C és nul·la. D'altra banda, per ser línia asimptòtica la curvatura normal de C és també nul·la. Per tant la curvatura de α com a corba de $\mathbb{R}^3$ és zero. I ja sabem que una corba regular amb curvatura zero està continguda en una recta de $\mathbb{R}^3$.
 ($\Leftarrow$) Recíprocament, si C està continguda a una recta de $\mathbb{R}^3$ la seva curvatura com a corba de $\mathbb{R}^3$ és nul·la. De la igualtat $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$ en deduïm que $k_n = k_g = 0$ i això ens diu respectivament que C és una línia asimptòtica i una geodèsica.
- (b) Les línies de curvatura són els vectors propis de l'aplicació de Weiergarten, és a dir, si donada una parametrització $\alpha(t)$ es compleix que $-d\nu(\alpha'(t))$ és múltiple de $\alpha'(t)$. Sigui $\alpha(t)$ una

parametrització per l'arc de C . Per ser $\alpha(t)$ una geodèsica sabem que $\alpha''(t) = \lambda \cdot \nu(\alpha(t))$. Si $\lambda = 0$ la corba és una recta i en particular és plana. Si $\lambda \neq 0$, tenim $N = \nu$ sobre $\alpha(t)$ i

$$\langle -d\nu(\alpha'(t)), B(t) \rangle = \langle -\frac{d}{dt}_{t=0} \nu(\alpha(t)), B(t) \rangle = \langle \nu(\alpha(t)), \tau N(t) \rangle = \tau.$$

Com $d\nu(\alpha'(t))$ és un vector tangent a S tenim $d\nu(\alpha'(t)) \parallel \alpha'(t)$ si i només si $\langle d\nu(\alpha'(t)), B_\alpha \rangle = 0$, és a dir, si i només si $\tau = 0$. Ara bé, sabem que una corba amb curvatura mai nul·la és plana si i només si $\tau = 0$.

Capítol 6

Exercicis complementaris de Superfícies

6.1 Pla tangent

- 135.** Comproveu que els plans tangents a la superfície definida per $z = xf(y/x)$, on f és una funció diferenciable i $x \neq 0$, passen tots per l'origen.

Solució: La superfície donada és

$$\varphi(x, y) = (x, y, xf(\frac{y}{x})).$$

Per tant

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= (1, 0, f(\frac{y}{x}) + xf'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})) = (1, 0, f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})) \\ \varphi_y(x, y) &= (0, 1, xf'(\frac{y}{x})(\frac{1}{x})) = (0, 1, f'(\frac{y}{x})).\end{aligned}$$

Hem de veure que existeixen $\lambda = \lambda(x, y)$ i $\mu = \mu(x, y)$ tals que

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) + \mu\varphi_y(x, y) = (0, 0, 0).$$

Substituint i igualant les components obtenim $\lambda(x, y) = -x$ i $\mu(x, y) = -y$.

- 136.** Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que si Π és un pla que té un únic punt P en comú amb S llavors Π és el pla tangent de S en el punt P .

Solució: Composant si cal amb un moviment rígid podem suposar que el pla donat és el pla $z = 0$ i que tots els punts de la superfície tenen la tercera component negativa. Equival a dir, que si la superfície és $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, llavors la funció $z = z(u, v)$ té un màxim local en $P = \varphi(u_0, v_0)$, i per tant $z_u(u_0, v_0) = z_v(u_0, v_0) = 0$.

En aquest punt, tenim doncs

$$\varphi_u = (*, *, 0), \quad \varphi_v = (*, *, 0)$$

de manera que el pla tangent a la superfície en P (el pla per P amb espai director generat per aquests dos vectors) és el pla $z = 0$, com volíem demostrar.

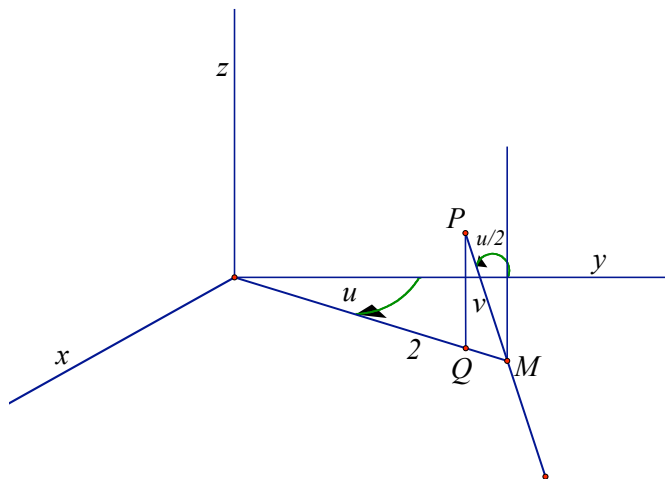
6.2 Orientabilitat

- 137.** Es considera la circumferència del pla xy donada per $x^2 + y^2 = 4$ i el segment obert AB del pla yz determinat per $y = 2$, $|z| < 1$. Fem moure el punt mig M de AB sobre la circumferència al temps que el segment gira en torn de M de manera que, quan M ha recorregut un angle u sobre la circumferència, el segment ha girat $u/2$. La superfície obtinguda és una banda de Möbius. Comproveu que les aplicacions definides per

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right) \\ \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(\left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right) \cos \bar{u}, - \left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right) \sin \bar{u}, \bar{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right),\end{aligned}$$

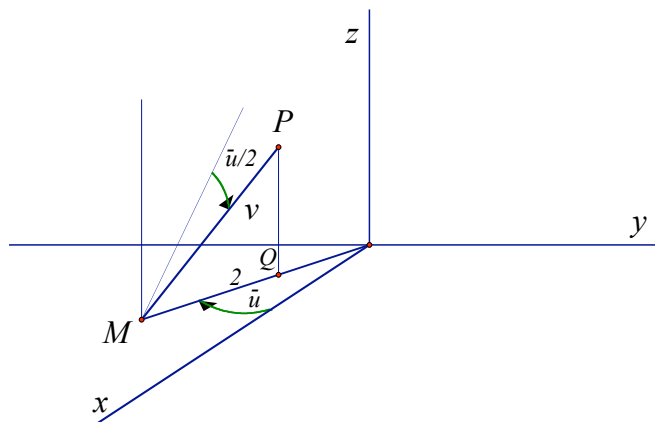
on $0 < u, \bar{u} < 2\pi$ i $-1 < v, \bar{v} < 1$, defineixen parametritzacions d'aquesta banda de Möbius. Utilitzeu aquestes parametritzacions per comprovar que la banda de Möbius és una superfície no orientable.

Solució: La primera parametrització és òbvia si es mira el dibuix següent.



P és un punt del segment que gira, situat a distància v de M . Clarament $QM = v \sin \frac{u}{2}$ (Q és la projecció de P sobre el pla $z = 0$). Observem que $\mathbf{x}(0, 0) = (0, 2, 0)$.

La segona parametrització és molt similar a la primera però començant ara en el punt $\bar{\mathbf{x}}(0, 0) = (2, 0, 0)$. En aquest punt la posició del segment forma un angle de $\pi/4$ amb la vertical, ja que en aquest punt $u = \pi/2$.



Observem que amb la primera carta no agafem els punts amb $y = 2$, i amb la segona no agafem els punts amb $x = 2$. La intersecció de les dues cartes té dues components connexes, la primera M_1 determinada per aquells punts de la banda de Möbius amb $0 < u < \pi/2$, i la segona M_2 determinada pels punts amb $\pi/2 < u < 2\pi$.

A M_1 la relació entre u i $\bar{u}$ és $\bar{u} = u + \frac{3\pi}{2}$, i a M_2 la relació és $\bar{u} = u - \pi/2$, com es veu fàcilment mirant els anteriors dibuixos.

Igualant les terceres components de $\mathbf{x}(u, v)$ i $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ veiem fàcilment que a M_1 tenim $\bar{v} = -v$. De manera que el jacobià del canvi de variables és

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1.$$

I a M_2 obtenim $\bar{v} = v$, de manera que el jacobià del canvi de variables és

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1.$$

Per tant, segons estiguem a M_1 o M_2 tenim

$$x_u \wedge x_v = \pm \bar{x}_u \wedge \bar{x}_v.$$

Finalment, si tinguéssim un camp normal global continuu N tindríem

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= \lambda N, \\ \bar{x}_u \wedge \bar{x}_v &= \mu N, \end{aligned}$$

on λ i μ són funcions que no canvien de signe. Si les dues tenen el mateix signe tenim contradicció amb la igualtat anterior a M_1 i si tenen signe diferent tenim contradicció amb la igualtat anterior a M_2 .

- 138.** Siguin S_1 i S_2 dues superfícies. Suposem que S_2 és orientable i que hi ha un difeomorfisme local $f : S_1 \rightarrow S_2$. Demostreu que S_1 és orientable.

Solució: Recordem que f no és, en general, difeomorfisme. No cal ni que sigui exhaustiva.

Sigui (U, φ) una carta de S_1 .

La primera observació és que si per a un punt P de U es compleix que la base $((T_P f)\varphi_u, (T_P f)\varphi_v)$ és una base positiva de $T_{f(P)}S_2$ llavors $(T_Q f\varphi_u, T_Q f\varphi_v)$ és una base positiva de $T_{f(Q)}S_2$ per a tot $Q \in U$. Això és clar, ja que dir que la base és positiva vol dir que existeix $\lambda > 0$ tal que

$$(T_P f)\varphi_u \wedge (T_P f)\varphi_v = \lambda N,$$

on N és el normal que orienta S_2 . Si en algun punt de U aquesta base fos negativa, hi hauria d'haver, per continuïtat, un punt Q on

$$(T_P f)\varphi_u \wedge (T_P f)\varphi_v = 0,$$

la qual cosa és impossible, per ser $T_Q f$ isomorfisme (i φ_u i φ_v linealment independents).

Feta aquesta observació considerem una carta (U, φ) de S_1 . Si és positiva en el sentit anterior no la toquem. Si és negativa la canviem per $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ amb $\bar{U} = s(U)$ i $\bar{\varphi} = \varphi \circ s$, on $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és la simetria $s(x, y) = s(y, x)$. Observem $s^2 = s$. Es compleix que $\bar{\varphi}_u = \varphi_v$ i $\bar{\varphi}_v = \varphi_u$ de manera que $\varphi_u \wedge \varphi_v = -\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v$ i, $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ és positiva.

Obtenim així un recobriment de S_1 per cartes orientables en aquest sentit que hem definit, i és fàcil veure que el canvi entre aquestes cartes és positiu. Només cal recordar que si (e_1, e_2) i (u_1, u_2) són dues bases de l'espai vectorial $T_P S_1$, llavors

$$u_1 \wedge u_2 = \det A(e_1 \wedge e_2)$$

on A és la matriu del canvi de base. Pensem que la primera base correspon a la base associada a una carta local i la segona a una altra carta local (i que P pertany a la intersecció d'aquestes dues cartes), ambdues orientables en el sentit que hem introduït. Aplicant $T_P f$ a l'anterior igualtat veiem que $\det A$ ha de ser positiu i hem acabat.

6.3 Primera forma fonamental

- 139. Loxodromes.** Demostreu que les loxodromes de l'esfera (corbes que tallen amb angle constant els meridians) estan donades per

$$\log\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = (\phi + c) \cot(\beta)$$

on θ és la colatitud, ϕ la longitud i β és l'angle constant.

Solució: Do Carmo, Exemple 4, Secció 2.5

- 140.** Trobeu la primera forma fonamental de les superfícies següents:

a) $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$

b) $\varphi(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$

c) $\varphi(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$

Solució: a) Com que

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (\cos v, \sin v, 2u) \\ \varphi_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0)\end{aligned}$$

tenim

$$I = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

141. Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc tal que $|\alpha(t)| = 1 \ \forall t \in I$. Considereu la superfície parametritzada per $\varphi(u, v) = u\alpha(v)$, $u > 0, v \in I$.

a) Calculeu-ne la primera forma fonamental.

b) Demostreu que és localment isomètrica al pla

Solució:

(a) Tenim $\varphi_u = \alpha(v)$ i $\varphi_v = u \cdot \alpha'(v)$. Observem que derivant $|\alpha(t)| = 1$ obtenim $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$. Aleshores:

$$\begin{aligned}E &= |\alpha(v)|^2 = 1 \\ F &= u \cdot \langle \alpha(v), \alpha'(v) \rangle = 0 \\ G &= u^2\end{aligned}$$

i per tant

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

(b) Per veure que la superfície anterior és localment isomètrica al pla només cal observar que la primera forma fonamental de la superfície coincideix amb la del pla en coordenades polars. Recordem que tenim un resultat de teoria que diu que si U és un obert de $\mathbb{R}^2$ i $\varphi_i: U \rightarrow S_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ són dos superfícies parametritzades sobre U tals que les seves primeres formes fonamentals $I_i: U \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ són iguals, aleshores $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: S_1 \rightarrow S_2$ és una isometria local.

142. Helicoide. Trobeu la primera forma fonamental de l'helicoide.

Solució: Recordem que la parametrització de l'helicoide és (vegeu el problema 94)

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av),$$

i els vectors tangents

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 0), \\ \varphi_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, a),\end{aligned}$$

de manera que la primera forma fonamental de H ve donada per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix}.$$

- 143.** Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log(\cos v) + u)$ on $v \in (-\pi/2, \pi/2)$. Comproveu que les corbes $\varphi(u_1, v)$, $\varphi(u_2, v)$ (usualment denotades simplement com $u = u_1$ i $u = u_2$) determinen segments d'igual longitud en totes les línies coordenades $\varphi(u, a)$, amb $a \in \mathbb{R}$ constant, (usualment denotades $v = c$). Les línies coordenades, són ortogonals?

Solució: Només hem de trobar la longitud de la corba $\gamma(u) = \varphi(u, a)$, amb a constant, entre els punts de coordenades $u = u_1$ i $u = u_2$.

$$L = \int_{u_1}^{u_2} |\gamma'(u)| du = \int_{u_1}^{u_2} |\varphi_u| du = \sqrt{2}(u_2 - u_1),$$

valor que no depèn de a .

- 144.** Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització d'una superfície S . Suposem que els coeficients de la primera forma fonamental de S en aquesta parametrització són $E = 1$, $F = 0$ i $G = G(u, v)$. Comproveu que les línies coordenades $u = \text{constant}$ i $v = \text{constant}$ són ortogonals i que les primeres determinen segments d'igual longitud en les segones.

Solució: Dir que F és zero és dir que les línies coordenades són ortogonals. Considerem un segment de les segones (i.e. $v = a$, amb a constant) tallat per les corbes d'equació $u = u_1$ i $u = u_2$. Es tracta de la corba $\gamma(u) = \varphi(u, a)$ i per tant la seva longitud és

$$L = \int_{u_1}^{u_2} |\gamma'(u)| du = \int_{u_1}^{u_2} |\varphi_u| du = \int_{u_1}^{u_2} E du = u_2 - u_1$$

valor que no depèn de a .

- 145.** Comproveu que el con i el cilindre són localment isomètrics al pla.

Solució: Utilitzarem un resultat de teoria que ens diu que si U és un obert de $\mathbb{R}^2$ i $\varphi_i : U \rightarrow S_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ són dos superfícies parametritzades sobre U tals que les seves primeres formes fonamentals $I_i : U \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ són iguals, aleshores $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$ és una isometria local. Intuïtivament el que cal fer és trobar aplicacions que "despleguin" el con i el cilindre sobre el pla. Pel con podem prendre com a obert U el conjunt de $\mathbb{R}^2$ que en coordenades polars

s'escriu com $\{(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi \sin \alpha)\}$ amb $\cot \alpha = k$ de manera que l'equació del con és $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0$; i com a parametrització prenem

$$\varphi_\alpha(\rho, \theta) = \left(\rho \sin \alpha \cos \left(\frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \sin \alpha \sin \left(\frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \cos \alpha \right).$$

La seva primera forma fonamental compleix que $E = 1$, $F = 0$ i $G = \rho^2$ que és precisament la primera forma fonamental del pla en coordenades polars. I pel cilindre podem prendre la següent parametrització $\psi_r(u, v) = (r \cos(\frac{v}{r}), r \sin(\frac{v}{r}), u)$ sobre l'obert $U_r = \mathbb{R} \times (0, 2\pi r)$ de $\mathbb{R}^2$. La matriu de la primera forma fonamental en aquest cas és la identitat, la mateixa que la del pla en les coordenades cartesianes (u, v) .

6.4 Segona forma fonamental

146. Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba plana. Definim el cilindre sobre C com la superfície:

$$S_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in C\}$$

- a) Demostreu que S_C és localment isomètrica al pla.
- b) Calculeu les curvatures principals de S_C (en funció de la curvatura de C).

Solució:

- (a) Sigui $\alpha(t)$ una parametrització de C per l'arc. Parametritzem S_C com $\varphi(t, u) = (\alpha(t), u)$. Definim l'aplicació de $\mathbb{R}^2$ en S_C donada per $(t, u) \mapsto (\alpha(t), u)$. És un difeomorfisme (bijectiu i diferenciable) i dóna una isometria ja que $I_{S_C} = I_{\mathbb{R}^2} = Id$.

(b)

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= (\alpha''(t), 0) = (k_C N, 0) \\ \varphi_{tu} &= 0 \\ \varphi_{uu} &= 0 \\ \nu &= (-N, 0) \end{aligned}$$

i $e = -k_C$, $f = g = 0$. Per tant $K = 0$ (resultat gens sorprenent perquè S_C és isomètrica al pla per l'apartat (a)).

147. Proveu que la curvatura mitjana d'una superfície S és la mitjana de les curvatures normals en aquest punt, és a dir

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}_p^1} k_n(v) dv, \quad \text{on } \mathbb{S}_p^1 = \{v \in T_p S \mid |v| = 1\}.$$

(Indicació: parametritzeu v mitjançant l'angle que forma amb una direcció principal).

Solució: Siguin e_1 i e_2 vectors unitaris en les direccions principals. Podem parametritzar $v \in \mathbb{S}_p^1$ com $v = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2$ on $\theta \in [0, 2\pi]$. Aleshores la fórmula d'Euler ens diu que

$$k_n(v) = II(v, v) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)$$

Per tant

$$\int_{\mathbb{S}_p^1} k_n(v) dv = \int_0^{2\pi} (k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)) d\theta = \pi(k_1 + k_2)$$

i hem acabat.

148. Calculeu la segona forma fonamental de la superfície definida per l'equació $xyz = a^3$ on $a \neq 0$.

Solució: Com $a \neq 0$ tampoc x, y, z poden ser zero. Parametritzem, per exemple, així: $\varphi(x, y) = (x, y, \frac{a^3}{xy})$. Equivalentment, considerem la gràfica de la funció $z = \frac{a^3}{xy}$. El vector normal el podem trobar molt fàcilment com el gradient de $F(x, y, z) = xyz - a^3$. Obtenim

$$\nu(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} (yz, xz, xy).$$

També, en el punt de coordenades (x, y) ,

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= (0, 0, z_{xx}) \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, z_{xy}) \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, z_{yy})\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}e &= \varphi_{xx} \cdot \nu = z_{xx} \frac{xy}{\sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} = \frac{2a^3 xy}{yx^3 \sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} \\ f &= \varphi_{xy} \cdot \nu = z_{xy} \frac{xy}{\sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} = \frac{a^3 xy}{x^2 y^2 \sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} \\ g &= \varphi_{yy} \cdot \nu = z_{yy} \frac{xy}{\sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}} = \frac{2a^3 xy}{xy^3 \sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}}\end{aligned}$$

149. Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Supposeu que S es connexa. Demostreu que són equivalents:

- a) La segona forma fonamental de S és constant igual a zero.
- b) L'aplicació de Gauss de S és constant.
- c) S està continguda en un pla.

Solució: Veiem $a \implies b$: com $d\nu$ és autoadjunta té vectors propis, $II(v) = \langle -d\nu(v), v \rangle$ és igual a zero si i només si els valors propis són zero, i.e. $d\nu \equiv 0$ i ν (aplicació de Gauss) és constant.

Veiem $b \implies a$: si ν és constants tenim $d\nu = 0$ i trivialment $II = 0$. D'altra banda $c \implies b$ és zero i ens falta $b \implies c$. Sigui $p \in S$ i $\alpha(t) \subset S$ tal que $\alpha(0) = p$. Veiem que $\alpha(t) \subset p + \langle \nu_p \rangle^\perp$ per a tota corba (fixat p) i ja estarem.

$$((\alpha(t) - p) \cdot \nu)' = \alpha'(t) \cdot \nu = 0$$

perquè ν és constant i és perpendicular a qualsevol tangent a la superfície S , en particular $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$.

- 150. Sella de mico.** Determineu la segona forma fonamental de la superfície determinada per l'equació $z = x^3 - 3xy^2$. Expressen la seva curvatura de Gauss K en termes de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i decidiu si es tracta d'una superfície minimal. Trobeu l'equació diferencial de les línies asimptòtiques. Trobeu les línies asimptòtiques per $(0, 0, 0)$.

Solució: Amb la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, x^3 - 3xy^2)$ podem calcular

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= (1, 0, 3x^2 - 3y^2) \\ \varphi_y(x, y) &= (0, 1, -6xy) \\ \varphi_{xx}(x, y) &= (0, 0, 6x) \\ \varphi_{xy}(x, y) &= (0, 0, -6y) \\ \varphi_{yy}(x, y) &= (0, 0, -6x) \\ \varphi_x \times \varphi_y &= (3(y^2 - x^2), 6xy, 1) \\ \|\varphi_x \times \varphi_y\|^2 &= 1 + 36x^2y^2 + 9(y^2 - x^2)^2 = 1 + 9(x^2 + y^2)^2 = 1 + 9r^4\end{aligned}$$

I aleshores

$$I = \begin{pmatrix} 1 + 9(x^2 - y^2)^2 & -18xy(x^2 - y^2) \\ -18xy(x^2 - y^2) & 1 + 36x^2y^2 \end{pmatrix} \quad II = \frac{6}{\sqrt{1 + 9r^4}} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

En polars,

$$I = \begin{pmatrix} 1 + 9r^4 \cos^2 2\alpha & -9r^4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ -9r^4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha & 1 + 9r^4 \sin^2 2\alpha \end{pmatrix} \quad II = \frac{6r}{\sqrt{1 + 9r^4}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Per tant, l'aplicació de Weingarten té per matriu

$$W = I^{-1}II = \frac{6r}{(1 + 9r^4)^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha(1 + 18r^4 \sin^2 \alpha) & -\sin \alpha(1 + 18r^4 \cos^2 \alpha) \\ -\sin \alpha(1 - 9r^4 \cos 2\alpha) & -\cos \alpha(1 + 9r^4 \cos 2\alpha) \end{pmatrix}$$

La curvatura de Gauss és igual a

$$K(x, y) = \det W = \frac{36r^2}{(1 + 9r^4)^3} \cdot (-(1 + 9r^4)) = \frac{-36r^2}{(1 + 9r^4)^2}$$

expressió que només depèn de r^2 .

Observem que S no és una superfície minimal ja que la traça de W no és zero.

Per trobar les direccions asimptòtiques hem de trobar els vectors $v = a\varphi_x + b\varphi_y$, (que podem suposar unitaris, és a dir $I(v, v) = 1$), tals que $II(v, v) = 0$, és a dir, tals que

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

és a dir,

$$(a^2 - b^2)x = 2aby.$$

Així, per a cada punt de coordenades (x, y) fixat, tenim dues equacions amb dues incògnites, a i b , que podem trobar

$$\begin{aligned} Ea^2 + 2Fab + Gb^2 &= 1 \\ (a^2 - b^2)x &= 2aby \end{aligned}$$

Per exemple, si $x = 0$, (recta $(0, y, 0)$ continguda a la sella de Mico) tenim

$$\begin{aligned} (1 + 9y^4)a^2 + b^2 &= 1 \\ 0 &= 2aby \end{aligned}$$

que implica, quan $y \neq 0$, $a = 0, b = 1$ (φ_y direcció asimptòtica) o bé $b = 0, a = \frac{1}{1+9y^4}$ (φ_x direcció asimptòtica).

En un punt arbitrari és difícil aïllar a i b d'aquesta equació.

En el $(0, 0)$ tota direcció és asimptòtica. Però només hi passen dues línies asimptòtiques, les línies coordenades. L'equació diferencial de les línies asimptòtiques és

$$(x'(t)^{-1}y'(t)^2)x(t) = 2x'(t)y'(t)y(t).$$

Posant $dy/dt = dy/dx \cdot dx/dt$ l'anterior equació s'escriu

$$(1 - \dot{y}^2)x = 2\dot{y}y, \quad \dot{y} = dy/dx$$

i aquesta equació diferencial admet la solució $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$. És a dir, les línies asimptòtiques per l'origen són

$$\varphi(x, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x) = (x, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x, 0).$$

- 151.** Sigui $C \subset S$ una corba regular de la superfície S que té curvatura de Gauss K positiva. Demostreu que la curvatura k de C en tot punt $P \in C \subset S$ satisfà: $k \geq \min(|k_1|, |k_2|)$, on k_1, k_2 són les curvatures principals de S en P .

Solució: Sabem que la relació entre la curvatura k de C i la curvatura de la corresponent secció normal és

$$k_n = k \cos \alpha$$

on α és l'angle entre la normal a la corba i la normal a la superfície.

Per altra banda l'equació d'Euler ens diu que

$$k_n = k_1 \cos \theta^2 + k_2 \sin \theta^2$$

on θ és l'angle entre el vector tangent a la corba en P i la primera direcció principal.

La hipòtesis sobre la curvatura de Gauss ens diu que k_1 i k_2 tenen el mateix signe.

Si k_1 i k_2 són positius,

$$k \geq k \cos \alpha = k_1 \cos \theta^2 + k_2 \sin \theta^2 \geq \min(k_1, k_2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \min(k_1, k_2).$$

Si k_1 i k_2 són negatius,

$$k_1 \cos \theta^2 + k_2 \sin \theta^2 = k \cos \alpha \geq -k$$

que, canviant de signe ens dóna,

$$-k_1 \cos \theta^2 - k_2 \sin \theta^2 = -k \cos \alpha \leq k$$

i per tant

$$\min(|k_1|, |k_2|) = \min(-k_1, -k_2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq -k_1 \cos \theta^2 - k_2 \sin \theta^2 = -k \cos \alpha \leq k.$$

6.5 Funcions de Morse

- 152.** Sigui¹ $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable sobre la superfície S i $P \in S$ un punt crític de h . Donat $w \in T_P S$ sigui $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una corba tal que $\alpha(0) = P$ i $\alpha'(0) = w$ i definim

$$H_P h(w) = \left. \frac{d^2(h \circ \alpha)}{dt^2} \right|_{t=0}$$

- a) Demostreu que, donada una parametrització $\varphi : U \rightarrow S$ de S en un entorn de P , es compleix

$$H_P h(a\varphi_u + b\varphi_v) = h_{uu}(P)a^2 + 2h_{uv}(P)ab + h_{vv}(P)b^2 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{uu}(P) & h_{uv}(P) \\ h_{vu}(P) & h_{vv}(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

($H_P h : T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ és la forma quadràtica associada a la matriu Hessiana de h en P).

- b) Definim $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ per $h(X) = \langle X - P, \nu \rangle$, on ν denota la normal a la superfície en el punt P (és a dir, $h(X)$ és l'altura de X respecte a $T_P S$). Comproveu que P és un punt crític de h i que si $w \in T_P S$, $|w| = 1$, llavors $H_P h(w)$ és la curvatura normal a P en la direcció w . Deduïu que el Hessià de h és la segona forma fonamental de S .

¹Do Carmo, p.178

Solució: a) Si pensem les funcions en coordenades el Hessià de h en P , que denotaré només per H , està donat per

$$H(w) = \left. \frac{d^2 h(u(t), v(t))}{dt^2} \right|_{t=0}$$

on $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, amb $\alpha(0) = P$ i $\alpha'(0) = w$.

Per la regla de la cadena, $\alpha'(0) = \varphi_u(u_0, v_0)u'(0) + \varphi_v(u_0, v_0)v'(0)$, on (u_0, v_0) són les coordenades de P . Escriurem només $\alpha'(0) = \varphi_u u'(0) + \varphi_v v'(0)$. De manera que si $w = a\varphi_u + b\varphi_v$, tenim $a = u'(0)$, $b = v'(0)$. Utilitzant ara que $h_u = h_v = 0$ en $t = 0$, tenim

$$\begin{aligned} H(w) &= \frac{d}{dt}_{t=0} \left(\frac{dh(u(t), v(t))}{dt} \right) = \frac{d}{dt}_{t=0} (h_u u'(t) + h_v v'(t)) \\ &= h_{uu}(P)u'(0)^2 + 2h_{uv}(P)u'(0)v'(0) + h_{vv}(P)v'(0)^2 \\ &= h_{uu}(P)a^2 + 2h_{uv}(P)ab + h_{vv}(P)b^2. \end{aligned}$$

b) Com $h(u, v) = \langle \varphi(u, v) - P, \nu \rangle$, $h_u(P) = \langle \varphi_u(P), \nu \rangle = 0$, i $h_v(P) = \langle \varphi_v(P), \nu \rangle = 0$, i per tant P és un punt crític.

Calculem el Hessià sense utilitzar l'apartat a).

$$H(w) = \frac{d}{dt}_{t=0} \frac{d}{dt} \langle \gamma(t) - P, \nu \rangle = \frac{d}{dt}_{t=0} \langle \gamma'(t), \nu \rangle = \langle \gamma''(0), \nu \rangle = k\vec{n}\nu = k_n(w).$$

Si fem servir l'apartat a) veiem que la matriu Hessiana és

$$\begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot \nu & \varphi_{uv} \cdot \nu \\ \varphi_{vu} \cdot \nu & \varphi_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}$$

que és exactament la matriu de la segona forma fonamental i ja sabem que

$$k_n(w) = \mathbf{II}(w, w).$$

153. Funcions de Morse.² Un punt crític $P \in S$ d'una funció diferenciable $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diu no degenerat si l'aplicació lineal autoadjunta $A_P h$ associada al Hessià de h en P és no singular. En cas contrari es diu que P és un punt degenerat. Una funció diferenciable s'anomena funció de Morse si tots els seus punts crítics són no degenerats. Sigui $h_Q : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$h_Q(X) = \sqrt{\langle X - Q, X - Q \rangle}, \quad X \in S, Q \in \mathbb{R}^3 - S$$

a) Demostreu que $P \in S$ és un punt crític de h_Q si i només si la recta que uneix P amb Q és normal a S .

²Do Carmo, p.178

b) Siguin P un punt crític de h_Q , i $w \in T_P S$ amb $|w| = 1$. Demostreu que

$$H_P h_Q(w) = \frac{1}{h_Q(P)} - k_n$$

on k_n és la curvatura normal en la direcció de w . Deduir d'aquí que $A_P h_Q$ diagonalitza en la base ortonormal de $T_P S$ definida per les direccions principals i que P és un punt degenerat de h_Q si i només si $h_Q(P) = 1/k_1$ o $h_Q(P) = 1/k_2$ on k_1 i k_2 són les curvatures principals de S en p .

c) Demostreu que el conjunt

$$B = \{Q \in \mathbb{R}^3 \mid h_Q \text{ és una funció de Morse}\}$$

és un obert dens de $\mathbb{R}^3$.

Solució: a) Sigui (U, φ) una carta local de S amb $P \in U$. Observem que h_Q en coordenades (això vol dir considerar la funció composta $h_Q \circ \varphi$) està donada per

$$h_Q(u, v) = \sqrt{\langle \varphi(u, v) - Q, \varphi(u, v) - Q \rangle}$$

Així, en el punt (u, v) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_Q}{\partial u} &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi - Q, \rangle}{h_Q} \\ \frac{\partial h_Q}{\partial v} &= \frac{\langle \varphi_v, \varphi - Q, \rangle}{h_Q} \end{aligned}$$

Si P és un punt crític aquestes dues derivades parcials s'anul·len en $P = \varphi(u_0, v_0)$ i, per tant, $P - Q$ és ortogonal a $\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)$, que són base de l'espai tangent a la superfície en P . Per tant $P - Q$ té la direcció de la normal.

b) Com Q està fixat denotem $h = h_Q$ per alleugerir la notació. Prenem una petita corba integral de w : $\gamma(s)$ amb $\gamma(0) = P$ i $\gamma'(s) = w$. Suposem s arc.

La distància dels punts d'aquesta corba a Q és

$$h(s) = \sqrt{\langle \gamma(s) - Q, \gamma(s) - Q \rangle}$$

on, per abús de notació, $h(s) = h(\gamma(s))$. Posem $d = d(P, Q) = h(0)$.

Llavors

$$\frac{d^2 h}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{d}{ds} h(s) \right) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\langle \gamma'(s), \gamma(s) - Q \rangle}{h(s)} = \frac{(\langle \gamma''(0), P - Q \rangle + 1) d}{d^2}$$

on, en la darrera igualtat hem usat que $h'(0) = 0$.

Com $d = |P - Q|$ tenim $P - Q = -d\nu$ on ν és la normal a la superfície en P (apartat a). Per tant

$$H_P h(w) = \frac{d^2 h}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{d} - \langle k\vec{n}, \nu \rangle = \frac{1}{d} - k_n,$$

on k és la curvatura de $\gamma(s)$ en $s = 0$ i $\vec{n}$ és la normal principal de $\gamma(s)$ en $s = 0$.

L'aplicació bilineal associada al Hessià és la donada per $Q(u, v) = \frac{1}{2}(H(u+v) - H(u) - H(v))$. Observem que $H(\lambda u) = \lambda^2 H(u)$.

Prenem la base ortonormal $B = (e_1, e_2)$ formada per les direccions principals. L'endomorfisme associat W està caracteritzat per

$$\begin{aligned}\langle We_1, e_1 \rangle &= Q(e_1, e_1) = H(e_1) = \frac{1}{d} - k_1 \\ \langle We_2, e_2 \rangle &= Q(e_2, e_2) = H(e_2) = \frac{1}{d} - k_2 \\ \langle We_1, e_2 \rangle &= Q(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(H(e_1 + e_2) - H(e_1) - H(e_2)) = 0\end{aligned}$$

La darrera igualtat prové de que

$$H(e_1 + e_2) = |e_1 + e_2|^2 H\left(\frac{e_1 + e_2}{|e_1 + e_2|}\right) = 2\left(\frac{1}{d} - k_n(e_1 + e_2)\right) = 2\left(\frac{1}{d} - \frac{k_1 + k_2}{2}\right) = H(e_1) + H(e_2),$$

on k_1, k_2 són les curvatures principals en P i hem utilitzat la fórmula d'Euler per calcular la curvatura normal en la direcció $e_1 + e_2$.

Anàlogament $\langle We_2, e_1 \rangle = 0$, de manera que la matriu $M(W, B)$ de W en aquesta base és diagonal. Concretament

$$M(W, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} - k_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} - k_2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, la definició de punt degenerat és que el determinant del Hessià s'anul·li en aquest punt, però com aquest determinant coincideix amb el de la matriu anterior resulta que P és degenerat si i només si almenys un dels radis de curvatura principal coincideix amb la distància de P a Q , és a dir, si i només si Q és un punt focal.

c) Acabem de veure que un punt $P \in S$ és un punt crític degenerat de la funció distància a Q si i només si Q és un punt focal respecte de P (i.e. $Q = P + \rho\nu$, amb ρ radi de curvatura principal).

Sigui FN el fibrat normal, és a dir,

$$FN = \{(x, s\nu(x)); x \in S, s \in \mathbb{R}, \nu(x) \text{ normal unitari a } S \text{ en } x\}.$$

Lema. Els punts focals són els valors crítics de la funció $f : FN \rightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $f(x, s) = x + s\nu(x)$.

Si acceptem aquesta afirmació ja hem acabat, ja que el teorema de Sard aplicat a f ens diu que el conjunt de punts focals té mesura zero. És a dir, h_Q no és funció de Morse si i només si existeix algun punt crític degenerat $P \in S$. Però això vol dir que Q és focal de S , és a dir, els punts Q per als quals h_Q no és de Morse pertanyen a un conjunt de mesura zero.

Demostració del Lema. Ja es veu que hem d'aplicar el teorema de Sard³. L'aplicació f en coordenades és $f(u, v, s) = \varphi(u, v) + s\nu(u, v)$, on $\nu(u, v)$ denota el vector unitari normal

³Si $f : M_1 \rightarrow M_2$ és una aplicació diferenciable entre varietats de la mateixa dimensió, el conjunt de valors crítics (imatge per f dels punts crítics) té mesura zero. Que un punt sigui crític vol dir que el jacobià de f s'anul·la en aquest punt

a la superfície en el punt $\varphi(u, v)$. Les columnes de la matriu jacobiana estan formades per les components dels vectors f_u, f_v, f_s respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Per tant, aquest determinant és zero si i només si els vectors

$$\begin{aligned} f_u &= \varphi_u + s\nu_u \\ f_v &= \varphi_v + s\nu_v \\ f_s &= \nu \end{aligned}$$

són linealment dependents.

Però els dos primers són tangents a la superfície, de manera que el punt és degenerat si en aquest punt els vectors f_u, f_v són linealment dependents.

Si posem

$$\begin{aligned} \nu_u &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v \\ \nu_v &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v \end{aligned}$$

tenim

$$\begin{aligned} f_u &= (1 + sa_{11})\varphi_u + sa_{21}\varphi_v \\ f_v &= sa_{12}\varphi_u + (1 + sa_{22})\varphi_v \end{aligned}$$

i la condició de punt degenerat és

$$\det \begin{pmatrix} 1 + sa_{11} & sa_{21} \\ sa_{12} & 1 + sa_{22} \end{pmatrix} = \det(sA + I) = s^2 \det(A + \frac{1}{s}I) = 0$$

on $A = (a_{ij})$ és la matriu de l'aplicació de Weingarten $-d\nu$ canviada de signe. Per tant, com les curvatures principals, k_1, k_2 , són els valors propis de l'aplicació de Weingarten resulta que $\det(A + s^{-1}I) = \det(-A - s^{-1}I) = 0$ si i només si $s = 1/k_1 = \rho_1$ o $s = 1/k_2 = \rho_2$. Resumint, si $(x, s) \in FN$ és punt crític de f llavors s és igual a un dels radis de curvatura, és a dir $f(x, s) = x + s\nu(x)$ és punt focal.

6.6 Superfícies associades a corbes de l'espai

154. * [Superfícies reglades] Una superfície S de $\mathbb{R}^3$ s'anomena *reglada* si es pot parametritzar de la forma

$$\varphi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s),$$

on $\alpha(s)$ i $\nu(s)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ i $|\nu(s)| = 1$.

- a) Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari ν de S és constant al llarg de les rectes $s = cte$.



Figura 6.1: Superfície reglada.

- b) Les superfícies reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas hi ha una corba $t = t(s)$ on $\varphi(s, t)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $s = cte$ són tangents a l'eix de regressió.

Solució: a) Observem que

$$\begin{aligned}\varphi_s &= \gamma'(s) + tv'(s) \\ \varphi_t &= v(s) \\ \varphi_{tt} &= 0\end{aligned}$$

Per tant, el coeficient g de la segona forma fonamental ($g = \nu \cdot \varphi_{tt}$) és zero. Això implica que el determinant de la segona forma fonamental és negatiu o zero ($-f^2$) i, per tant, $K \leq 0$. El cas $K = 0$ correspon, doncs, al cas $f = \nu \cdot \varphi_{st} = -\frac{d\nu}{dt} \cdot \varphi_s = 0$. Com que també $\frac{d\nu}{dt} \varphi_t = -\nu \cdot \varphi_{tt} = 0$, resulta que $\frac{d\nu}{dt} = 0$ i ν és constant sobre les generatrius.

b) Escrivim $\nu = f(\varphi_s \wedge \varphi_t)$ amb $f = f(s, t) = \frac{1}{|\varphi_s \wedge \varphi_t|}$. Tenim

$$0 = \nu_t = f_t \varphi_s \wedge \varphi_t + f \varphi_{st} \wedge \varphi_t.$$

Equivalentment

$$f_t \gamma'(s) \wedge v(s) + (tf_t + f)v'(s) \wedge v(s) = 0.$$

Si $v'(s)$ i $\gamma'(s)$ fosin linealment independents obtindriem $f_t = 0$ i $tf_t + f = 0$, és a dir, $f = 0$, el que és una contradicció. Per tant, existeix una funció $\mu(s)$ tal que $v'(s) = \mu(s)\gamma'(s)$.

Busquem ara una corba $\sigma(s) = \gamma(s) + t(s)v(s)$ tal que

$$\sigma'(s) = \gamma'(s) + t'(s)v(s) + t(s)v'(s) = \lambda(s)v(s)$$

per a una certa funció λ . Com $v(s)$ és ortogonal a $v'(s)$ (derivant $v(s) \cdot v(s) = 1$) l'anterior igualtat, juntament amb $v'(s) = \mu(s)\gamma'(s)$, implica

$$1 + \mu(s)t(s) = 0,$$

és dir, la corba $\sigma(s)$ amb $t(s) = -1/\mu(s)$, és tangent a les generatrius.

Observem finalment que $\varphi_s = \gamma'(s) + tv'(s)$, de manera que sobre els punts de $\sigma(s)$, on $t(s) = -1/\mu(s)$, tenim $\varphi_s = \gamma'(s) - \frac{1}{\mu(s)}v'(s) = 0$. És a dir, sobre l'eix de regressió la superfície deixa de ser regular.

155. * [Desenvolupable tangencial] Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt.

- Comproveu que $\varphi(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t)$, amb $s \neq 0$, defineix una superfície.
- Demostreu que aquesta superfície és desenvolupable.
- Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental no depenen de la torsió de α .
- Calculeu la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana en termes de la curvatura i torsió de la corba.
- Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que α , deduiu que hi ha una isometria d'un obert de la superfície anterior amb una regió del pla.

Solució:

(a) Localment la parametrització és regular ja que els vectors $\varphi_t = T + ksN$ i $\varphi_s = T$ són linealment independents, per ser $s \neq 0$ i $k \neq 0$.

(b) El vector normal val

$$\nu = \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|} = \pm B.$$

Com que no dep'enen de

(c) Tenim $\varphi_t = T + ksN$ i $\varphi_s = T$, d'on $E = 1 + k^2s^2$, $F = 1$ i $G = 1$.

(d)

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= \dot{T} + k'sN + ks\dot{N} = kN + k'sN + ks(-kT - \tau B) \\ &= -k^2sT + (k's + k)N - \tau ksB \\ \varphi_{ts} &= kN \\ \varphi_{ss} &= 0 \\ \varphi_t \times \varphi_s &= ksN \times T = -ksB \end{aligned}$$

Per tant $\nu = B$ i $e = \tau ks$ si $s > 0$ i $\nu = -B$ i $e = -\tau ks$ si $s < 0$, $f = 0$ i $g = 0$.

156. * [Envolvent de les normals] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ . Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}(s)$$

on $\mathbf{n}$ és el vector normal de la corba α .

157. * [Envolvent de les binormals] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ . Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{b}(s)$$

on $\mathbf{b}$ és el vector binormal de la corba α .

158. * [Superfície polar] Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + s\mathbf{b}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α . La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu *eix polar*.

- Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: *La superfície polar de α és l'envolvent dels plans normals*. Recordem que l'envolvent d'una família uniparamètrica de plans (la nostra família és uniparamètrica perquè tenim un pla per a cada valor del paràmetre t de la corba) és una superfície tangent en cada punt a un d'aquests plans. Aquesta superfície es troba fàcilment resolent el sistema format per l'equació dels plans (que depèn de t) i l'equació que s'obté derivant aquesta respecte del paràmetre t .
- Trobeu els centres de les esferes osculatòries, que són aquelles amb contacte d'ordre 3 amb $\alpha(t)$. Comproveu que pertanyen a la superfície polar.

Indicació: L'esfera

$$S(x, y, z) := (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) - R^2 = 0$$

té un contacte d'ordre k amb $\alpha(t)$ en un punt t_0 si

$$\frac{d^i}{dt^i} S(\alpha(t_0)) = 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (6.1)$$

Comproveu que les esferes amb centre l'eix polar que passen pel corresponent punt de α tenen contacte d'ordre dos amb la corba.

- Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatòries.

Indicació: L'eix de regressió de la superfície polar és el lloc geomètric dels centres de les esferes osculadores (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Recordem que l'eix de regressió d'una família uniparamètrica de plans $G(x, y, z, t) = 0$ és la corba que s'obté en resoldre el sistema

$$\begin{aligned} G(x, y, z, t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} G(x, y, z, t) &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} G(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

- 159.** Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. Es considera l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + e^s \alpha'(t)$$

i es considera el conjunt $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$.

1. És S una superfície en un entorn de $\varphi(0, 0)$?
2. Trobeu l'equació de les corbes $\sigma = \sigma(t)$ sobre S perpendiculars, en cada instant t , al vector $\alpha'(t)$ (involutes).

6.7 Curvatura de Gauss II

- 160.** Demostreu que una superfície compacta té com a mínim un punt el·líptic. Deduïu que una superfície minimal (i.e. amb curvatura mitjana $H = 0$) no pot ser compacta.

Solució: Si S és compacta aleshores la aplicació $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ pren un valor màxim R^2 en un cert punt $p \in S$. Vegem en primer lloc que el vector normal de S en p és $\nu(p) = \frac{p}{R}$. En efecte, per a tot vector tangent $v \in T_p S$ prenem una corba $\beta \subset S$ tal que $\beta(0) = p$ i $\beta'(0) = v$. Com que $g(s) = f(\beta(s))$ té un màxim en $s = 0$ deduïm que $g'(0) = \langle \beta'(0), \beta(0) \rangle = \langle v, p \rangle = 0$, i per tant p és ortogonal a tot vector tangent. Considerem ara $w \in T_p S$ un vector propi unitari de l'aplicació de Weingarten en p amb valor propi k i $\alpha(s)$ una corba parametritzada per l'arc amb $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = w$. Com que w és unitari tenim que

$$k = k_n(w) = II(w) = \langle -d\nu(w), w \rangle = \langle -\nu'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \nu(p), \alpha''(0) \rangle.$$

D'altra banda, la funció $g(s) = f(\alpha(s)) = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$ té un màxim en $s = 0$, per tant no tan sols $g'(0) = 0$ sinó que a més $g''(0) \leq 0$. Calculem doncs $g''(0)$ i obtenim

$$g''(0) = 2(\langle \alpha''(0), \alpha(0) \rangle + \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle) = 2(\langle \alpha''(0), p \rangle + \langle w, w \rangle) = 2(R\langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle + 1) = 2(Rk + 1).$$

D'on $Rk + 1 \leq 0$, és a dir, $k \leq -\frac{1}{R}$. I per tant, $K(p) \geq \frac{1}{R^2} > 0$. Clarament això implica que una superfície mínima no pot ser compacta.

- 161.** Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ on f és una funció diferenciable.

- a) Calculeu la primera i segona formes fonamentals de S en termes de f .
- b) Deduir que S és plana si i només si $f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2 = 0$ i que és minimal si i només si $(1 + f_u^2)f_{vv} + (1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_{uv}f_{ufv} = 0$.
- c) Proveu que si f és harmònica (i.e. $\Delta f := f_{uu} + f_{vv} = 0$) llavors $K \leq 0$.

Solució: Do Carmo, Exemple 5, Secció 3.3

162. Doneu l'expressió de la curvatura de Gauss en un sistema de coordenades ortogonals.

Solució: Una definició equivalent de curvatura de Gauss a la del determinant de l'aplicació de Weingarten és $K = \frac{\langle R(\varphi_v, \varphi_u)\varphi_u, \varphi_v \rangle}{EG - F^2}$ que, utilitzant els símbols de Christoffel per calcular les derivades covariants, dona la coneguda fórmula

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

que es dedueix amb càlculs de la definició de $K = \det W$ (i que està en la base d'una demostració del Teorema Egredi de Gauss). L'expressió dels símbols de Christoffel en funció dels coeficients de la primera forma fonamental i les seves derivades és molt més senzilla quan $F = 0$ (coordenades ortogonals):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_v}{2G} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-G_u}{2E} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2G} \end{aligned}$$

De manera que

$$-EK = \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v - \frac{E_v}{2E} \frac{E_v}{2G} + \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2 + \frac{E_v}{2G} \frac{G_v}{2G} - \frac{E_u}{2E} \frac{G_u}{2G}$$

i fent càlculs podem arribar a escriure

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right].$$

163. Coordenades isotermes. Si $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ (en aquest cas es diu que u, v són coordenades isotermes) proveu que la curvatura de gauss K està donada per

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

on $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ és el Laplacà de $\mathbb{R}^2$ i $\lambda(u, v)$ és una funció positiva. Calculeu la curvatura de Gauss d'una superfície en la qual $E = 1/(u^2 + v^2 + c^2)^2 = G$ i $F = 0$.

Solució: Posant $E = G = \lambda$ a l'expressió de la curvatura del problema anterior (en el que ja havíem suposat $F = 0$) obtenim

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)_v \right] = -\frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \right)_u + \left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right)_v \right] \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \left[\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right] = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda. \end{aligned}$$

En particular, si $\lambda = \frac{1}{(u^2+v^2+c^2)^2}$ aleshores $\frac{-1}{2} \log \lambda = \log(u^2 + v^2 + c^2)$ i per tant,

$$K = \frac{\left(\frac{2u}{u^2+v^2+c^2}\right)_u + \left(\frac{2v}{u^2+v^2+c^2}\right)_v}{\frac{1}{(u^2+v^2+c^2)^2}} = 2(u^2 + v^2 + c^2) - 4u^2 + 2(u^2 + v^2 + c^2) - 4v^2 = 4c^2.$$

164. Sigui $\varphi(u, v)$ una carta isoterma.

- a) Demostreu que $\langle \Delta\varphi, \varphi_u \rangle = \langle \Delta\varphi, \varphi_v \rangle = 0$.
- b) Demostreu que la superfície $\varphi(u, v)$ és minimal si i només si $\Delta\varphi(u, v) = 0$

Solució: a) Observem que el laplacà es pot escriure com

$$\Delta\varphi = \varphi_{uu} + \varphi_{vv}.$$

Derivant les relacions

$$\begin{aligned}\varphi_u \cdot \varphi_v &= 0 \\ \varphi_u \cdot \varphi_u &= \varphi_v \cdot \varphi_v = \lambda\end{aligned}$$

obtenim

$$\begin{aligned}2\varphi_{uu} \cdot \varphi_u &= \lambda_u \\ 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_v &= \lambda_u \\ \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{uv} &= 0\end{aligned}$$

i, per tant,

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_u = \frac{\lambda_u}{2} - \frac{\lambda_u}{2} = 0.$$

I anàlogament quan multipliquem el laplacà per φ_v .

b) Si el laplacà és zero, els termes de la diagonal de la segona forma fonamental són

$$e = -\varphi_{uu} \cdot \nu = \varphi_{vv} \cdot \nu = -g.$$

La matriu de l'endomorfisme associat (endomorfisme de Weingarten) és el producte de matrius $L = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}$. Aquesta matriu té traça zero, ja que la segona forma fonamental té traça zero i la primera forma fonamental és un múltiple de la identitat. Com la curvatura mitjana és la traça de l'endomorfisme associat, hem acabat.

6.8 Ombres i Contorns

165. [Apunts J. Monterde] Suposem que projectem sobre una pantalla plana l'ombra que fa un superfície quan la il·luminem amb una llum formada per raigs paral·lels a una direcció. La frontera de l'ombra és el que s'anomena el *contorn aparent* de la superfície en la direcció determinada per la llum. Cada punt d'aquesta corba plana correspon, com a mínim, a un punt de la superfície. El conjunt d'aquests punts s'anomena *generador del contorn*, o *corba generatriu*.

a) Demostra que una condició necessària (en general no suficient) perquè un punt P d'una superfície donada S , pertanyi a la corba generatriu del contorn és $\langle \nu(P), w \rangle = 0$, on ν és el camp normal unitari a la superfície S i w és el vector que ens dona la direcció dels raigs de llum.

b) Demostreu que

$$\mathbf{II}(T, w) = 0,$$

on T és el vector tangent a la corba generatriu en el punt P , i $\mathbf{II}$ és la segona forma fonamental de la superfície.

c) Si T i w són linealment independents (i, per tant, base de $T_P S$) demostreu que l'aplicació de Weingarten està donada per

$$W = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} k_n(T) & -k_n(w) \cos \theta \\ -k_n(T) \cos \theta & k_n(w) \end{pmatrix}$$

on θ és l'angle entre T i w .

d) Si el pla on veiem l'ombra és ortogonal a w , demostreu que

$$K(P) = k(Q) \cdot k_n(w),$$

on $K(P)$ és la curvatura de Gauss de la superfície en el punt P , Q és l'ombra de P , i $k(Q)$ és la curvatura de la corba *contorn aparent* en Q .

Solució: a) Considerem el pla que passa per P amb espai director $\langle w, \nu(P) \rangle$. La intersecció d'aquest pla amb la superfície és una corba i aquesta corba només pot tenir un punt en comú amb la recta $l : P + \langle w \rangle$. Per tant, aquesta recta l és tangent a la corba (argument similar al del problema 136). Com $\nu(P)$ és normal a les tangents en P de tots les corbes contingudes a la superfície, en particular $\nu(P)$ és ortogonal a w .

b) Per definició

$$II(T, w) = I\left(-\frac{d\nu}{ds}, w\right) = \left\langle -\frac{d\nu}{ds}, w \right\rangle$$

on $\nu(s)$ és la restricció del normal a la superfície a la generatriu $\gamma(s)$ (corba integral de T).

Però com que per a tot s tenim, per l'apartat a), que $\langle \nu(s), w \rangle = 0$, simplement derivant tenim el resultat.

c) En aquesta base

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$W = I^{-1}II = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n(T) & 0 \\ 0 & k_n(w) \end{pmatrix}$$

com volíem.

d) Observem que

$$K(P) = \det W(P) = \frac{1}{\sin^2 \theta} (k_n(T) \cdot k_n(w))$$

Per tant, només cal demostra que

$$k_n(T) = k(Q) \cdot \sin^2 \theta.$$

Denotem $\gamma(s)$ la corba generatriu del contorn. Llavors la corba contorn aparent és la corba

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)w$$

amb $\lambda'(s) = -\cos \theta$ (només cal imposar $\beta'(s) \cdot w = 0$).

La observació important és que $\nu(\gamma(s)) = N(s)$, on $N(s)$ el el vector normal a $\beta(s)$. Això és degut a que tant $\nu(\gamma(s))$ com $N(s)$ són ortogonals a w i $\beta'(s)$.

Així,

$$k_n(T) = II(T, T) = \left\langle -\frac{d\nu}{ds}, T \right\rangle = \langle \nu, \gamma''(s) \rangle = \langle \nu, \beta''(s) + (\cos \theta)'w \rangle = \langle \nu, \beta''(s) \rangle$$

Però s no és paràmetre arc de θ . Si posem

$$T_\beta = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} = \frac{\beta'(s)}{\sin \theta}$$

tenim

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= |\beta'(s)|T_\beta \\ \beta''(s) &= |\beta'(s)|' T_\beta + |\beta'(s)| \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} T_\beta \end{aligned}$$

on τ és el paràmetre arc de β (en particular $d\tau/ds = |\beta'(s)| = \sin \theta$).

Per tant tenim,

$$k_n(T) = \langle \nu, \beta''(s) \rangle = \langle \nu, \sin^2 \theta k_\beta(s)n(s) \rangle = k(Q) \sin^2 \theta,$$

com volíem.

- 166.** [Apunts J. Monterde] Estudieu les corbes $\alpha(t)$ sobre una superfície S tals que $\langle \nu(\alpha(t)), \alpha(t) - F \rangle = 0$, on ν és el camp normal unitari a la superfície S . Aquesta corba és la *corba generatriu* de la superfície il·luminada amb un focus situat en el punt fix F .

a) Demostreu que

$$\mathbf{II}(T, P - F) = 0,$$

on T és el vector tangent a la corba generatriu en el punt P , i $\mathbf{II}$ és la segona forma fonamental de la superfície.

b) Trobeu la matriu de l'aplicació de Weingarten en la base T i $w = P - F$ (en el cas que aquests dos vectors formin efectivament una base).

c) Demostreu que

$$K(P) = \frac{k_n(T) \cdot k_n(P - F)}{\sin^2 \theta}$$

on $K(P)$ és la curvatura de Gauss de la superfície en el punt P , i θ és l'angle entre T i $w = P - F$.

Solució: a) *Simplement derivant*

$$\langle \nu(\alpha(t)), \alpha(t) - F \rangle = 0$$

obtenim el resultat.

b)

$$II = \begin{pmatrix} k_n(T) & 0 \\ 0 & k_n(w)|w|^2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$W = I^{-1}II = \frac{1}{|w|^2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} |w|^2 & -|w| \cos \theta \\ -|w| \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n(T) & 0 \\ 0 & k_n(w)|w|^2 \end{pmatrix}$$

Operant obtenim

$$W = \frac{1}{|w|^2 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} |w|^2 k_n(T) & -k_n(w)|w|^3 \cos \theta \\ -k_n(T)|w| \cos \theta & k_n(w)|w|^2 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$K = \det W = K(P) = \frac{k_n(T) \cdot k_n(P - F)}{\sin^2 \theta}.$$

6.9 Línies de curvatura

167. Siguin S_1 i S_2 dues superfícies que es tallen al llarg d'una corba regular C formant un angle $\theta(P)$ (angle entre les normals) en cada un dels punts $P \in C$.

Demostreu que la curvatura k de C en P compleix

$$k^2 \sin^2(\theta) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(\theta),$$

on λ_1 i λ_2 són les curvatures normals en P en la direcció de la recta tangent a C , a S_1 i S_2 respectivament.

Solució: Sigui $\gamma(s)$ una parametrització per l'arc de C . Sabem que la curvatura normal en una direcció donada es calcula aplicant la segona forma fonamental al vector unitari en aquesta direcció. Denotem $T(s) = \gamma'(s)$

$$\lambda_i = \mathbf{II}^i(T, T) = -\frac{d\nu_i}{ds} \cdot T = \nu_i \cdot k\nu = k \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2$$

on $N = N(s)$ és la normal principal de $\gamma(s)$ i α_i és l'angle entre N i la normal a la superfície ν_i . Observem que

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1,$$

ja que les tres normals N, ν_1, ν_2 estan en un mateix pla, concretament en el pla rectificat de $\gamma(s)$.

Un càlcul directe ens diu que

$$\sin^2 \theta = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta.$$

Per tant,

$$k^2 \sin^2 \theta = k^2 \cos^2 \alpha_1 + k^2 \cos^2 \alpha_2 - 2k^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \theta.$$

- 168.** Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ engendrada al fer girar al voltant de l'eix Oy la corba C continguda en el pla xy i parametritzada per $\alpha(t) = (2 + \cos t, 2 \sin t)$ on $0 \leq t \leq 2\pi$. Trobeu les corbes de S que són asimptòtiques i, a la vegada, línies de curvatura.

Solució: La superfície de revolució està donada per

$$\varphi(t, u) = ((2 + \cos t) \cos u, 2 \sin t, (2 + \cos t) \sin u).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (-\sin t \cos u, 2 \cos t, -\sin t \sin u) \\ \varphi_u &= (-(2 + \cos t) \sin u, 0, (2 + \cos t) \cos u) \\ E &= 4 \cos^2 t + \sin^2 t \\ F &= 0 \\ G &= (2 + \cos t)^2 \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 t + \sin^2 t}} (2 \cos t \cos u, \sin t, 2 \cos t \sin u) \\ \varphi_{tt} &= (-\cos t \cos u, -2 \sin t, -\cos t \sin u) \\ \varphi_{tu} &= (\sin t \sin u, 0, -\sin t \cos u) \\ \varphi_{uu} &= (-(2 + \cos t) \cos u, 0, -(2 + \cos t) \sin u) \\ e &= -\frac{2}{\sqrt{E}} \\ f &= 0 \\ g &= -\frac{(2 + \cos t) \cos t}{\sqrt{E}} \end{aligned}$$

L'equació de les línies de curvatura és

$$\begin{vmatrix} u'^2 & -u't' & t'^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = t'u'(Eg - eG) = 0,$$

però és fàcil veure, substituint els valors que acabem de trobar, que $(Eg - eG) = 0$ si i només si $3\cos^3 t = 4 + \cos t$, igualtat que no es pot donar mai, de manera que les línies de curvatura són les línies coordenades $t = \text{constant}$ i $u = \text{constant}$.

Les línies asimptòtiques estan caracteritzades per tenir un vector tangent $V = (t', u')$ tal que $II(V, V) = 0$. Com $f = 0$, aquesta condició s'escriu com $et'^2 + gu'^2 = 0$.

Considerem les línies de curvatura $t = \text{constant}$, i mirem si són també asimptòtiques. La condició de ser asimptòtica és ara $gu'^2 = 0$, és a dir,

$$-\frac{1}{\sqrt{E}}(2 + \cos t) \cos t = 0,$$

que implica $t = \pi/2$. És a dir, la corba $\varphi(\pi/2, u) = (2 \sin u, 0, 2 \cos u)$ és a la vegada asimptòtica i línia de curvatura.

Les línies de curvatura $u = \text{constant}$ no són asimptòtiques ja que ara la condició és $et'^2 = 0$, i com que $e = \frac{2}{\sqrt{E}}$ aquesta condició no es pot donar.

169. Determineu les corbes asimptòtiques i les línies de curvatura de la superfície d'equació $z = xy$.

Solució: Considerem la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, xy)$. Tenim

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (1, 0, y) \\ \varphi_y &= (0, 1, x) \\ E &= 1 + y^2 \\ F &= xy \\ G &= 1 + x^2 \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(-y, -x, 1) \\ \varphi_{xx} &= (0, 0, 0) \\ \varphi_{xy} &= (0, 0, 1) \\ \varphi_{yy} &= (0, 0, 0) \\ e &= 0 \\ f &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Les corbes asimptòtiques tenen coordenades $(x'(s), y'(s))$ respecte de la base (φ_x, φ_y) tals que

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2fx'y' = 0.$$

Com $f \neq 0$, les corbes asimptòtiques són les corbes coordenades $x = \text{constant}$, $y = \text{constant}$.

L'equació diferencial de les línies de curvatura és

$$\begin{vmatrix} y'^2 & -x'y' & x'^2 \\ 1+y^2 & xy & 1+x^2 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = f(1+y^2)x'^2 - f(1+x^2)y'^2 = 0.$$

Com $f \neq 0$, les línies de curvatura han de complir

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Integrant, obtenim $\operatorname{argsinh} x = \operatorname{argsinh} y + c$, és a dir,

$$x = y \cosh c + \sqrt{1+y^2} \sinh c.$$

170. Superfície de Enneper. Sigui S la superfície parametritzada per

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right).$$

Proveu que

- a) $E = G = (1 + u^2 + v^2)^2$, $F = 0$.
- b) $e = 2$, $g = -2$, $f = 0$.
- c) $k_1 = -k_2 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$ i per tant és una superfície minimal.
- d) Les corbes coordenades són línies de curvatura.
- e) Les línies asimptòtiques són $u + v = \text{const}$, $u - v = \text{const}$.

Solució:

(a) i (b) es dedueixen dels següents càlculs

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \\ \varphi_v(u, v) &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\ \varphi_{uu}(u, v) &= (-2u, 2v, 2) \\ \varphi_{uv}(u, v) &= (2v, 2u, 0) \\ \varphi_{vv}(u, v) &= (2u, -2v, -2) \\ \varphi_u \times \varphi_v &= (-2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v + 2u^2v + 2v^3, 1 - u^4 - 2u^2v^2 - v^4) \\ \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= (1 + u^2 + v^2)^2 \end{aligned}$$

(c) i (d) són conseqüència de que la matriu de l'aplicació de Weingarten en la base φ_u, φ_v és

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

(e) Finalment, recordem que les línies asimptòtiques són aquelles corbes $\alpha \subset S$ que verifiquen que $II(\alpha'(t)) = 0$ per a tot t . Com que la matriu de la segona forma fonamental de la superfície de Enneper és

$$II = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ aleshores $\alpha' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$ és un vector isòtrop per II si i només si $2(u')^2 - 2(v')^2 = 0$, és a dir, si $u' - v' = (u - v)' = 0$ o $u' + v' = (u + v)' = 0$. Per tant, les línies asimptòtiques són de la forma $u \pm v = \text{const.}$

171. Calculeu les direccions asimptòtiques i les direccions principals del paraboloid hiperbòlic $x = xy$, en el punt $P = (0, 0, 0)$.

172. Demostreu que en un punt hiperbòlic les direccions principals són bisectrius de les direccions asimptòtiques. Demostreu que una superfície és minimal si i només si les direccions asimptòtiques són ortogonals.

Solució: Només hem de recordar la fórmula d'Euler

$$k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

que relaciona la curvatura normal en una direcció amb les curvatures principals i l'angle que forma aquesta direcció amb les direccions principals.

Si la direcció és asimptòtica tenim

$$0 = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

és a dir

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

Això vol dir que les dues solucions possibles, corresponents al signe $\pm$, corresponen a angles del tipus $\alpha, \pi - \alpha$ (tangents oposades). La bisectriu de l'angle que formen té pendent $(\alpha + \pi - \alpha)/2 = \pi/2$ i correspon per tant a una de les direccions principals.

Si $k_1 = -k_2$ aquest dos angles són $\pi/4$ i $3\pi/4$, de manera que entre ells formen un angle de $\pi/2$, és a dir, en aquest cas les direccions asimptòtiques són ortogonals.

173. Demostreu que, al llarg d'una corba asimptòtica no rectilínia d'una superfície, el pla osculador de la corba coincideix amb el pla tangent a la superfície. Comproveu que el recíproc també és cert.

Solució: Si $\gamma(s)$ és una corba asimptòtica d'una superfície S , parametritzada per l'arc, tenim que

$$II(\gamma'(s), \gamma'(s)) = I\left(\frac{d\nu}{ds}, \gamma'(s)\right) = 0$$

on $\nu = \nu(s)$ és la restricció del normal a S a la corba $\gamma(s)$.

Si derivem la igualtat $\nu(s) \cdot \gamma'(s) = 0$ obtenim

$$\frac{d\nu}{ds} \cdot \gamma'(s) + \nu(s) \cdot k(s)N(s) = 0$$

on $k(s)$ és la curvatura de $\gamma(s)$ i $N(s)$ la normal principal.

Així, si la corba és asimptòtica amb $k(s) \neq 0$, ha de ser $\nu(s)$ ortogonal a $N(s)$, la qual cosa és equivalent a dir que el pla osculador de la corba coincideix amb el pla tangent a la superfície.

6.10 Superfícies de revolució

174. Demostreu que tota superfície de revolució és orientable.

Solució: A la pàgina 94 hem vist que el vector normal a la superfície de revolució $\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$ on $(a(u), b(u))$ és una corba del pla xz que gira al voltant de l'eix z és

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}(-b'(u) \cos v, -b'(u) \sin v, a'(u))$$

amb $a < u < b$ i $0 < v < 2\pi$ (les parametritzacions les pensem sempre definides sobre oberts). Però quan parlem de superfície de revolució ens referim normalment a $\varphi((a, b) \times [0, 2\pi])$. Però com $\nu(u, 0) = \nu(u, 2\pi)$ tenim un camp normal definit globalment sobre tota la superfície de revolució.

175. Tor de revolució. Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - b^2 = 0\}$ un tor de revolució ($a > b > 0$).

a) Parametritzeu S i trobeu-ne la primera forma fonamental.

b) Siguin $\Omega^- = \{(x, y, z) \in S \mid x^2 + y^2 - a^2 \leq 0\}$ i $\Omega^+ = \{(x, y, z) \in S \mid x^2 + y^2 - a^2 \geq 0\}$ dues regions de S . Calculeu l'àrea de Ω^+ i Ω^- en funció de a i b .

Solució:

(a) El tor ve parametritzat per $\varphi(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$ i té com a primera forma fonamental

$$I = \begin{pmatrix} (a + b \cos v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

(b) L'element d'àrea és $dA = b(a + b\cos(v)) = dudv$. Per calcular les àrees cal parametritzar les regions Ω^+ i Ω^- . Tenim

$$x^2 + y^2 - a^2 = b\cos(v)(b\cos(v) + 2a)$$

Com $a > b > 0$ tenim $b\cos(v) + 2a > 0$, aleshores

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{\varphi(u, v) : (u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)\} \\ \Omega^- &= \{\varphi(u, v) : (u, v) \in (0, 2\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)\}\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}\text{Area}(\Omega^+) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi b(a + b\cos(v)) dv du = 2\pi b(av + b\sin(v)) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi b(\pi a + 2b) \\ \text{Area}(\Omega^-) &= 2\pi b(\pi a - 2b)\end{aligned}$$

176. Demostreu que si totes les rectes normals a una superfície tallen una recta fixa, la superfície és de revolució i la recta fixa és l'eix de revolució.

Solució: Suposem que la recta és l'eix de les y 's. La condició donada és equivalent a que existeixi una funció $\lambda = \lambda(u, v)$ tal que

$$\varphi(u, v) + \lambda(u, v)\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = (0, *, 0).$$

A partir d'ara ometrem en aquesta i altres equacions la referència al punt (u, v) i escriurem només

$$\varphi + \lambda\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, *, 0).$$

Equivalentment,

$$\begin{aligned}x + \lambda(y_u z_v - y_v z_u) &= 0 \\ z + \lambda(x_u y_v - x_v y_u) &= 0\end{aligned}$$

Tallem ara la superfície en qüestió pel pla $y = y_0$. És a dir, fem $y(u, v) = y_0$. Aquesta igualtat defineix $v = v(u)$ de tal manera que $y(u, v(u)) = 0$. Derivant tenim

$$\frac{dy}{du} = y_u + y_v v' = 0.$$

Ara restringim la funció $x^2 + z^2 = x(u, v)^2 + z(u, v)^2$, al pla $y = y_0$, de manera que tindrem una funció només de u , $x(u, v(u))^2 + z(u, v(u))^2$, i derivem

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2 + z^2)}{du} &= 2x(x_u + x_v v') + 2z(z_u + z_v v') \\ &= 2x(x_u + x_v (-\frac{y_u}{y_v})) + 2z(z_u + z_v (-\frac{y_u}{y_v})) \\ &= 2x(\frac{-z}{\lambda y_v}) + 2z(\frac{x}{\lambda y_v}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

El fet de que aquesta funció sigui constant vol dir que la superfície és de revolució al voltant de l'eix de les y 's. El radi de gir en el pla $y = y_0$ és justament $\sqrt{x^2 + z^2}$.

177. Considerem la superfície de revolució S de $\mathbb{R}^3$ obtinguda al girar al voltant de l'eix Oz la corba del pla xz parametritzada per $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ amb $\varphi(v) > 0$ i $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$.

- Determineu les línies de curvatura de S .
- Comproveu que la curvatura gaussiana K de S està donada per $K = -\frac{\varphi''}{\varphi}$.
- Determineu les superfícies de revolució amb curvatura gaussiana $K = 0$.
- Determineu les superfícies de revolució amb curvatura gaussiana $K = cte$.
- Determineu les superfícies de revolució desenvolupables i estudeu les seves corbes asimptòtiques.
- Comproveu que la curvatura mitjana H de S està donada per

$$H = \frac{1 - \psi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}.$$

- Demostreu que la única superfície de revolució no plana amb curvatura mitjana nul·la és la catenoide.

Solució: a) Els coeficients de la primera i segona forma fonamentals de la superfície $\xi(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$ són $E = \varphi(v)^2$, $F = 0$, $G = 1$, $e = -\varphi(v)\psi(v)$, $f = 0$, $g = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'$ (Do Carmo, Exemple 4, Secció 3.3.)

L'equació de les línies de curvatura és doncs

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ \varphi^2 & 0 & 1 \\ -\varphi\psi' & 0 & \psi'\varphi'' - \psi''\varphi' \end{vmatrix} = 2u'v'\psi'^2 = 0.$$

Si assumim $\psi \neq 0$, vol dir que les línies de curvatura són les línies coordenades $u = \text{constant}$, $v = \text{constant}$ (els meridians i els paral·lels).

b) i f) Do Carmo, Exemple 4, Secció 3.3.

c) i d) Do Carmo, Exercici 7, Secció 3.3.

e) Desenvolupable implica $K = 0$.

g) $H = 0$ vol dir $\psi' = \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')$, però això és equivalent (derivant $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$) a

$$\psi'^2 = \varphi\varphi'',$$

és a dir, la funció φ compleix l'equació diferencial

$$\varphi\varphi'' + \varphi'^2 - 1 = 0.$$

Equivalentment

$$(\varphi\varphi')' = 1.$$

Podem doncs integrar i obtenim

$$\varphi\varphi' = v + c,$$

però traslladant φ (i.e. canviant φ per $\tilde{\varphi} = \varphi - c$) podem suposar que $c = 0$.

Així tindrem,

$$(\varphi^2)' = 2v$$

d'on

$$\varphi(v) = \sqrt{v^2 + b}$$

per a una certa constant b .

Ara trobem $\psi(v)$ a partir de

$$\psi'^2 = 1 - \varphi'^2 = \frac{b}{v^2 + b}.$$

Integrant tenim

$$\psi(v) = \sqrt{b} \operatorname{argsinh} \frac{v}{\sqrt{b}}$$

Fent el canvi de variable

$$\sinh w = \frac{v}{\sqrt{b}}$$

tenim

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \sqrt{b} \cosh w \\ \psi(w) &= \sqrt{b} w\end{aligned}$$

que és la parametrització de la catenària (Do Carmo, Exemple 2, Secció 4.2).

- 178.** Demostreu que la curvatura de Gauss de la superfície de revolució obtinguda en girar la corba C donada per

$$\begin{aligned}z &= \log \tan \frac{\theta}{2} + \cos \theta \\ y &= \sin \theta\end{aligned}$$

al voltant de l'eix z és igual a -1 .

Solució: Diguem $f(\theta) = \log \tan \frac{\theta}{2} + \cos \theta$. Observem que $f'(\theta) = \cos^2 \theta / \sin \theta$, i $f''(\theta) = -\cos \theta / \sin^2 \theta - \cos \theta$.

La superfície donada es pot parametritzar per

$$\begin{aligned}x &= \sin \theta \cos t \\ y &= \sin \theta \sin t \\ z &= f(\theta)\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
 \varphi_\theta &= (\cos \theta \cos t, \cos \theta \sin t, f') \\
 \varphi_t &= (-\sin \theta \sin t, \sin \theta \cos t, 0) \\
 E &= \cot^2 \theta \\
 F &= 0 \\
 G &= \sin^2 \theta \\
 \nu(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{f'^2 + \cos^2 \theta}}(-f' \cos t, -f' \sin t, \cos \theta) \\
 \varphi_{\theta\theta} &= (-\sin \theta \cos t, -\sin \theta \sin t, f'') \\
 \varphi_{\theta t} &= (-\cos \theta \sin t, \cos \theta \cos t, 0) \\
 \varphi_{tt} &= (-\sin \theta \cos t, -\sin \theta \sin t, 0) \\
 e &= \varphi_{yy} \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + \cos^2 \theta}}(f' \sin \theta + f'' \cos \theta) = -\cot \theta \\
 f &= \varphi_{yt} \cdot \nu = 0 \\
 g &= \varphi_{tt} \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + \cos^2 \theta}}(f' \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta \\
 K &= \frac{\det II}{\det I} = -1.
 \end{aligned}$$

179. Trobeu les loxodromes del tor de revolució parametritzat per

$$\varphi(u, v) = \left(\left(a + r \cos \left(\frac{u}{r} \right) \right) \cos v, \left(a + r \cos \left(\frac{u}{r} \right) \right) \sin v, r \sin \left(\frac{u}{r} \right) \right),$$

és a dir, les corbes $\varphi(u(t), v(t))$ que formen un angle constant θ amb els paral·lels $u = \text{constant}$. Podeu utilitzar que

$$\int \frac{du}{a + r \cos(\frac{u}{r})} = 2r \arctan \left((a - r) \tan \left(\frac{u}{2r} \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + K.$$

Solució: La mètrica del tor respecte d'aquesta parametrització és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a + r \cos \frac{u}{r})^2 \end{pmatrix}.$$

Busquem corbes $(u, v(u))$ tals que el seu vector tangent en cada punt $(u_0, v(u_0))$ formi angle constant amb el vector tangent a les corbes (u_0, v) en aquest punt. Com això ha de ser cert per a tot valor u_0 , traiem aquest subíndex i tenim,

$$\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a + r \cos \frac{u}{r})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a + r \cos \frac{u}{r})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a + r \cos \frac{u}{r})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v' \end{pmatrix}}} = \cos \theta.$$

És a dir

$$\frac{v'(a + r \cos \frac{u}{r})}{\sqrt{1 + v'^2(a + r \cos \frac{u}{r})^2}} = \cos \theta.$$

Que, elevant al quadrat i agrupant els termes en v'^2 , queda

$$v' = \cot \theta \frac{1}{a + r \cos \frac{u}{r}}$$

o bé

$$dv = \cot \theta \frac{du}{a + r \cos \frac{u}{r}}.$$

Integrant terme a terme i usant la indicació hem acabat.

- 180.** Comproveu que $\varphi(u, v) = (u \sin \alpha \cos v, u \sin \alpha \sin v, u \cos \alpha)$, on $u \in (0, \infty)$, $v \in (0, 2\pi)$ i $\alpha \in (0, \pi/2)$ és una constant, és una parametrització del con de revolució d'angle 2α . Proveu que la corba $t \rightarrow \varphi(c \exp(t \sin \alpha \cot \beta), t)$ amb c, β constants interseca les generatrius del con ($v = \text{constant}$) sota un angle constant igual a β .

Solució: Observem que $x^2 + y^2 = u^2 \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha z^2$. La matriu de la primera forma fonamental respecte d'aquesta parametrització és

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\frac{\begin{pmatrix} u' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} u' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ 1 \end{pmatrix}} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \cos \theta,$$

amb $u = c \exp(t \sin \alpha \cot \beta)$ i $u' = c \exp(t \sin \alpha \cot \beta) \sin \alpha \cot \beta = u \sin \alpha \cot \beta$.

És a dir

$$\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + u^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cot \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha \cot^2 \beta + \sin^2 \alpha}} = \cos \beta.$$

- 181.** Considerem la superfície de revolució S donada per l'equació $z = \cosh(\sqrt{x^2 + y^2})$.

- (a) Trobeu la longitud r de l'arc de meridià que va del punt $(0, 0, 1)$ al punt $(a, 0, \cosh(a))$.
 (b) Calculeu l'àrea A de la regió R de S donada per $z \leq \cosh(a)$ i expresseu-la en funció de r ($A = A(r)$).

- (c) Calculeu el cosinus de l'angle que forma el vector normal a S en el punt $(a, 0, \cosh(a))$ amb el vector $(0, 0, 1)$.
- (d) Trobeu l'àrea del casquet esfèric obtingut com la imatge de $R \subset S$ per l'aplicació de Gauss de S . Aquest casquet el denotarem $\nu(R)$ i la seva àrea per $A(\nu(R))$. (Podeu utilitzar que l'àrea d'un casquet esfèric d'amplitud $\theta \in [0, \pi]$, en una esfera de radi 1, és $2\pi(1 - \cos \theta)$.)
- (e) Calculeu la curvatura de Gauss K de S en el punt $(0, 0, 1)$ i comproveu que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} = \frac{\pi}{12} K.$$

(Podeu utilitzar que $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ i $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + O(x^3)$.)

- (f) Amb la mateixa notació que a l'apartat anterior, comproveu que

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A(\nu(R))}{A(r)}$$

Solució: a) Aquest meridià està parametritzat per $\gamma(x) = (x, 0, \cosh x)$, amb $0 \leq x \leq a$. Per tant

$$r = \int_0^a |\gamma'(x)| dx = \int_0^a \cosh x dx = \sinh a.$$

b) Parametritzem en polars $\varphi(\rho, \alpha) = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha, \cosh \rho)$. Així

$$\begin{aligned} \varphi_\rho &= (\cos \alpha, \sin \alpha, \sinh \rho) \\ \varphi_\alpha &= (-\rho \sin \alpha, \rho \cos \alpha, 0) \end{aligned}$$

I la primera forma fonamental

$$I = \begin{pmatrix} \cosh^2 \rho & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

L'àrea demanada és dons

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \cosh \rho d\rho d\alpha = 2\pi(a \sinh a - \cosh a + 1) = 2\pi(r \cdot \operatorname{argsinh} r - \sqrt{1 + r^2} + 1).$$

c) El normal en un punt de coordenades (ρ, α) és

$$\nu = (-\tanh \rho \cos \alpha, -\tanh \rho \sin \alpha, \frac{1}{\cosh \rho})$$

En el punt $\rho = a$ i $\alpha = 0$, el producte escalar de ν per $(0, 0, 1)$ és $1/\cosh a$, de manera que si diem θ a l'angle que formen en aquest punt aquests dos vectors tenim

$$\cos \theta = \frac{1}{\cosh a}.$$

d) Només hem d'aplicar la fórmula de l'àrea del casquet i tenir en compte l'apartat anterior.

$$A(\nu(R)) = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right).$$

e) Maple diu que la curvatura de Gauss K en un punt de coordenades (x, y) està donada per

$$K = \frac{\sinh\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(\cosh\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)^3}$$

Per tant, prenent límits quan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ tenim que, a l'origen, $K = 1$.

Per altra banda, desenvolupant fins quart ordre

$$A(r) = 2\pi\left(r - \frac{r^3}{6} + \dots\right) - \left(1 + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8} + \dots + 1\right) = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} + \dots$$

Ara el resultat és clar.

f)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{A(\nu(R))}{A(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right)}{\pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} + \dots} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi\left(1 + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8} + \dots - 1\right)}{\left(1 + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8} + \dots\right)\left(\pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} + \dots\right)} = 1$$

6.11 Àrea

182. El radi mitjà de la Terra és de 6.371 Km; la latitud de Barcelona és de $41^\circ 20' N$. Trobeu l'àrea d'un 'quadrat' d'un grau de latitud i un grau de longitud centrat a Barcelona. Feu el mateix amb Estocolm ($59^\circ 20' N$). A quina latitud el 'quadrat' té àrea 10.000 Km²?

Solució: Utilitzarem la parametrització de la esfera de radi $R = 6371$ mitjançant la longitud $\theta \in (-180^\circ, 180^\circ) = (-\pi, \pi)$ i la latitud $\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ja havíem calculat la primera forma fonamental: $E(\theta, \varphi) = R^2 \cos \varphi$, $F = 0$ i $G = R^2$, de manera que l'element d'àrea és $dA = R^2 \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$. Definim $Q(\theta_0, \varphi_0)$ com el 'quadrat' d'un grau de latitud i un grau de longitud centrat al punt de la terra amb coordenades (θ_0, φ_0) . L'àrea de $Q(\theta_0, \varphi_0)$ és igual a

$$\begin{aligned} A(Q(\theta_0, \varphi_0)) &= \int_{Q(\theta_0, \varphi_0)} dA = R^2 \int_{\varphi_0 - \frac{\pi}{360}}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{360}} \cos \varphi d\varphi \int_{\theta = \theta_0 - \frac{\pi}{360}}^{\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{360}} d\theta = R^2 \frac{\pi}{180} \sin \varphi \Big|_{\varphi_0 - \frac{\pi}{360}}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{360}} \\ &= \frac{\pi R^2}{180} \left(\sin \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{360} \right) - \sin \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{360} \right) \right) = \frac{\pi R^2}{180} 2 \cos \varphi_0 \sin \left(\frac{\pi}{360} \right) \\ &= \left(\frac{\pi R^2}{90} \sin \left(\frac{\pi}{360} \right) \right) \cos \varphi_0 \approx 12364.15 \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

que no depèn més que de la latitud φ_0 . Com Barcelona està situada a una latitud de $\varphi_0 = 41^\circ 20' = \frac{\pi}{180} 41.33 = 0.721345$ tenim que $A(Q_B) \approx 9284.47$ km². En canvi, la latitud d'Estocolm

és $\varphi_0 = 51^\circ 20' = \frac{\pi}{180} 59.33 = 1.0356$ i per tant, $A(Q_E) = 6306.24 \text{ km}^2$. D'altra banda, si $A(Q(\theta_0, \varphi_0)) = 10000$ llavors $\varphi_0 \approx 36^\circ 1' 20''$ que és la latitud aproximada de Ceuta, Tànger, San Francisco, Buenos Aires, Nicosia (Chipre) o Teherán. De fet, on l'àrea és màxima és a l'equador, on $A(Q(\theta_0, 0)) = 12364.15 \text{ km}^2$.

183. Considereu la banda de Möbius a $\mathbb{R}^3$ donada per

$$c(u, v) = (2 \cos u + v \sin(u/2) \cos u, 2 \sin u + v \sin(u/2) \sin u, v \cos(u/2)),$$

$u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 1]$. Calculeu l'àrea de M .

Solució: Tot i que M no és orientable traïem un segment i ja ho és. Si G és el tensor mètric a $\mathbb{R}^3$ fem c^*G i obtenim com a primera forma fonamental $E = 4 + 4 \sin((1/2)u) v - v^2 (\cos((1/2)u))^2 + (5/4)v^2$, $G = 1$ i $F = 0$. A partir d'aquí fem servir Maple.⁴

184. Volta de Viviani. Sigui S l'esfera de radi $2a$ centrada a l'origen (d'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$) i sigui $\bar{S}$ el cilindre d'equació $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

- Calculeu la primera forma fonamental de S i $\bar{S}$. (Per a l'esfera S utilitzeu la parametrització donada per la latitud $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i la longitud $\theta \in (-\pi, \pi)$).
- Parametritzeu la corba α obtinguda al fer la intersecció $S \cap \bar{S}$. (Recordeu que l'expressió en coordenades polars de la circumferència $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ és $r(\theta) = 2a \cos \theta$.)
- Calculeu l'angle que forma la corba α amb els paral·lels de l'esfera en funció de la latitud φ_0 del paral·lel $\{\varphi = \varphi_0\}$.
- Calculeu la seva longitud.
- Proveu que l'àrea de la *volta de Viviani*, que és la regió de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ delimitada pel cilindre $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ dins el *semiespai* superior $z \geq 0$, val $4a^2(\pi - 2)$.

Solució: a) Parametritzem l'esfera amb $x(\theta, \varphi) = (2a \cos \theta \cos \varphi, 2a \sin \theta \cos \varphi, 2a \sin \varphi)$ amb $\theta \in (-\pi, \pi)$ i $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. L'element d'àrea és doncs $dA = 4a^2 \cos \varphi d\theta d\varphi$.

b) Observem que la intersecció de la esfera amb el cilindre és una corba que en coordenades cilíndriques (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$ verifica que $r = 2a \cos \theta$ amb $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (per estar continguda al cilindre) i $r^2 + z^2 = 4a^2$ (per estar continguda a l'esfera), d'on $z = +\sqrt{4a^2 - 4a^2 \cos^2 \theta} = 2a|\sin \theta| = 2a \sin |\theta|$, és a dir, podem parametritzar la corba intersecció sobre la esfera mitjançant $\theta \mapsto x(\theta, |\theta|)$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

⁴Veureu que Maple té problemes. Independent d'això, la parametrització de la banda de Moebius donada aquí correspon a una superfície que NO té curvatura de gauss zero. Aquesta curvatura de gauss sí que la sap calcular el maple fàcilment. Sobre $v = 0$ val $-1/16$. Per tant, no es correspon amb la banda de Moebius que obtenim habitualment doblegant el paper, tal com va observar el gran Odí. La Flat Moebius band és la superfície de les normals principals de la corba $(\sin t, (1 - \cos t)^3, \sin t(1 - \cos t))$, vegeu *A pretender to the title 'canonical Moebius Strip'*, G. Schwarz, Pacific J.M., 143, 1990.

c) *Siguin*

$$x(\theta, \varphi) = (2a \cos \theta \cos \varphi, 2a \sin \theta \cos \varphi, 2a \sin \varphi),$$

$\alpha(\theta) = x(\theta, |\theta|)$ amb $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\beta_{\varphi_0}(\theta) = x(\theta, \varphi_0)$ parametritzacions de l'esfera, de la corba α , intersecció de S i $\bar{S}$, i del paral·lel de latitud φ_0 . Tenim que $\alpha' = x_\theta(\theta, |\theta|) \pm x_\varphi(\theta, |\theta|)$ i $\beta'_{\varphi_0} = x_\theta(\theta, \varphi_0)$. Si denotem per $a(\varphi_0)$ l'angle que formen aquests dos vectors tenim que

$$\begin{aligned} \cos a(\varphi_0) &= \frac{\langle x_\theta(\varphi_0, \varphi_0) \pm x_\varphi(\varphi_0, \varphi_0), x_\theta(\varphi_0, \varphi_0) \rangle}{\|x_\theta(\varphi_0, \varphi_0) \pm x_\varphi(\varphi_0, \varphi_0)\| \|x_\theta(\varphi_0, \varphi_0)\|} \\ &= \frac{4a^2 \cos^2 \varphi_0}{\sqrt{4a^2(1 + \cos^2 \varphi_0)}(2a \cos \varphi_0)} = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}} \end{aligned}$$

d)

e) La regió $V \subset (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sobre la qual cal integrar l'element d'àrea dA és

$$V = \{(\theta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \mid |\theta| \leq \varphi\}.$$

I així, l'àrea de la volta de Viviani és igual a

$$\begin{aligned} \int_V dA &= 4a^2 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\int_{\varphi=|\theta|}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) = 8a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin \varphi \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 8a^2 \left[\theta + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ &= 4a^2(\pi - 2) \end{aligned}$$

185. Tor de revolució. Considereu el tor amb la parametrització

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

a) Calculeu l'àrea del triangle $0 \leq u \leq v \leq 2\pi$.

b) Calculeu la curvatura normal de la corba $u = v$.

Solució:

(a)

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin v \sin u, r \cos u) \\ \varphi_v &= (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0) \\ E &= r^2 \\ F &= 0 \\ G &= (R + r \cos u)^2 \\ d\sigma &= r(R + r \cos u) du dv \text{ (Element d'àrea)} \\ \text{Area}(T) &= \int_0^{2\pi} \int_0^v r(R + r \cos u) du dv = \int_0^{2\pi} r(Ru + r \sin u \Big|_0^v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} (rRv + r^2 \sin v) dv = \left(rR \frac{v^2}{2} - r^2 \cos v \Big|_0^{2\pi} \right) = rR2\pi^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u) \\
\varphi_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0) \\
\varphi_{vv} &= -(R + r \cos u) \cos v, -(R + r \cos u) \sin v, 0) \\
\varphi_u \times \varphi_v &= (-r \cos u \cos v (R + r \cos u), -r \cos u \sin v (R + r \cos u), -r \sin u (R + r \cos u)) \\
\|\varphi_u \times \varphi_v\| &= r(R + r \cos u) \\
\nu &= (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \\
e &= r \\
f &= 0 \\
g &= \cos u (R + r \cos u)
\end{aligned}$$

Tenim $\alpha(t) = (t, t)$, $\alpha'(t) = (1, 1)$ i

$$k_n(\alpha) = \frac{II(\alpha'(t))}{\|\alpha'\|^2} = \frac{r + \cos t (R + r \cos t)}{r^2 + (R + r \cos t)^2}$$

186. La primera forma fonamental d'una superfície S parametritzada per $\varphi = \varphi(u, v)$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$$

on a és una constant positiva.

- Calculeu el perímetre del triangle curvilini determinat per les corbes $u = \pm \frac{1}{2}av^2$ i $v = 1$.
- Determineu els angles d'aquest triangle curvilini.
- Calculeu l'àrea del triangle determinat per les corbes $u = \pm av$ i $v = 1$.

Solució: a) Considerem el costat $u = \frac{1}{2}av^2$ com la imatge per φ de la corba $(\frac{1}{2}av^2, v)$. El vector tangent té components $(av, 1)$ respecte de la base (φ_u, φ_v) , i per tant la longitud de la corba entre $v = 0$ i $v = 1$ està donada per

$$\int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} av & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u(v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} av \\ 1 \end{pmatrix}} dv = a \int_0^1 \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) dv = \frac{7a}{6}.$$

Observis que hem restringit la mètrica als punts de la corba on estem multiplicant, per això hem canviat el terme $a^2 + u^2$ per $a^2 + \frac{1}{4}a^2v^4$. El mateix resultat obtindríem per a la corba $u = -\frac{1}{2}av^2$.

La corba $v = 1$ és la imatge per φ de la corba $(u, 1)$, amb $-\frac{1}{2}a < u < \frac{1}{2}a$. Per tant, la seva longitud val

$$\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} du = a.$$

El perímetre és doncs $10a/3$.

b) Els vèrtexs d'aquest triangle curvilini són els punts $A = (0, 0)$, $B = (\frac{1}{2}a, 1)$, $C = (-\frac{1}{2}a, 1)$. Els vectors tangents a les corbes que es tallen en A estan donats per $(\pm av, 1)$, que en A ($v = 0$) valen tots dos $(0, 1)$, per tant l'angle en el vèrtex A és zero.

Els vectors tangents que concorren en el punt B són $(1, 0)$ i $(a, 1)$. Per tant

$$\cos B = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5a^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}{|(1, 0)| |(a, 1)|} = \frac{a}{\sqrt{\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5a^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{2}{3}.$$

Els vectors tangents que concorren en el punt C són $(1, 0)$ i $(a, -1)$. Per tant

$$\cos C = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5a^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}}{|(1, 0)| |(a, -1)|} = \frac{a}{\sqrt{\begin{pmatrix} a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5a^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}}} = \frac{2}{3}.$$

c) L'element d'àrea és $dA = \sqrt{u^2 + a^2} du \wedge dv$.

Per tant,

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^1 \left(\int_{-av}^{av} \sqrt{u^2 + a^2} du \right) dv = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right]_{-av}^{av} dv \\ &= \int_0^1 a^2 v \sqrt{1 + v^2} dv + \frac{a^2}{2} \int_0^1 \ln(av + a \sqrt{1 + v^2}) dv - \frac{a^2}{2} \int_0^1 \ln(-av + a \sqrt{1 + v^2}) dv \\ &= a^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{2} \right) + \frac{a^2}{2} (1 - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) - \frac{a^2}{2} (1 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \\ &= \frac{a^2(2 - \sqrt{2})}{3}. \end{aligned}$$

187. Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ l'hiperboloide d'equació $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

a) Determineu l'àrea de la regió de S limitada pels paral·lels $z = z_0$ i $z = z_1$.

b) Calculeu la curvatura de Gauss de S .

Solució:

(a) Prenem la parametrització

$$\varphi(u, v) = (\cosh u, \cos v, \cosh u, \sin v, \sinh u)$$

Llavors

$$\varphi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$$

$$\varphi_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

$$E = \sinh^2 u + \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 u$$

L'element d'àrea és $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} = \cosh u \sqrt{1 + 2 \sinh^2 u}$ i per tant

$$\begin{aligned} \text{Area}(R) &= 2\pi \int_{\text{arcsinh} z_0}^{\text{arcsinh} z_1} \cosh u \sqrt{1 + 2 \sinh^2 u} du = 2\pi \left(1 + 2 \sinh^2 u\right)^{3/2} \frac{1}{6} \Big|_{\text{arcsinh} z_0}^{\text{arcsinh} z_1} \\ &= \frac{\pi}{3} \left((1 + 2z_1^2)^{3/2} - (1 + 2z_0^2)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

(b)

$$\varphi_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$$

$$\varphi_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$

$$\varphi_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-\cosh^2 u \cos v, -\cosh^2 u \sin v, \sinh u \cosh u)$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \cosh u \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\cosh 2u}} (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u)$$

$$e = \langle \nu, \varphi_{uu} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{\cosh 2u}}$$

$$f = \langle \nu, \varphi_{uv} \rangle = 0$$

$$g = \langle \nu, \varphi_{vv} \rangle = \frac{\cosh^2 u}{\sqrt{\cosh 2u}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{\cosh^2 2u}$$

188. Donat un número real α , considerem el conjunt

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < z < 0, x^2 + y^2 \leq (-z)^{2\alpha}\}.$$

Comproveu que, quan $\alpha \in (-1/2, 0)$, el volum de D és finit però l'àrea de ∂D és infinita. (Amb un volum finit de pintura podem pintar una superfície d'àrea infinita!).

189. * Superfícies tubulars. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular parametritzada per l'arc i amb curvatura mai nul·la. Sigui Π_u el pla normal a la corba en el punt $\alpha(u)$. Sobre Π_u considerem una circumferència C_u de centre $\alpha(u)$ i radi $r(u)$. La reunió $S = \cup_{u \in I} C_u$ d'aquestes circumferències s'anomena *superfície tubular* o *tub* al voltant de la corba $\alpha(u)$ amb radi (variable) $r(u)$. Moltes vegades es pren $r(u)$ constant r_0 i es parla del tub de radi r_0 .

a) Proveu que

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + r(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u))$$

‘parametriza’ S , on $N(u)$ i $B(u)$ denoten els vectors normal principal i binormal de la corba α .

b) Proveu que si $0 < r(u) < 1/k(u)$, on $k(u)$ és la curvatura de α , aleshores $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$.

c) Trobeu la primera forma fonamental associada a aquesta parametrització.

d) Demostreu que l'àrea de S no depèn de la torsió de α .

e) Trobeu les línies de curvatura si r és constant i la corba α és plana.

f) Particularitzeu els resultats anteriors al cas del tor.

Solució:

(a) Com que $N(u)$ i $B(u)$ constitueixen una base ortonormal del pla Π_u aleshores tenim que per tot $u \in I$ la corba $v \mapsto \alpha(u) + r(u) \cos v N(u) + r(u) \sin v B(u)$ parametriza la circumferència C_u de centre $\alpha(u)$ i radi $r(u)$ sobre el pla Π_u , i per tant, φ parametriza S .

(b) i (c) Calculem els vectors tangents utilitzant les fórmules de Frenet de la corba α :

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= \alpha'(u) + r'(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u)) + r(u)(\cos v N'(u) + \sin v B'(u)) \\ &= (1 - k(u)r(u) \cos v)T(u) + (r'(u) \cos v + r(u)\tau(u) \sin v)N(u) \\ &\quad + (r'(u) \sin v - r(u)\tau(u) \cos v)B(u) \\ \varphi_v(u, v) &= -r(u) \sin v N(u) + r(u) \cos v B(u)\end{aligned}$$

i la primera forma fonamental ve donada per

$$\begin{aligned}E(u, v) &= (1 - k(u)r(u) \cos v)^2 + r'(u)^2 + r(u)^2 \tau(u)^2 \\ F(u, v) &= -r(u)^2 \tau(u) \\ G(u, v) &= r(u)^2\end{aligned}$$

de manera que el seu determinant és igual a

$$EG - F^2 = ((1 - k(u)r(u) \cos v)^2 + r'(u)^2)r(u)^2$$

Recordem que φ és immersió si i només si $d\varphi$ és injectiva si i només si els vectors φ_u i φ_v són linealment independents, si i només si $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$, si i només si $EG - F^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 \neq 0$. Així, la nostra parametrització φ és una immersió si i només si $r(u) \neq 0$ i o bé $1 - k(u)r(u) \cos v \neq 0$ o bé $r'(u) \neq 0$, per tot $(u, v) \in I \times (0, 2\pi)$. Observem que la condició $1 - k(u)r(u) \cos v \neq 0$ es satisfà sempre que $0 < r(u) < \frac{1}{k(u)}$.

(d) Observem també que l'element d'àrea $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ no depèn de la torsió τ de la corba α .

- (e) Les línies de curvatura són corbes $\beta(t)$ sobre la superfície de manera que per tot t el vector tangent $\beta'(t)$ és un vector propi de l'aplicació de Weingarten $W = -d\nu$. Suposem que $r(u)$ és constant i α és plana (i.e. $\tau(u) \equiv 0$) i calculem en aquest cas

$$\begin{aligned}\varphi_u \times \varphi_v &= \begin{vmatrix} T(u) & N(u) & B(u) \\ 1 - k(u)r(u) \cos v & 0 & 0 \\ 0 & -r(u) \sin v & r(u) \cos v \end{vmatrix} \\ &= -(1 - k(u)r(u) \cos v)(r(u) \cos v N(u) + r(u) \sin v B(u)),\end{aligned}$$

llavors el vector normal de la superfície S és igual a

$$\nu(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = -\cos v N(u) - \sin v B(u).$$

Si derivem $\nu(u, v)$ respecte u i v obtenim

$$\begin{aligned}d\nu(\varphi_u)(u, v) &= \frac{\partial \nu(u, v)}{\partial u} = -\cos v N'(u) = -\cos v k(u) T(u) \parallel \varphi_u(u, v) \\ d\nu(\varphi_v)(u, v) &= \frac{\partial \nu(u, v)}{\partial v} = \sin v N(u) - \cos v B(u) \parallel \varphi_v(u, v)\end{aligned}$$

Per tant, les línies de curvatura són en aquest cas les línies coordenades.

- (f) Sigui $\alpha(u) = (a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, 0)$, llavors $N(u) = (-\cos \frac{u}{a}, -\sin \frac{u}{a}, 0)$ i $B(u) = (0, 0, 1)$. La condició de regularitat és $b \equiv r(u) < \frac{1}{k(u)} = \frac{1}{1/a} = a$ i la parametrització és

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, 0) + b(\cos v(-\cos \frac{u}{a}, -\sin \frac{u}{a}, 0) + \sin v(0, 0, 1)) \\ &= ((a - b \cos v) \cos \frac{u}{a}, (a - b \cos v) \sin \frac{u}{a}, b \sin v).\end{aligned}$$

La primera forma fonamental s'escriu com

$$\begin{pmatrix} (1 - \frac{b}{a} \cos v)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

i l'àrea, com ja havíem vist, és

$$\int_0^{2\pi a} du \int_0^{2\pi} dv (1 - \frac{b}{a} \cos v) b = 4\pi^2 ab.$$

Finalment, les línies de curvatura del tor són les seves línies coordenades, és a dir, els paral·lels i els meridians.

190. Superfícies paral·leles o semitubs. Donada una parametrització $\varphi(u, v)$, d'una superfície S , es defineix la superfície paral·lela o semitub a distància t , S_t , com la superfície donada per

$$\varphi^t(u, v) = \varphi(u, v) + t\nu(u, v),$$

on $\nu = \nu(u, v)$ és el vector normal unitari de S (escollim un dels dos).

- a) Trobeu, respecte de les coordenades u, v , l'expressió de l'element d'àrea de S_t .
 b) Proveu que la curvatura de Gauss $K^t = K^t(u, v)$ està donada per

$$K^t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2},$$

on $K = K(u, v)$ i $H = H(u, v)$ són les curvatures de Gauss i mitjana de la superfície inicial en el punt corresponent.

- c) Proveu que la curvatura mitjana $H^t = H^t(u, v)$ de S_t està donada per

$$H^t = \frac{H - Kt}{1 - 2Ht + Kt^2},$$

Solució: a) Mirem la relació entre els espais tangents a les dues superfícies.

$$\begin{aligned}\varphi_u^t &= \varphi_u + t\nu_u \\ \varphi_v^t &= \varphi_v + t\nu_v\end{aligned}$$

Si escrivim, com és habitual,

$$\begin{aligned}\nu_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v \\ \nu_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v\end{aligned}$$

obtenim

$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \nu_v &= a_{22}\varphi_u \wedge \varphi_v \\ \nu_u \wedge \varphi_v &= a_{11}\varphi_u \wedge \varphi_v \\ \nu_u \wedge \nu_v &= K\varphi_u \wedge \varphi_v\end{aligned}$$

Simplement substituint tenim

$$\varphi_u^t \wedge \varphi_v^t = (1 - 2Ht + Kt^2)\varphi_u \wedge \varphi_v.$$

En particular

$$\nu^t(\varphi^t(u, v)) = \nu(\varphi(u, v)).$$

L'element d'àrea està donat doncs per

$$dS^t = |\varphi_u^t \wedge \varphi_v^t| = |(1 - 2Ht + Kt^2)| \cdot |\varphi_u \wedge \varphi_v| = |(1 - 2Ht + Kt^2)|dS.$$

- b) Per mirar la relació entre les curvatures de Gauss, observem que es compleix

$$\nu_u^t \wedge \nu_v^t = K^t \varphi_u^t \wedge \varphi_v^t$$

ja que aquesta relació és certa per a qualsevol superfície. Així doncs

$$K\varphi_u \wedge \varphi_v = \nu_u \wedge \nu_v = \nu_u^t \wedge \nu_v^t = K^t \varphi_u^t \wedge \varphi_v^t = K^t(1 - 2Ht + Kt^2)\varphi_u \wedge \varphi_v.$$

Per tant,

$$K^t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2},$$

com volíem.

b) Com que $\nu^t(u, v) = \nu(u, v)$ tenim

$$\begin{aligned}\nu_u &= a_{11}\varphi_u + a_{12}\varphi_v = b_{11}\varphi_u^t + b_{12}\varphi_v^t \\ \nu_v &= a_{21}\varphi_u + a_{22}\varphi_v = b_{21}\varphi_u^t + b_{22}\varphi_v^t\end{aligned}$$

També

$$\begin{aligned}\varphi_u^t \wedge \nu_v^t &= \varphi_u \wedge \nu_v + t\nu_u \wedge \nu_v = (a_{22} + tK)\varphi_u \wedge \varphi_v = b_{22}\varphi_u^t \wedge \varphi_v^t \\ \nu_u^t \wedge \varphi_v^t &= \nu_u \wedge \varphi_v + t\nu_u \wedge \nu_v = (a_{11} + tK)\varphi_u \wedge \varphi_v = b_{11}\varphi_u^t \wedge \varphi_v^t\end{aligned}$$

Sumant i igualant el coeficient de $\varphi_u \wedge \varphi_v$ tenim

$$-2H + 2tK = -2H^t(1 - 2Ht + Kt^2)$$

i per tant

$$H^t = \frac{-H + tK}{1 - 2Ht + Kt^2}$$

Si canviem ν per $-\nu$ tenim

$$K^t = \frac{K}{1 + 2Ht + Kt^2} \quad H^t = \frac{H + tK}{1 + 2Ht + Kt^2}$$

Penseu el paral·lel interior i exterior a una esfera.

- 191.** Sigui S una superfície amb curvatura mitjana constant $c \neq 0$. Demostreu que la superfície tubular a distància $\frac{1}{2c}$ té curvatura de Gauss constant $K = 4c^2$.

Solució: Vegeu problema 190.

- 192.** Sigui S una superfície amb curvatura de Gauss constant $a^2 \neq 0$. Demostreu que la superfície tubular a distància $\frac{1}{a}$ té curvatura mitjana constant $H = \frac{a}{2}$.

Solució: Vegeu problema 190.

6.12 Geodèsiques

193. * Sigui S la superfície de revolució parametritzada per

$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$

amb $a(u) > 0$ i $(a')^2 + (b')^2 = 1$.

- Calculeu els símbols de Christoffel i les equacions de les geodèsiques de S .
- Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució són geodèsiques.
- Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.
- Demostreu el **Teorema de Clairaut**: Si $\alpha(s)$ és una geodèsica (parametritzada) de S i $\theta(s)$ és l'angle que forma α amb el paral·lel per $\alpha(s)$, aleshores el producte de la distància de $\alpha(s)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(s)$ és constant al llarg de la corba α .
- Trobeu la curvatura geodèsica dels paral·lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$.

Solució: Utilitzarem els càlculs fets al problema 121.

- (a) Com que $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ i $G(u, v) = a(u)^2$, els símbols de Christoffel són els següents (veure el problema 162):

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{12}^2 = \frac{a'(u)}{a(u)} \\ \Gamma_{22}^1 = -a(u)a'(u) & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}$$

$I \alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ és una geodèsica (parametritzada) de S si i només si es satisfan les següents equacions:

$$\begin{aligned} u''(s) - a(u(s))a'(u(s))v'(s)^2 &= 0 \\ v''(s) + 2\frac{a'(u(s))}{a(u(s))}u'(s)v'(s) &= 0 \end{aligned}$$

- Les funcions $u(s) = s$, $v(s) = v_0$ verifiquen les equacions anteriors i la corba $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ és un meridià de S .
- Els paral·lels parametritzats a velocitat constant s'obtenen prenent $u(s) = u_0$ i $v(s) = s$. Aquest parell de funcions verifiquen les equacions de les geodèsiques si i només si $a'(u_0) = 0$, o equivalentment si la recta tangent a un meridià que passi per aquest paral·lel és vertical (paral·lela a l'eix de gir). En el cas de la esfera, de tots els paral·lels només l'equador és geodèsica (cercle màxim). En el cas del tor, hi ha dos equadors, l'interior i l'exterior.

(d) Si escrivim la segona equació de les geodèsiques com

$$\frac{v''(s)}{v'(s)} + 2 \frac{a'(u(s))u'(s)}{a(u(s))} = 0$$

i integrem respecte a s obtenim la relació

$$\log v'(s) + 2 \log a(u(s)) = \log(v'(s)a(u(s))^2) = \text{const.}$$

Sigui $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una geodèsica parametritzada per l'arc i sigui $\theta(s)$ l'angle que forma α amb el paral·lel que passa per $\alpha(s)$. Llavors el cosinus de $\theta(s)$ és igual a

$$\cos \theta(s) = \frac{\langle \varphi_v, u'(s)\varphi_u + v'(s)\varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\| \|\alpha'\|} = v'(s)a(u(s))$$

Per tant, $a(u(s)) \cos \theta(s) = v'(s)a(u(s))^2$ és constant.

(e) Sigui $\alpha_{u_0}(s) = \varphi(u_0, \frac{s}{a(u_0)})$ amb $s \in [0, 2\pi a(u_0)]$ una parametrització per l'arc del paral·lel que passa per $\varphi(u_0, 0)$. Recordem la fórmula $\frac{1}{a(u_0)^2} = k_\alpha^2 = k_n^2 + k_g^2$. D'altra banda, la curvatura normal de $\alpha(s)$ és igual a $II(\frac{1}{a(u_0)}\varphi_v) = \frac{1}{a(u_0)^2} \langle -d\nu(\varphi_v), \varphi_v \rangle = \frac{g(u_0, \frac{s}{a(u_0)})}{a(u_0)^2}$, on $g(u, v)$ denota l'últim coeficient de la segona forma fonamental de S que ja havíem calculat al problema 0. Així teníem que $g(u, v) = b'(u)a(u)$ i per tant

$$|k_g(\alpha_{u_0})| = \sqrt{\frac{1}{a(u_0)^2} - \left(\frac{b'(u_0)}{a(u_0)}\right)^2} = \frac{|a'(u_0)|}{a(u_0)}.$$

Per determinar el signe hem de tenir en compte que $\bar{\nabla}_T T = k_g N_g$ on N_g és un vector tangent a S unitari de manera que T, N_g i ν formen una base ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$. Per exemple, si el vector normal $\nu = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ apunta cap en fora (en sentit contrari cap a on es troba l'eix de gir de S) i estem en un punt on $a'(u_0) > 0$ (la corba generatriu es recorre de dalt a baix per què el vector ν sigui exterior) aleshores podem veure que $k_g > 0$ i per tant $k_g(\alpha_{u_0}) = \frac{a'(u_0)}{a(u_0)}$. També podríem haver arribat al mateix resultat calculant

$$\alpha''_{u_0}(s) = \bar{\nabla}_T T = x\varphi_u + y\varphi_v + z\nu = -\frac{1}{a(u_0)} \left(\cos\left(\frac{s}{a(u_0)}\right), \sin\left(\frac{s}{a(u_0)}\right), 0 \right)$$

i utilitzar que $T = \frac{1}{a(u_0)}\varphi_v$, $-\varphi_u$ i ν formen una base ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$ per deduir que $y = \langle \alpha''_{u_0}(s), \varphi_v \rangle = 0$ i per tant

$$k_g(\alpha_{u_0}) = \langle \alpha''_{u_0}(s), -\varphi_u \rangle = \frac{a'(u_0)}{a(u_0)}.$$

- a) Suposem que dues superfícies són tangents al llarg d'una certa corba C . Demostreu que si C és geodèsica en una de les dues superfícies també ho és a l'altra.
- b) Demostreu que tota corba $\alpha(s)$ de $\mathbb{R}^3$ és geodèsica d'alguna superfície. (Indicació: Considereu la superfície reglada $\varphi(s, t) = \alpha(s) + tB(s)$ on $B(s)$ és el vector binormal de la corba.)
- c) Descriviu un mètode per determinar les geodèsiques d'una superfície per medi d'una banda adhesiva (cel·lo).

Solució:

- (a) Si dos superfícies S i S' són tangents al llarg d'una corba C aleshores els vectors normals de S i S' restringits a C són paral·lels. Si C és la traça d'una geodèsica a S llavors el vector normal principal N de C és paral·lel al vector normal ν de S i per tant al vector normal ν' de S' , amb la qual cosa C és també una geodèsica de S' .
- (b) Sigui S la superfície definida per $\varphi(s, t) = \alpha(s) + tB(s)$ a partir d'una corba $\alpha(s)$ parametritzada per l'arc i del seu vector binormal $B(s)$. Calculem els vectors tangents

$$\begin{aligned}\varphi_s(s, t) &= T(s) + tB'(s) = T(s) + t\tau(s)N(s) \\ \varphi_t(s, t) &= B(s)\end{aligned}$$

de manera que el vector normal $\nu(s, t)$ és paral·lel a

$$\varphi_s \times \varphi_t = -N(s) + t\tau(s)T(s).$$

La restricció de ν a la corba α s'obté posant $t = 0$, així $\nu|_{\alpha} = -N(s)$ i per tant α és geodèsica de la superfície S .

- (c) Considerem S' una superfície qualsevol i estenem una banda de cel·lo S sobre la superfície S' de manera que sigui tangent sobre la corba central C de S . Com que la banda de cel·lo només es pot deformar en la direcció longitudinal tenim que S és una superfície reglada del tipus descrit a l'apartat anterior (podem pensar que és un tros de cilindre, la corba central un paral·lel del cilindre, i així la binormal és l'eix del cilindre), per tant C és una geodèsica de S i per l'apartat (a) també ho és de S' .

195. Sigui $\alpha(t)$ ($t \in I$) una corba regular i $S = \cup_{t \in I} C_t$ la *superfície tubular* al voltant de $\alpha(t)$ i radi (variable) $r(t)$, i.e. C_t és una circumferència de radi $r(t)$ continguda al pla normal de α en el punt $\alpha(t)$, vegeu el problema **189**. Proveu que C_t és geodèsica de S si i només si $r'(t) = 0$. En particular, en un tub de radi constant totes les circumferències C_t són geodèsiques.

Solució: Prenem la parametrització de S del problema **189**.

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + r(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u))$$

utilitzant el paràmetre arc u de la corba α . Aleshores

$$\begin{aligned}
 \varphi_u(u, v) &= \alpha'(u) + r'(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u)) + r(u)(\cos v N'(u) + \sin v B'(u)) \\
 &= \left(1 - k(u)r(u)\cos v\right)T(u) + \left(r'(u)\cos v + r(u)\tau(u)\sin v\right)N(u) \\
 &\quad + \left(r'(u)\sin v - r(u)\tau(u)\cos v\right)B(u) \\
 \varphi_v(u, v) &= -r(u)\sin v N(u) + r(u)\cos v B(u) \\
 \varphi_u \times \varphi_v &= \begin{vmatrix} T(u) & N(u) & B(u) \\ 1 - k(u)r(u)\cos v & r'(u)\cos v + \tau(u)\sin v & r'(u)\sin v - r(u)\tau(u)\cos v \\ 0 & -r(u)\sin v & r(u)\cos v \end{vmatrix} \\
 &= r(u)r'(u)T(u) - (1 - k(u)r(u)\cos v)r(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u))
 \end{aligned}$$

Com que el vector normal de C_u és paral·lel a $\varphi_{vv} = -r(u)(\cos v N(u) + \sin v B(u))$ i $r(u) > 0$, veiem que C_u és geodèsica de S si i només si $r'(u) = 0$.

196. Sigui P un punt d'una superfície S . Sigui σ una geodèsica per P . Prenem, en un entorn de P , coordenades u, v , on u indica la longitud mesurada a partir de P sobre σ i v indica la longitud mesurada sobre la geodèsica ortogonal a σ que passa per $(u, 0)$.

Proveu que

1. Les línies $u = \text{constant}$ són perpendiculars a les línies $v = \text{constant}$.
2. La mètrica, en aquestes coordenades, s'expressa com

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + dv^2,$$

$$\text{amb } \frac{\partial E(u, 0)}{\partial v} = 0, \text{ i } E(u, 0) = 1$$

3. $(\sqrt{E})_{uu} + K\sqrt{E} = 0$, on K és la curvatura de Gauss. $(E_{uu} = \frac{\partial^2 E(u, v)}{\partial u^2})$.

Solució: 1) Denotarem $\varphi(u, v)$ aquesta parametrització. Concretament tindrem

- a) $\varphi(u, 0)$ és una geodèsica parametritzada per l'arc. $P = \varphi(0, 0)$.
- b) Per a cada $u = u_0$ fixat, $\varphi(u_0, v)$ és la geodèsica ortogonal a la geodèsica $\varphi(u, 0)$ en el punt $\varphi(u_0, 0)$. Podem suposar que v és el paràmetre arc de totes aquestes geodèsiques. Tindrem doncs

$$\left| \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right| = 1, \quad (6.2)$$

i

$$\frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0. \quad (6.3)$$

Considerem la funció

$$F(u, v) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v},$$

terme (1, 2) de la primera forma fonamental.

Observem que per valorar aquesta funció en un punt primer hem de derivar i després substituir, és a dir,

$$F(a, b) = \left. \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \right|_{u=a, v=b} \cdot \left. \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right|_{u=a, v=b}$$

En particular

$$F(u, 0) = \frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} \cdot \left. \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = 0. \quad (6.4)$$

Derivant F respecte de v tenim:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \quad (6.5)$$

Com que, per (6.2),

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 1$$

tenim que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0$$

i per tant

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

és a dir, el primer sumand del terme de la dreta de (6.5) s'anul·la.

Ara observem que, per la primera fórmula de Frenet,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

té la direcció del vector normal a la corba de $\mathbb{R}^3$ $\varphi(u, v)$ (u fixat), però justament la definició de geodèsica és que aquest vector normal coincideixi amb el vector normal a la superfície en cada punt. Per tant,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0,$$

i hem provat doncs, substituint a (6.5), que

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Això implica, juntament amb (6.4), que $F(u, v) = 0$ per tot v , és a dir, que les corbes $v = \text{constant}$ tallen ortogonalment les corbes $u = \text{constant}$.

2) Per estudiar la mètrica observem que acabem de veure $F = 0$ i $G = 1$. Per definició tenim

$$E(u, v) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u},$$

per tant

$$E(u, 0) = \frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} = 1,$$

ja que és la norma al quadrat del vector tangent a la geodèsica $\sigma(u) = \varphi(u, 0)$ donada.

Derivant,

$$\frac{\partial E(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v=0} \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} = 2 \frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{v=0} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0},$$

però, derivant (6.3) tenim,

$$\frac{\partial^2 \varphi(u, 0)}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} + \frac{\partial \varphi(u, 0)}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} \right) = 0.$$

El primer terme del sumand és zero pel mateix argument sobre la primera fórmula de Frenet i la coincidència de les normals usat anteriorment. El segon, per Schwartz, s'escriu com

$$\frac{\partial^2 \varphi(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{v=0} \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0},$$

que coincideix, llevat del factor 2, amb la derivada parcial de E respecte de v en $v = 0$, per tant

$$\frac{\partial E(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = 0,$$

com volíem demostrar.

Observeu que hem anat utilitzant que per a funcions de dues variables $h(u, v)$ es compleix

$$\frac{\partial h(u, v)}{\partial u} \Big|_{v=0} = \frac{\partial h(u, 0)}{\partial u}.$$

3) Finalment, per calcular la curvatura recordem la fórmula de Gauss

$$\begin{aligned} 4(EG - FF)^2 k = & E \left(\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} - 2 \frac{dF}{dp} \frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp} \right)^2 \right) \\ & + F \left(\frac{dE}{dp} \frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq} \frac{dG}{dp} - 2 \frac{dE}{dq} \frac{dF}{dq} + 4 \frac{dF}{dp} \frac{dF}{dq} - 2 \frac{dF}{dp} \frac{dG}{dp} \right) \\ & + G \left(\frac{dE}{dp} \frac{dG}{dp} - 2 \frac{dE}{dp} \frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq} \right)^2 \right) \\ & - 2(EG - FF) \left(\frac{ddE}{dq^2} - 2 \frac{ddF}{dp \cdot dq} + \frac{ddG}{dp^2} \right). \end{aligned}$$

Posant $F = 0$ i $G = 1$ obtenim

$$4E^2K = E_u^2 - 2EE_{uu}$$

que es pot escriure com

$$K = -\frac{(\sqrt{E})_{uu}}{\sqrt{E}}$$

197. Sigui $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$, corba regular plana parametritzada per l'arc i $\vec{w}$ un vector unitari perpendicular al pla que conté la corba.

Sigui $U = I \times \mathbb{R}$. Considerem l'aplicació $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ donada per

$$\varphi(u, v) = \cosh(v)\alpha(u) + \sinh(v)\vec{w}.$$

1. Proveu que $\varphi : U \rightarrow S$ defineix una parametrització regular de $S \subset \mathbb{R}^3$.
2. Trobeu la primera forma fonamental de S i l'angle que formen les línies coordenades. Per a quines corbes α totes les línies coordenades de la superfície S són ortogonals?
3. Trobeu el vector normal a S al llarg de α en termes del vector tangent a la corba α i del vector unitari $\vec{w}$.
4. Proveu que α és una geodèsica de S .
5. És α una línia de curvatura de S ?
6. Si α parametritza una circumferència, quina és la superfície que estem considerant?

Solució: 1) Observem que

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \cosh v \alpha'(u) \\ \varphi_v &= \sinh v \alpha(u) + \cosh v \vec{w} \\ \varphi_u \wedge \varphi_v &= \cosh v \sinh v \vec{w} + \cosh^2 v (\alpha'(u) \wedge \vec{w})\end{aligned}$$

i aquest darrer vector no s'anul·la mai, cosa equivalent a dir que la diferencial de $\varphi(u, v)$ té rang dos en tot punt.

2) La primera forma fonamental és

$$\begin{pmatrix} \cosh^2 v & \cosh v \sinh v \alpha(u) \cdot \alpha'(u) \\ \cosh v \sinh v \alpha(u) \cdot \alpha'(u) & \sinh^2 v \alpha(u) \cdot \alpha(u) + \cosh^2 v \end{pmatrix}$$

Per tant, l'angle entre les corbes coordenades està donat per

$$\cos \theta = \frac{F}{|\varphi_u||\varphi_v|} = \frac{\sinh v \alpha(u) \cdot \alpha'(u)}{\sqrt{\sinh^2 v \alpha(u) \cdot \alpha(u) + \cosh^2 v}}.$$

Per tant, les línies coordenades són ortogonals per a aquelles corbes $\alpha(u)$ tals que $\alpha(u) \cdot \alpha'(u) = 0$. És a dir, $\alpha(u) \cdot \alpha'(u) = R^2$, per a una certa constant R . Per tant, $\alpha(u)$ està continguda en una circumferència de centre l'origen i radi R .

3) Observem que $\alpha(u)$ està donada, com corba de S , per la condició $v = 0$. En particular,

$$\varphi_u \wedge \varphi_u \Big|_{v=0} = \alpha'(u) \wedge \vec{w} = \pm n(u)$$

on $n(u)$ és el vector normal principal de la corba. Recordem que com que la corba és plana, el pla que la conté és el seu pla osculador.

4) El càlcul anterior demostra que $\alpha(u)$ és geodèsica.

5) Apliquem Olinde. És a dir, derivem la normal al llarg de $\alpha(u)$ per veure si surt un múltiple de $\alpha'(u)$.

$$d\nu(\alpha'(u)) = \frac{d\nu(u, 0)}{du} = \frac{dn(u)}{du} = -k(u)\alpha'(u),$$

on $k(u)$ és la curvatura de $\alpha(u)$. Per tant, efectivament, $\alpha(u)$ és línia de curvatura.

També haguéssim pogut verificar directament si $\alpha(u)$ compleix l'equació de les línies de curvatura (recordem que en coordenades $\alpha(u)$ és $(u, 0)$):

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ e & f & g \end{vmatrix} = f$$

però $f(u, 0) = 0$, ja que

$$\varphi_{uv} = \sinh v \alpha'(u)$$

i per tant

$$\varphi_{uv}(u, 0) = 0.$$

Capítol 7

Formes

198. Propietats elementals del producte exterior.

- a) Demostreu que el producte exterior de tensors alternats (aplicacions multilineals alternades) és distributiu respecte de la suma, és a dir,

$$T \wedge (S_1 + S_2) = T \wedge S_1 + T \wedge S_2$$

i també

$$(T_1 + T_2) \wedge S = T_1 \wedge S + T_2 \wedge S$$

- b) Demostreu que el producte exterior de tensors alternats és distributiu respecte del producte per escalars, és a dir,

$$T \wedge (\lambda \cdot S) = \lambda \cdot (T \wedge S) = (\lambda \cdot T) \wedge S$$

Solució: a) Suposem T d'ordre k i S_1, S_2 d'ordre q .

$$T \wedge (S_1 + S_2)(u_1, \dots, u_{k+q}) = \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} \epsilon(\sigma) T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) (S_1 + S_2)(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+q)})$$

però

$$(S_1 + S_2)(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+q)}) = S_1(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+q)}) + S_2(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+q)}),$$

que substituint a l'anterior igualtat dóna el resultat.

b)

$$T \wedge (\lambda S)(u_1, \dots, u_{k+q}) = \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} \epsilon(\sigma) T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) (\lambda S)(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+q)})$$

ara λ surt factor comú i tenim el resultat.

199. Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació lineal. Considerem l'aplicació

$$f^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

donada per $f^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k))$, per a tot $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

- a) Proveu que f^* està ben definida, és a dir, si $T \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$, aleshores $f^*(T)$ és realment un element de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$
- b) Proveu que f^* és lineal, és a dir, que es satisfan $f^*(T + S) = f^*(T) + f^*(S)$ i $f^*(\lambda \cdot T) = \lambda \cdot f^*(T)$
- c) Sigui $T \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ i $S \in \Lambda^q(\mathbb{R}^m)$. Demostreu que aleshores

$$f^*(T \wedge S) = f^*(T) \wedge f^*(S)$$

Solució: a) Hem de veure que, per a tota permutació σ tenim

$$f^*(T)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) f^*(T)(v_1, \dots, v_k).$$

Però

$$f^*(T)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = T(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) = \epsilon(\sigma) T(f(v_1), \dots, f(v_k)) = \epsilon(\sigma) f^*(T)(v_1, \dots, v_k).$$

b) Evident.

c)

$$\begin{aligned} f^*(T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+q}) &= (T \wedge S)(f(v_1), \dots, f(v_{k+q})) \\ &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} \epsilon(\sigma) T(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(k)})) S(f(v_{\sigma(k+1)}), \dots, f(v_{\sigma(k+q)})) \\ &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} \epsilon(\sigma) f^*T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f^*S(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &= f^*T \wedge f^*S(v_1, \dots, v_{k+q}) \end{aligned}$$

200. Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ un endomorfisme de $\mathbb{R}^n$, i $T \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

- a) Demostreu que existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_1, \dots, v_n) = \alpha \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$ per a tot $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.
- b) Deduiu que $f^*(T) = \det(f) \cdot T$.

Solució: a) Per determinant de n vectors s'enten el determinant de la matriu de les components d'aquests vectors respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Si denotem $(e_1, \dots, e_n)$ aquesta base tenim $v_i = a_i^j e_j$ amb el criteri de sumació estàndard. Llavors

$$T(v_1, \dots, v_n) = T(a_1^j e_j, \dots, a_n^j e_j)$$

Per ser T multilinear alternat els coeficients surten fora i

$$T(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) T(e_1, \dots, e_n).$$

Observem que només apareixen els termes $T(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ ja que si dos dels superíndexs j són iguals el valor de T és zero.

Així

$$T(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \alpha = \alpha \cdot \det(v_1, \dots, v_n),$$

amb $\alpha = T(e_1, \dots, e_n)$, com volíem.

b) És suficient veure que coincideixen sobre la base canònica.

Però

$$f^*(T)(e_1, \dots, e_n) = T(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \alpha \cdot \det f.$$

(La darrera igualtat és conseqüència de l'aparat a)).

- 201.** Sigui $e_1, \dots, e_4$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$, i $\omega_1, \dots, \omega_4$ la seva base dual. Demostreu que no existeixen $T, S \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ tals que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4 = S \wedge T$$

Solució: Elevem al quadrat tenint en compte que per a tota 1-forma ω es compleix $\omega \wedge \omega = 0$. Ens quedarà

$$2\eta = S \wedge T \wedge S \wedge T$$

on $\eta = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$ és l'element de volum de $\mathbb{R}^4$. Però com que $S \wedge T = -T \wedge S$, el terme de la dreta és zero, contradicció.

- 202.** Proveu que si T és un producte interior a V (bilineal, simètric, definit positiu), existeix una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ lineal bijectiva tal que $f^*T = \langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producte escalar ordinari.

Solució: És ben sabut, vegeu per exemple, Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics, que tota aplicació bilineal simètrica diagonalitza. Si estem en $\mathbb{R}$ -espais vectorials i l'aplicació és definida positiva, podem suposar que tots els termes de la diagonal són iguals a 1. Diem $(u_1, \dots, u_n)$ la base on la matriu de T és la identitat, i definim f per $f(e_i) = u_i$, on $(e_1, \dots, e_n)$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$.

Llavors $f^*T(e_i, e_j) = T(f(e_i), f(e_j)) = T(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, és a dir, $f^*T = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

- 203.** Vegeu que $\det$ és l'element de volum per l'orientació i producte habituals de $\mathbb{R}^n$. Vegeu a més que $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ és el volum del paral·lelepípede definit pels vectors v_i .

Solució: L'element de volum, és per definició, la n -forma que val 1 sobre una base ortonormal. Això vol dir que ± 1 sobre tota base ortonormal. Com que $\det(e_1, \dots, e_n)$, on $(e_1, \dots, e_n)$ és la base canònica, és el determinant de la matriu identitat, hem acabat.

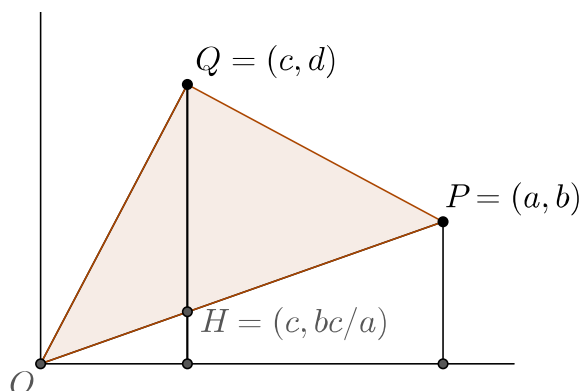
b) Per a $n = 2$ sabem que l'àrea del paral·lelogram format pels vectors u, v , que formen entre ells un angle α , és igual a la longitud de la base per l'altura.

Així doncs

$$\begin{aligned}
\text{Àrea} &= |v| \cdot h = |v||u| \sin \alpha = |v||u| \sqrt{1 - \left(\frac{u \cdot v}{|v||u|} \right)^2} \\
&= \sqrt{|u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2} = \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right| = |\det(u, v)|.
\end{aligned}$$

Una altra manera és mirar el dibuix i adonar-se que la figura ratllada està formada per dos triangles de la mateixa base QH i altures respectives c i $a - c$, de manera que l'àrea del paral·lelogram de costes OP, OQ és igual a

$$\text{Àrea} = 2 \frac{1}{2} QH \cdot (c + a - c) = \left(d - \frac{bc}{a}\right) \cdot a = ad - bc = \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}).$$



El volum d'un paral·lelepípede n -dimensional es pot definir per recurrència com

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \text{Vol}(v_1, \dots, v_{n-1}) \cdot h$$

on h és l'altura del paral·lelepípede sobre l'hiperplà $H = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, és a dir, $v_n = u + hN$ on $u \in H$ i N és ortogonal (amb el producte habitual de $\mathbb{R}^n$) a H .

Es pot veure que aquesta definició no depèn de quin dels vectors v_i fa el paper de v_n .

Per inducció,

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_{n-1})| \cdot h$$

on $\det(v_1, \dots, v_{n-1})$ vol dir el determinant de la matriu $(n-1) \times (n-1)$ formada per les components de $v_1, \dots, v_{n-1}$ respecte de una base ortonormal (no importa quina) de H .

Ara tenim

$$\begin{aligned}
\det(v_1, \dots, v_n) &= \det(v_1, \dots, v_{n-1}, u + hN) = \det(v_1, \dots, hN) \\
&= h \det(v_1, \dots, v_{n-1}, N) = h \det(v_1, \dots, v_{n-1}).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

- 204.** Si $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és la funció que a cada p li fa correspondre la seva component i -èssima, veure que $\{dx^i(p)\}$ és la base dual de la base canònica $(e_i)_p$ a p .

Solució: Només hem de recordar com funciona la diferencial d'una aplicació quan és aplicada a un vector $v \in T_P \mathbb{R}^n$: s'agafa una corba integral del vector ($\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = v$), no importa quina, es transforma aquesta corba per la funció, i es fa la derivada en $t = 0$.

En el nostre cas tenim

$$dx^i(p)(e_j)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \dots, p_n) = \delta_{ij},$$

ja que $x^i(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \dots, p_n) = p_i + t$ si $i = j$, i $x^i(p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \dots, p_n) = p_j$ si $i \neq j$.

- 205.** Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i h una funció, provar que

$$f^*(h \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f') \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

on f' denota la matriu jacobiana de f .

Solució: Per definició, i amb la notació del problema anterior, tenim

$$(f^*(h \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n))_P((e_1)_P, \dots, (e_n)_P) = (h \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_{f(P)}(df_P((e_1)_P), \dots, df_P((e_n)_P))$$

Denotant

$$\begin{aligned} u_i &= (e_i)_{f(P)} \\ u_j^* &= dx^j(f(P)) \quad (\text{base dual de } u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

i tenint en compte que la matriu de l'aplicació lineal df_P és la matriu

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(P) \right)_{ij},$$

el segon terme de la igualtat s'escriu com

$$h(f(P))u_1^* \wedge \dots \wedge u_n^* \left(\sum_k \frac{\partial f^k}{\partial x^1}(P) \cdot u_k, \dots, \sum_k \frac{\partial f^k}{\partial x^n}(P) \cdot u_k \right) = h(f(P)) \det f'(P),$$

que és el mateix valor que obtenim quan calculem

$$\left((h \circ f)(\det f') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right)_P((e_1)_P, \dots, (e_n)_P)$$

Per tant

$$f^*(h \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f') \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

- 206.** * Si $\omega = x \, dy - dz$, $\eta = 2z^2 \, dx$, $\mu = dx - yz \, dy$, calculeu $x \, \omega + \eta$, $z \, \eta - z \, \mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y \, \mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

Solució: a) $x\omega + \eta = x(x dy - dz) + 2z^2 dx = 2z^2 dx + x^2 dy - x dz$.

b) $z\eta - z\mu = z(2z^2 dx) - z(dx - yz dy) = (2z^3 - z)dx + yz^2 dy$.

c) $\omega \wedge \eta = (x dy - dz) \wedge 2z^2 dx = 2xz^2 dy \wedge dz - 2z^2 dz \wedge dx$.

d) $(2\omega - y\mu) \wedge \eta = (2x dy - 2dz - y dx + y^2 z dy) \wedge 2z^2 dx = (4xz^2 + 2y^2 z^3) dy \wedge dx - 4z^2 dz \wedge dx$.

e) $\omega \wedge \eta \wedge \mu = (x dy - dz) \wedge 2z^2 dx \wedge (dx - yz dy) = (x dy - dz) \wedge -2yz^3 dx \wedge dy = 2yz^3 dz \wedge dx \wedge dy = 2yz^3 dx \wedge dy \wedge dz$.

207. Comproveu que si ω és una $2n+1$ -forma diferencial, aleshores $\omega \wedge \omega = 0$. Doneu un exemple de 2-forma diferencial ω tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Solució: Sabem que si α és una p -forma i β una q -forma, llavors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. Aplicant aquesta fórmula amb $\alpha = \beta = \omega$ tenim

$$\omega \wedge \omega = (-1)^{(2n+1)^2} \omega \wedge \omega$$

i com que l'exponent és imparell hem acabat.

Podem agafar ω la 2-forma de $\mathbb{R}^4$ donada per $\omega = dx \wedge dy + dz \wedge dt$. Llavors $\omega \wedge \omega = 2\eta$, on η és l'element de volum de $\mathbb{R}^4$.

208. Determineu les 2-formes diferencials ω de $\mathbb{R}^4$ tals que

$$\omega \wedge (dx \wedge dy + dz \wedge dt) = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

Solució: Tota 2-forma diferencial de $\mathbb{R}^4$ s'escriu com

$$\omega = \sum_{i < j} \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Imposant

$$\omega \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

obtenim

$$\lambda_{34} + \lambda_{12} = 1.$$

Aquesta és la única restricció.

209. Determineu les 2-formes diferencials ω de $\mathbb{R}^4$ tals que

$$\omega \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

Solució: Posem, com en el problema anterior,

$$\omega = \sum_{i < j} \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Llavors

$$\omega \wedge \omega = \sum_{i < j, k < r} \lambda_{ij} \lambda_{kr} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \wedge dx_r.$$

Com, a més, els quatre subíndexs i, j, k, r han de ser diferents, tots els termes del sumatori de la dreta tenen el factor comú

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Per saber de quin coeficient està afectat aquest terme observem que en multiplicar $\lambda_{12} dx_1 \wedge dx_2$ per $\lambda_{34} dx_3 \wedge dx_4$, (o amb ordre oposat) obtenim

$$\lambda_{12} \lambda_{34} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Anàlogament en multiplicar $\lambda_{13} dx_1 \wedge dx_3$ per $\lambda_{24} dx_2 \wedge dx_4$, (o amb ordre oposat) obtenim

$$-\lambda_{13} \lambda_{24} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

I també, en multiplicar $\lambda_{14} dx_1 \wedge dx_4$ per $\lambda_{23} dx_2 \wedge dx_3$, (o amb ordre oposat) obtenim

$$\lambda_{14} \lambda_{23} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Per tant

$$\omega \wedge \omega = 2(\lambda_{12} \lambda_{34} - \lambda_{13} \lambda_{24} + \lambda_{14} \lambda_{23}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

és a dir, la única condició que ha de complir ω és

$$\lambda_{12} \lambda_{34} - \lambda_{13} \lambda_{24} + \lambda_{14} \lambda_{23} = \frac{1}{2}.$$

210. Donat un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$, considereu les formes diferencials

$$\omega_X = X_1 dy \wedge dz - X_2 dx \wedge dz + X_3 dx \wedge dy$$

$$\eta_X = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$$

Calculeu $d\omega_X$ i $d\eta_X$. Observeu que si Y, Z són camps de $\mathbb{R}^3$ llavors $\omega_X(Y, Z) = \det(X, Y, Z)$ i $\eta_X(Y) = \langle X, Y \rangle$.

Solució: a)

$$d\omega_X = \frac{\partial X_1}{\partial x} dy \wedge dz - \frac{\partial X_2}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial X_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \operatorname{div} X dx \wedge dy \wedge dz.$$

b)

$$d\eta_X = \frac{\partial X_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial X_1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial X_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial X_2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial X_3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial X_3}{\partial y} dy \wedge dz$$

Agrupant termes

$$d\eta_X = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z}\right)dx \wedge dz + \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}\right)dy \wedge dz.$$

És a dir,

$$d\eta_X = i_{\text{Rot}X} dx \wedge dy \wedge dz$$

(contracció de l'element de volum amb el rotacional del camp.)

211. Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

a) $\omega = xdy + ydx$

b) $\omega = x^2ydy - xy^2dx$

c) $\omega = f(x)dx + g(y)dy$

d) $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$

e) $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$

f) $\omega = f(x)dy$

g) $\omega = \cos(xy^2)dx \wedge dz$

h) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$

i) $\omega = fdy \wedge dz + gdx \wedge dz + hdx \wedge dy$, amb $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.

j) $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^j x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_n$ $x \in \mathbb{R}^n$.

j) $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{x_j}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_n$ $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Nota: $\widehat{dx_j}$ vol dir que dx_j no hi apareix.

212. Sigui f una funció, i $\eta = h_1 dx_1 + h_2 dx_2 + h_3 dx_3$ una 1-forma diferencial de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que

$$df = \eta \iff \nabla f = (h_1, h_2, h_3)$$

Deduïu que η és exacta (diferencial d'una funció) si i només si $X = (h_1, h_2, h_3)$ és un camp vectorial conservatiu (irrotacional) a $\mathbb{R}^3$.

Solució: La diferencial d'una funció és

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

i per tant $df = \eta$ si i només si $\frac{\partial f}{\partial x_i} = h_i$, $i = 1, 2, 3$. És a dir, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (h_1, h_2, h_3)$.

Utilitzarem el Lema de Poincaré, que diu que en oberts estrellats, en particular quan aquest obert és tot $\mathbb{R}^n$, tota forma diferencial tancada és exacta. (Que tota forma exacta és tancada és evident ja que $d^2 = 0$.)

Suposem que η és exacta. La igualtat anterior ens diu que X és igual al gradient d'una funció, $X = \nabla f$. (En aquesta situació es diu que f és la funció potencial i que X deriva d'un potencial). Llavors $\text{rot}X = \text{rot}\nabla f = 0$. Que el rotacional del gradient és zero és ben conegut i fàcil de demostrar usant Schwartz.

Recíprocament, suposem $X = (h_1, h_2, h_3)$ conservatiu. Observem que $d\eta = i_{\text{rot} X} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ (problema 210). Per tant, si X és conservatiu (irrotacional) $d\eta = 0$, que, pel Lema de Poincaré, vol dir que η és exacta.

213. Utilitzeu el mètode de Poincaré per trobar una primitiva de la forma tancada

$$\omega = \frac{z^2}{2} dx \wedge dy \wedge dt + (yz + t) dx \wedge dz \wedge dt.$$

Solució: Busquem una 2-forma η tal que $d\eta = \omega$. El mètode de Poincaré, en el cas general, diu que si

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

llavors

$$\eta = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \left(\int_0^1 \omega_{i_1 \dots i_r}(\lambda x) d\lambda \right) \sum_{j=1}^r x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

En el nostre cas

$$\begin{aligned} \omega_{124}(x, y, z, t) &= \frac{z^2}{2}, \\ \omega_{134}(x, y, z, t) &= yz + t. \end{aligned}$$

Calculem a part les integrals,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_{124}(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) d\lambda &= \int_0^1 \lambda^2 \frac{\lambda^2 z^2}{2} d\lambda = \frac{z^2}{10}, \\ \int_0^1 \omega_{134}(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) d\lambda &= \int_0^1 \lambda^2 (\lambda^2 yz + \lambda t) d\lambda = \frac{yz}{5} + \frac{t}{4}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{z^2}{10} (x dy \wedge dt - y dx \wedge dt + t dx \wedge dy) \\ &+ \left(\frac{yz}{5} + \frac{t}{4} \right) (x dz \wedge dt - z dx \wedge dt + t dx \wedge dz). \end{aligned}$$

- 214.** Siguin $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, $\eta = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dy$, $f_i, F_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$ formes diferencials de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que

$$d\omega = \eta \iff \text{rot}(f_1, f_2, f_3) = (F_1, F_2, F_3)$$

En tal cas, deduiu que ω és tancada si i només si (f_1, f_2, f_3) és un camp vectorial conservatiu a $\mathbb{R}^3$. Deduiu també que η és exacta si i només si $X = (F_1, F_2, F_3)$ és solenoidal (divergència zero) a $\mathbb{R}^3$.

Solució: a) L'equivalència està demostrada en el càlcul del problema **210**.

Si ω és tancada, $d\omega = 0$, i per tant $\text{rot}(f_1, f_2, f_3) = 0$. És a dir, (f_1, f_2, f_3) és conservatiu.

Si η és exacta, existeix $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ tal que $\eta = d\omega$. En particular, $X = (F_1, F_2, F_3)$ és el rotacional d'el camp $Y = (f_1, f_2, f_3)$. Així, $\text{div } X = \text{div}(\text{rot } Y) = 0$. Que la divergència del rotacional és zero és fàcil de demostrar utilitzant Schwartz.

Recíprocament, suposem X solenoidal, és a dir $\text{div } X = 0$. Llavors, com que

$$d\eta = (\text{div } X)dx \wedge dy \wedge dz, \quad X = (F_1, F_2, F_3),$$

tenim $d\eta = 0$, i pel Lema de Poincaré, η és exacta.

- 215.** Siguin $\omega = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dy$, $\eta = f dx \wedge dy \wedge dz$ formes diferencials a $\mathbb{R}^3$. Demostreu que

$$d\omega = \eta \iff \text{div}(F_1, F_2, F_3) = f$$

Deduiu que ω és tancada si i només si (F_1, F_2, F_3) és un camp vectorial solenoidal a $\mathbb{R}^3$.

Solució: Ja hem vist al problema anterior que

$$d\omega = (\text{div } X)dx \wedge dy \wedge dz, \quad X = (F_1, F_2, F_3).$$

Recordatori

$$\begin{aligned} \text{div rot } X &= 0 \\ \text{rot grad } X &= 0 \\ \text{div } X &= 0 \Leftrightarrow X = \text{rot } Y \\ \text{rot } X &= 0 \Leftrightarrow X = \nabla f. \end{aligned}$$

Les dues últimes implicacions cap a la dreta ($\Rightarrow$) només són certes sobre oberts estrellats.

- 216.** * Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial ω per l'aplicació T en els següents casos:

1. $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, s^3)$, $\omega = dx + dz$
2. $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta, 0)$, $\omega = xy \, dx - z \, dy$
3. $T : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(s, t) = (s, t, st)$, $\omega = dx \wedge dz$
4. $T : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$, $\omega = xy^2 \, dx \wedge dy - 2yz \, dx \wedge dz + 4 \, dy \wedge dz$
5. $T : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(s, t, u) = (st^2, tu, s, s + u)$, $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$

Solució: En tots els casos la única cosa que hem de fer és substituir x, y, z , i les seves diferencials, pels valors donats per T .

- 1) $T^*\omega = T^*(dx + dz) = d(x \circ T) + d(z \circ T) = ds + ds^3 = (1 + 3s^2)ds$.
- 3) $T^*\omega = T^*(dx \wedge dz) = d(x \circ T) \wedge d(z \circ T) = ds \wedge d(st) = ds \wedge (tds + sdt) = s \, ds \wedge dt$.
- 5) $T^*\omega = T^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4) = d(x_1 \circ T) \wedge d(x_2 \circ T) \wedge d(x_4 \circ T) = d(st^2) \wedge d(tu) \wedge d(s + u) = (t^2 \, ds + 2ts \, dt) \wedge (t \, du + u \, dt) \wedge (ds + du) = (t^3 \, ds \wedge du + t^2 u \, ds \wedge dt + 2t^2 s \, dt \wedge du)(ds + du) = (2st^2 + t^2 u)ds \wedge dt \wedge du$.

- 217.** * Sigui T una parametrització de l'esfera unitat. Calculeu la imatge recíproca per T de les formes dx , dy , dz , $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$.

Solució: Posem $T(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$.

$$\begin{aligned} T^*(dx) &= d(x \circ T) = d(\cos \varphi \cos \theta) = -\sin \varphi \cos \theta \, d\varphi - \cos \varphi \sin \theta \, d\theta \\ T^*(dy) &= d(y \circ T) = d(\cos \varphi \sin \theta) = -\sin \varphi \sin \theta \, d\varphi - \cos \varphi \cos \theta \, d\theta \\ T^*(dz) &= \cos \varphi \, d\varphi \\ T^*(dx \wedge dy) &= T^*(dx) \wedge T^*(dy) = \sin \varphi \cos \varphi \, d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Observem que $T^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ ja que és una 3-forma sobre l'esfera 2-dimensional.

- 218.** Sigui α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = xdx + ydy + zdz$ i $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$.

Solució: $f^*(\alpha) = (x \circ f) \, d(x \circ f) + (y \circ f) \, d(y \circ f) + (z \circ f) \, d(z \circ f) = \cos u(-\sin u \, du) + \sin u(\cos u \, du) + v \, dv = v \, dv$.

- 219.** Escriviu l'element de volum de $\mathbb{R}^3$ en coordenades cilíndriques.

Solució: L'element de volum de $\mathbb{R}^3$ és, per definició, una 3-forma que val 1 sobre una base ortonormal (i per tant, sobre totes les bases ortonormals positives). Si x, y, z , són les funcions coordenades habituals (projecció sobre les respectives components) llavors $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$.

Les coordenades cilíndriques es defineixen com les tres funcions $\bar{r}, \bar{\alpha}, \bar{z}$ donades per $\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \arctan(y/x), \bar{z} = z$. Llavors

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} dz = \frac{x}{\bar{r}} dx + \frac{y}{\bar{r}} dy \\ d\bar{\alpha} &= \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} dz = -\frac{y}{\bar{r}^2} dx + \frac{x}{\bar{r}^2} dy \\ d\bar{z} &= dz \end{aligned}$$

Per tant,

$$d\bar{r} \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\bar{z} = \frac{1}{\bar{r}} dx \wedge dy \wedge dz = \frac{1}{\bar{r}} \eta.$$

És a dir,

$$\eta = \bar{r} d\bar{r} \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\bar{z}$$

Una altra manera de pensar és la següent. Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació donada per

$$\varphi(r, \alpha, z) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z),$$

on U és l'obert de $\mathbb{R}^3$ donat per

$$U = \{(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}^3, r > 0, 0 < \alpha < 2\pi\}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \varphi^* \eta &= \varphi^*(dx \wedge dy \wedge dz) = d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi) \wedge d(z \circ \varphi) = d(r \cos \alpha) \wedge d(r \sin \alpha) \wedge dz \\ &= (\cos \alpha dr - r \sin \alpha d\alpha) \wedge (\sin \alpha dr + r \cos \alpha d\alpha) \wedge dz = r dr \wedge d\alpha \wedge dz. \end{aligned}$$

Equivalentment,

$$\eta = \varphi^{*-1}(r dr \wedge d\alpha \wedge dz) = (r \circ \varphi^{-1}) d(r \circ \varphi^{-1}) \wedge (\alpha \circ \varphi^{-1}) \wedge (z \circ \varphi^{-1})$$

que denotant

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r \circ \varphi^{-1} \\ \bar{\alpha} &= \alpha \circ \varphi^{-1} \\ \bar{z} &= z \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

tenim

$$\eta = \bar{r} d\bar{r} \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\bar{z}.$$

Observem que $\bar{r}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\bar{\alpha}(x, y, z) = \arctan(y/x)$ i $\bar{z}(x, y, z) = z$.

- 220.** * (a) Proveu que si α i β són formes tancades aleshores $\alpha \wedge \beta$ també ho és. (b) Proveu que si α és tancada i β exacta llavors $\alpha \wedge \beta$ és exacta.

Solució: a) Si $d\alpha = d\beta = 0$ tenim

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\text{grau } \alpha} \alpha \wedge d\beta = 0.$$

b) Si $\beta = d\gamma$, llavors

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge d\gamma = (-1)^{\text{grau } \alpha} d(\alpha \wedge \gamma) = d(\alpha \wedge (-1)^{\text{grau } \alpha} \gamma).$$

221. Es considera a $\mathbb{R}^3$ la forma $\omega = xdy \wedge dz - 2zf(y)dx \wedge dy + yf(y)dz \wedge dx$ amb f diferenciable tal que $f(1) = 1$. Trobeu f si

a) $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$,

b) $d\omega = 0$.

Solució:

a) Com que

$$d\omega = (1 - f + yf')dx \wedge dy \wedge dz,$$

ha de ser

$$yf' - f = 0,$$

equació diferencial òbvia que ens dóna $f(y) = cy$, on c és una constant que determinem per la condició inicial $f(1) = 1$, i obtenim $f(y) = y$.

b) Ara l'equació diferencial que cal resoldre és

$$yf' - f = -1,$$

que és lineal i podem resoldre pel mètode de variació de les constants. Ja sabem que $f(y) = cy$ és la solució general de la homogènia, i per tant, busquem solucions de la no homogènia de la forma $f(y) = c(y)y$. És a dir,

$$y(c'y + c) - cy = -1.$$

Deduïm $c' = -1/y^2$ i per tant $c(y) = \frac{1}{y} + k$. Així

$$f(y) = \left(\frac{1}{y} + k\right)y = 1 + ky.$$

En imposar $f(1) = 1$ obtenim $k = 0$ de manera que la solució és $f(y) = 1$.

222. Considereu a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ la 1-forma

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} dx + \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} dy$$

1. Demostreu que ω és tancada.

2. Proveu que ω no és exacta.
3. Trobeu un obert $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ on ω sigui exacta.

Solució: 1) Observem que si $\omega = A dx + B dy$ llavors $d\omega = (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}) dx \wedge dy$. De manera que ω és tancada si i només si $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$. En el nostre cas només hem de veure aquesta igualtat amb $A = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$ i $B = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$.

2) Passem a polars centrades a $(1, 0)$. És a dir, posem $x = 1 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Llavors

$$\omega(r, \theta) = \frac{-r \sin \theta}{r^2} (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) + \frac{r \cos \theta}{r^2} (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) = d\theta.$$

Per la pròpia definició de coordenades polars tenim $0 < \theta < 2\pi$. És a dir, θ és una funció a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0); a \geq 0\}$, però no pas a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.

Si existís una funció f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ tal que $df = \omega$, llavors seria $df = d\theta$, en el domini de definició de θ ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0); a \geq 0\}$). En particular, $f = \theta + c$, amb c constant en aquest domini. Però per a tot $\epsilon > 0$ tindríem $f(1, \epsilon) - f(1, -\epsilon) = \theta(1, \epsilon) - \theta(1, -\epsilon)$. Per ser f continua, el primer terme tendeix a zero quan ϵ tendeix a zero, i el segon tendeix a π .

Si es coneix el teorema de Stokes es pot raonar així. Sigui S^1 el cercle de centre $(1, 0)$ i radi 1. Sobre S^1 tenim $\omega = -y dx + (x - 1) dy$. És fàcil veure que aquesta 1-forma val 1 sobre el vector tangent a $S^1 = \partial D$, unitari en cada punt. És doncs el seu element de volum.

Si $\omega = df$ en aquest disc, tindríem

$$2\pi = \int_S \omega = \int_{\partial S} f = 0,$$

ja que S^1 no té vora.

3) Qualsevol obert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0); a \geq 0\}$, ja que aquí θ és una funció (i $\omega = d\theta$).

Capítol 8

Integració de formes

223. Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\gamma(s) = (s, s^2, s^3)$, $s \in [0, 1]$. Calculeu $\int_{\gamma} dx + dz$.

Solució: Per definició¹,

$$\int_{\gamma} dx + dz = \int_{[0,1]} \gamma^*(dx + dz) = \int_0^1 d(x \circ \gamma) + d(z \circ \gamma) = \int_0^1 ds + ds^3 = \int_0^1 (1 + 3s^2) ds = 2.$$

224. Sigui C la corba de $\mathbb{R}^3$ donada per $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = R$, $0 < R < 1$. Calculeu

$$\int_C xy dx - z dy$$

si es considera l'orientació de C donada per $(-y, x, 0)/(x^2 + y^2)^{1/2}$.

Solució: Sense Stokes. Parametritzem C per $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, R)$ amb $R^2 + r^2 = 1$. Observem que amb aquesta parametrització C està orientada com ens diu l'enunciat. Com que

$$\gamma^*(xy dx - z dy) = (r \cos t)(r \sin t)(-r \sin t dt) - R(r \cos t dt) = (-r^3 \cos t \sin^2 t - rR \cos t) dt,$$

tenim que

$$\int_C xy dx - z dy = \int_0^{2\pi} (-r^3 \cos t \sin^2 t - rR \cos t) dt = 0,$$

ja que la funció que integrem entre 0 i 2π té primitiva periòdica.

Amb Stokes. La circumferència C és frontera del disc D del pla $z = R$ de centre a $(0, 0, R)$, i està orientada deixant el recinte a l'esquerra (i.e. la base formada per la normal exterior i el vector tangent a C és positiva). Aplicant Stokes tenim

$$\int_C xy dx - R dy = \int_D d(xy dx - R dy) = - \int_D x dx \wedge dy.$$

¹Recordem que si M és una subvarietat orientada de $\mathbb{R}^n$, llavors, per definició,

$$\int_M \omega = \int_V \varphi^* \omega$$

on $\varphi : V \rightarrow M$ és una carta que conserva orientacions.

Però aquesta darrera integral és zero per simetria. Si es vol fer el càlcul es pot passar a polars o bé directament

$$\int_D x \, dx \wedge dy = \int_{-r}^r \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dy = 0.$$

225. Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y - z = 2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Calculeu

$$\int_S dx \wedge dz$$

amb l'orientació donada pel normal $(-1, -3, 1)$.

Solució: La parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, x + 3y - 2)$ conserva l'orientació ja que $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-1, -3, 1)$. Per definició

$$\int_S dx \wedge dz = \int_{[0,1]^2} \varphi^*(dx \wedge dz) = \int_0^1 \int_0^1 dx \wedge d(x + 3y - 2) = 3 \int_0^1 \int_0^1 dx \wedge dy = 3.$$

226. Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$ orientada amb el vector normal exterior. Calculeu $\int_{S^2} dx \wedge dy$.

Solució: Sense Stokes. Sigui $\psi : U \rightarrow S^2$, amb $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, donada per $\psi(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ una parametrització (positiva) de l'esfera. Llavors

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_U \psi^*(dx \wedge dy) = \int_U (d(x \circ \psi) \wedge d(y \circ \psi)) = \int_U d(\sin \varphi \cos \theta) \wedge d(\sin \varphi \sin \theta).$$

Com que

$$d(\sin \varphi \cos \theta) = \cos \varphi \cos \theta \, d\varphi - \sin \varphi \sin \theta \, d\theta,$$

$$d(\sin \varphi \sin \theta) = \cos \varphi \sin \theta \, d\varphi + \sin \varphi \cos \theta \, d\theta,$$

substituint tenim

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_U \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^\pi = 0.$$

Amb Stokes. Com que S^2 no té vora i $dx \wedge dy$ és exacta la integral és zero:

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_{S^2} d(xy) = \int_{\partial S^2} xy = 0,$$

ja $\partial S^2 = \emptyset$.

227. Sigui M la hipersuperfície de $\mathbb{R}^4$ parametritzada per $\varphi : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, amb

$$\varphi(s, t, u) = (st^2, tu, s, s + u)$$

Calculeu la integral $\int_M dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$.

Solució:

$$\begin{aligned}
 \int_M dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 &= \int_{[0,1]^3} \varphi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4) \\
 &= \int_{[0,1]^3} (d(x_1 \circ \varphi) \wedge d(x_2 \circ \varphi) \wedge d(x_4 \circ \varphi)) \\
 &= \int_{[0,1]^3} (d(st^2) \wedge d(tu) \wedge d(s+u)) \\
 &= \int_{[0,1]^3} ((t^2 ds + 2st dt) \wedge (u dt + t du) \wedge (ds + du)) \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (t^2 u + 2st^2) ds \wedge dt \wedge du \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

228. Sigui ω una 1-forma i f una funció en M , superfície compacta. Proveu la fórmula d'integració per parts

$$\int_M f d\omega = \int_{\partial M} f\omega - \int_M df \wedge \omega.$$

Solució: Resulta del fet que $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

229. Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un domini compacte amb frontera ∂D regular.

- Trobeu $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\partial D} \omega$ sigui el volum n -dimensional de D . Indicació: analitzeu primer els casos de dimensió $n = 2$ i $n = 3$.
- Si $\omega' \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ és una altra $(n-1)$ -forma amb la propietat anterior, proveu que $\omega - \omega'$ és tancada. És també exacta?

Solució: (a) És conseqüència del teorema de Stokes aplicat a $\omega = \frac{1}{n}(\sum_i (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}^i \wedge \dots \wedge dx^n)$. En el pla seria $\omega = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$.

(b) Sabem que per a qualsevol domini D és cert que $\int_D d(\omega - \omega') = 0$. D'aquí es dedueix, per un argument estàndard, que $d(\omega - \omega') = 0$. En efecte, si una n -forma $\eta = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ és diferent de zero en un punt (podem suposar f positiva en aquest punt) llavors també és positiva en un petit entorn d'aquest punt. Per tant la seva integral sobre un domini D contingut en aquest entorn obert seria diferent de zero.

En canvi hi ha $(n-1)$ -formes que tenen integral zero sobre la bora de qualsevol domini i no són zero. Per exemple a $\mathbb{R}^2$, $\omega = xdy + ydx$. Com és tancada,

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0$$

per a tot domini D de $\mathbb{R}^2$.

En el pla, la forma $\omega' = xdy$ també compleix l'apartat a). I

$$d(\omega - \omega') = d\left(\frac{1}{2}(x dy - y dx) - xdy\right) = -\frac{1}{2}d(xdy + ydx) = -\frac{1}{2}dx \wedge dy - \frac{1}{2}dy \wedge dx = 0.$$

230. Es considera la 2-forma

$$\Omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

a) Proveu que Ω és tancada.

b) Comproveu que $\Omega(P; v, w) = \frac{\langle v \times w, P \rangle}{|P|^3}$ on $v, w \in T_P \mathbb{R}^3$.

c) Proveu que $\int_{S_r^2} \Omega = 4\pi$ on S_r^2 és l'esfera de radi r centrada a l'origen. En particular Ω no és exacta a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

d) Si $v = \lambda P$ proveu que $\Omega(P; v, w) = 0$. Deduïu que si L és una unió de segments de semirectes que surten de l'origen, aleshores $\int_L \Omega = 0$.

e) Sigui $M \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una varietat de dimensió 2 de manera que cada semirecta per l'origen talla M com a molt un cop. Sigui $C(M)$ l'unió de les semirectes que tallen M . L'angle sòlid que determina M és $C(M) \cap S_1^2$. Proveu que l'àrea de l'angle sòlid determinat per M és $|\int_M \Omega|$.

Solució: (a) Un càlcul llarg.

(b) En el punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ tenim

$$\begin{aligned} \Omega(P; v, w) &= \frac{p_1(dy \wedge dz)(P; v, w) + p_2(dz \wedge dx)(P; v, w) + p_3(dx \wedge dy)(P; v, w)}{|P|^3} \\ &= \frac{p_1(v_2w_3 - v_3w_2) + p_2(v_3w_1 - v_1w_3) + p_3(v_1w_2 - v_2w_1)}{|P|^3} \\ &= \frac{\det(P, v, w)}{|P|^3}. \end{aligned}$$

(c) Fem el càlcul en coordenades esfèriques, concretament $c(\varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$. Aprofitant els càlculs del problema **226** tenim

$$\begin{aligned} c^*(dx \wedge dy) &= r^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta \\ c^*(dx \wedge dz) &= -r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta d\varphi \wedge d\theta \\ c^*(dy \wedge dz) &= r^2 \sin^2 \varphi \cos \theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned}c^*(z \, dx \wedge dy) &= r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta \\c^*(y \, dx \wedge dz) &= -r^3 \sin^3 \varphi \sin^2 \theta \, d\varphi \wedge d\theta \\c^*(x \, dy \wedge dz) &= r^3 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta \, d\varphi \wedge d\theta\end{aligned}$$

$$c^*\Omega = \frac{1}{r^3} r^3 \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta.$$

Nota: Aquest resultat és evident i no cal fer aquest càlcul. En efecte, Ω és l'element d'àrea de S^2 (val 1 sobre una base ortonormal de vectors tangents en un punt a S^2), i és homogènia respecte de r , és a dir, invariant per una homotècia de centre l'origen i raó r .

Així, dient $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, tenim

$$\int_{S_r^2} \Omega = \int_U c^*\Omega = \int_U \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta = 4\pi.$$

Nota: Com que normalment és clar pel context si estem manipulant formes sobre la superfície o la seva expressió en coordenades, és molt habitual escriure equacions com les 7 últimes ometent la referència a c^* . És a dir, escrivim per exemple $dx \wedge dy = r^2 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta$.

Finalment observem que, per ser $\partial S_r^2 = \emptyset$, Ω no pot ser exacta, ja que llavors, per Stokes seria $\int_{S_r^2} \Omega = 0$.

(d) La primera igualtat és conseqüència immediata de l'apartat b), ja que tindriem

$$\Omega(P; \lambda P, w) = \frac{\det(P, \lambda P, w)}{|P|^3} = 0.$$

Hem de suposar que L és una 2-varietat ja que Ω és una 2-forma (només sabem integrar k -formes sobre k -varietats). La forma és nul·la sobre els camps tangents a L , ja que podem pensar que tenim una base local de camps e_1, e_2 sobre L amb e_1 tangent a les semirectes per l'origen. Així,

$$\Omega(X, Y) = \Omega(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = (ad - bc)\Omega(e_1, e_2) = 0.$$

Això implica que la integral és zero, ja que

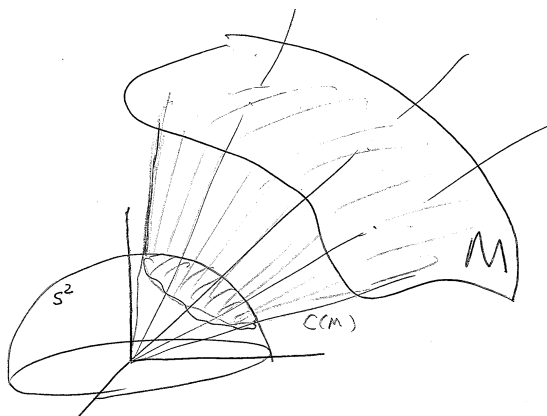
$$\int_L \Omega = \int_V \varphi^* \Omega$$

on $\varphi : V \rightarrow L$ és una carta local de L . Però com fer el pull-back és essencialment restringir, aquest pull-back és zero ($\varphi^*\Omega(X, Y) = \Omega(\varphi_*X, \varphi_*Y) = 0$.)

(e) Apliquem el teorema de Stokes a la regió R delimitada per M , $C(M) \cap S_1^2$ i la superfície lateral L formada pels rajos que uneixen aquestes superfícies. Com Ω és tancada tenim

$$0 = \int_R d\Omega = \int_{\partial R} \Omega = \int_L \Omega + \int_M \Omega + \int_{C(M) \cap S^2} \Omega = \int_M \Omega + \int_{C(M) \cap S^2} \Omega.$$

La última integral és l'àrea de l'angle sòlid, doncs ja hem vist que Ω restringida a l'esfera és el seu element d'àrea. Com volíem veure.



231. Siguin $P = (P_1, P_2, P_3)$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ dos punts de $\mathbb{R}^3$ i R el seu punt mig. Considereu la següent 2-forma de $\mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\}$:

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \left(\frac{x_i - P_i}{\|x - P\|^3} - \frac{x_i - Q_i}{\|x - Q\|^3} \right) dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^3.$$

- Proveu que ω és tancada.
- Calculeu la integral de ω sobre l'esfera de radi $\|P - Q\|/3$ i centre P .
- Calculeu la integral de ω sobre l'esfera de radi $3\|P - Q\|$ i centre R .
- Deduiu que ω no és exacta a $\mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\}$.

Solució: Observem que ω és la resta de les formes angulars a P i a Q .

(a) Come les formes angulars són tancades la diferència també.

(b) Denotem

$$\omega_P = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \left(\frac{x_i - P_i}{\|x - P\|^3} \right) dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^3,$$

$$\omega_Q = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \left(\frac{x_i - Q_i}{\|x - Q\|^3} \right) dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^3,$$

de manera que $\omega = \omega_P - \omega_Q$.

Sigui S_P l'esfera 2-dimensional de centre P i radi $\|P - Q\|/3$, i S_Q l'esfera 2-dimensional de centre Q i radi $\|P - Q\|/3$. Pel problema **230**

$$\int_{S_P} \omega_P = 4\pi.$$

Per Stokes, i ser ω_Q diferenciable a $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$, tenim

$$\int_{S_P} \omega_Q = \int_{B_P} d\omega_Q = 0,$$

ja que ω_Q és tancada. B_P denota la bola 3-dimensional de centre P i radi $\|P - Q\|/3$.

Per tant

$$\int_{S_P} \omega = \int_{S_P} (\omega_P - \omega_Q) = 4\pi.$$

El mateix argument demostra que

$$\int_{S_Q} \omega = \int_{S_Q} (\omega_P - \omega_Q) = -4\pi.$$

(c) La unió disjunta de les esferes 2-dimensionals S_P , S_Q , i E , on E és l'esfera de radi $3\|P - Q\|$ i centre R , és la vora d'una regió 3-dimensional W on ω és diferenciable i tancada. Per Stokes tenim

$$0 = \int_W d\omega = \int_E \omega + \int_{S_P} \omega + \int_{S_Q} \omega = \int_E \omega + 4\pi - 4\pi = \int_E \omega.$$

(d) No és exacta per l'apartat b) i el mateix argument que en l'apartat c) del problema **230**.

232. Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\varphi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$, $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq t \leq \pi$ (un troç d'helicoides) i sigui $\omega = xdx + ydy + zdz$. Comproveu que es satisfà el Teorema de Stokes.

Solució: Com que $d\omega = 0$, per Stokes, tenim

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = 0.$$

Comprovem-ho calculant directament aquesta segona integral.

Veiem que ∂S és la unió de les quatre corbes

$$\begin{aligned} C_1(t) = \varphi(0, t) &= (0, 0, t) \\ C_2(t) = \varphi(\pi, t) &= (\pi \cos t, \pi \sin t, t) \\ C_3(s) = \varphi(s, 0) &= (s, 0, 0) \\ C_4(s) = \varphi(s, \pi) &= (-s, 0, \pi) \end{aligned}$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_0^\pi C_1^* \omega = \int_0^\pi (x \circ C_1) d(x \circ C_1) + (y \circ C_1) d(y \circ C_1) + (z \circ C_1) d(z \circ C_1) = \int_0^\pi t dt = \frac{\pi^2}{2}$$

Anàlogament

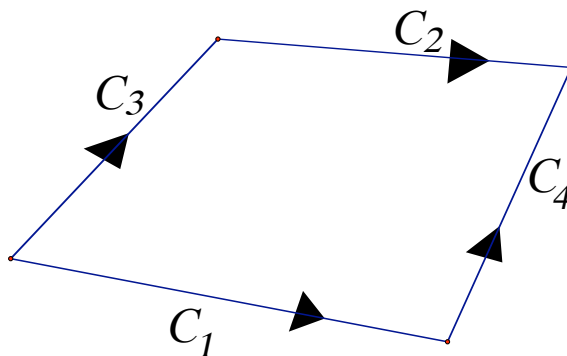
$$\begin{aligned} \int_{C_2} \omega &= \int_0^\pi C_2^* \omega = \int_0^\pi (x \circ C_2) d(x \circ C_2) + (y \circ C_2) d(y \circ C_2) + (z \circ C_2) d(z \circ C_2) \\ &= \int_0^\pi \pi \cos t (d(\pi \cos t)) + \pi \sin t (d(\pi \sin t)) + t dt \\ &= \int_0^\pi t dt = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \omega &= \int_0^\pi C_3^* \omega = \int_0^\pi (x \circ C_3) d(x \circ C_3) + (y \circ C_3) d(y \circ C_3) + (z \circ C_3) d(z \circ C_3) \\ &= \int_0^\pi s ds = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_4} \omega &= \int_0^\pi C_4^* \omega = \int_0^\pi (x \circ C_4) d(x \circ C_4) + (y \circ C_4) d(y \circ C_4) + (z \circ C_4) d(z \circ C_4) \\ &= \int_0^\pi -s d(-s) = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

Llavors

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_4} \omega - \int_{C_2} \omega - \int_{C_3} \omega = 0.$$



- 233.** Sigui Ω el tor sòlid $\{(r \cos s, (b + r \sin s) \cos t, (b + r \sin s) \sin t)\}$ amb $0 < a < b, r \in [0, a]$, $s \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi]$, i sigui $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Comproveu que es satisfà el Teorema de Stokes.

Solució: Com $d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz$ és clar que

$$\int_{\Omega} d\omega = 3Vol(\Omega) = 3(\pi a^2)(2\pi b)$$

La darrera igualtat de moment ens la creiem però és standard en teoria de tubs: només hem de tallar el tor per un meridià i posar-lo recte. Obtenim un cilindre d'altura $2\pi b$ i base un cercle de radi a .

La vora $\partial\Omega$ està donada per les anteriors equacions amb $r = a$.

Si denotem per $\varphi(s, t) = (a \cos s, (b + a \sin s) \cos t, (b + a \sin s) \sin t)$ i identifiquem x amb $x \circ \varphi$,

y amb $y \circ \varphi$, z amb $z \circ \varphi$, tenim

$$\begin{aligned}
 dx &= -a \sin s \, ds \\
 dy &= a \cos s \cos t \, ds - \sin t(b + a \sin s)dt \\
 dz &= a \cos s \sin t \, ds + \cos t(b + a \sin s)dt \\
 dx \wedge dy &= a \sin s \sin t(b + a \sin s)ds \wedge dt \\
 dx \wedge dz &= -a \sin s \cos t(b + a \sin s)ds \wedge dt \\
 dy \wedge dz &= a \cos s(b + a \sin s)ds \wedge dt
 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\omega = a(b + a \sin s)(a + b \sin s) \, ds \wedge dt.$$

Així

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} d\omega &= \int_{\partial\Omega} \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^* \omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \sin s)(a + b \sin s) \, ds \wedge dt \\
 &= a^2 b(2\pi)(2\pi) + a^2 b(2\pi) \int_0^{2\pi} \sin^2 s \, ds = 6\pi^2 a^2 b.
 \end{aligned}$$

Capítol 9

Calcul vectorial clàssic

$$\int_{\partial D} (F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad F = (P, Q), \quad \textbf{Green}$$

D domini al pla
 $\gamma(t)$ parametrització de ∂D

$$\int_{\partial S} (F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt = \int_S \text{rot } F \cdot \nu dS. \quad \textbf{Rotacional}$$

S superfície
 $\gamma(t)$ parametrització de ∂S
rot F restringit a S

$$\int_{\partial \Omega} (F \cdot \nu) dS = \int_{\Omega} \text{div } F dV. \quad \textbf{Divergencia}$$

Ω domini a l'espai
A l'esquerra F està restringit a $\partial \Omega$

234. Sigui D una regió del pla limitada per una corba tancada (diferenciable) γ . Usant la fórmula de Green, proveu que l'àrea de D és $-\int_{\gamma} y dx$ i també $\int_{\gamma} x dy$.

Solució: L'àrea es calcula integrant sobre el recinte donat l'element d'àrea del pla, que és $dx \wedge dy$.

$$A = \int_D dx \wedge dy = \int_D d(x dy) = \int_{\partial D} x dy$$

amb la orientació de la vora que deixa el recinte a l'esquerra.

- 235.** Considereu la cicloide γ donada per $x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Calculeu l'àrea compresa entre aquesta cicloide i l'eix de les x .

Solució: Pel problema anterior només hem d'integrar sobre la vora $x dy$. Si denotem per D el recinte limitat per la cicloide i l'eix de les x , llavors ∂D és la unió de les dues corbes

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

i

$$\gamma_2 = \gamma(2\pi - t) = (2\pi - t + \sin t, 1 - \cos t).$$

Agafem γ_2 en lloc de γ ja que volem recórrer la vora del domini deixant a l'esquerra el propi domini. Llavors

$$\int_{\partial D} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy.$$

Sobre γ_1 tenim $dy = 0$, de manera que la primera integral és zero. Per tant

$$\int_{\partial D} x dy = \int_{\gamma_2} x dy = \int_0^{2\pi} (2\pi - t + \sin t) \sin t dt = 3\pi.$$

Hem usat que

$$\int_0^{2\pi} t \sin t = \left[\sin t - t \cos t \right]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

- 236.** Trobeu la corba tancada del pla, γ , que fa màxima la integral

$$\int_{\gamma} y^3 dx + (3x - x^3) dy.$$

Solució: Sigui D el domini encerclat per γ . Per Stokes

$$\int_{\gamma} y^3 dx + (3x - x^3) dy = \int_D (3 - 3x^3 - 3y^2) dx \wedge dy.$$

La funció a integrar és radial i només és positiva en el disc $D(O, 1)$ de centre l'origen i radi 1. Si volem un domini on aquesta integral sigui màxima aquest domini no pot tenir punts exteriors a $D(O, 1)$. A més, si D estigués estrictament contingut a $D(O, 1)$ podríem augmentar el valor de la integral augmentant aquest domini. Per tant, el domini D on la integral és màxima és el disc $D(O, 1)$.

- 237.** Sigui X_1 el camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ donat per $X_1 = (x, y, z)$. Sigui $X_2 = (x^2, y^2, z^2)$. Trobeu el flux d'aquests dos camps sobre l'esfera de radi R .

Solució:

$$\int_{S_R} X_1 \cdot \nu dS_R = \int_{S_R} (x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS_R = \frac{1}{R} \int_{S_R} (x^2 + y^2 + z^2) dS_R = R(4\pi R^2) = 4\pi R^3.$$

També s'arriba a aquest resultat trivialment aplicant el teorema de la divergència, ja que la divergència de X_1 és 3 i el volum de l'esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$.

$$\int_{S_R} X_2 \cdot \nu dS_R = \int_{S_R} (x^2, y^2, z^2) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) dS_R = \frac{1}{R} \int_{S_R} (x^3 + y^3 + z^3) dS_R.$$

Com la funció a integrar és imparell aquesta integral és zero. Ho podem veure també així: Parametritzem l'esfera per

$$\begin{aligned} x &= R \sin \varphi \cos \theta \\ y &= R \sin \varphi \sin \theta \\ z &= R \cos \varphi \end{aligned}$$

de manera que $dS_R = R^2 \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta$. Així

$$\int_{S_R} X_2 \cdot \nu dS_R = \frac{1}{R} \int_{S_R} (x^3 + y^3 + z^3) dS_R = R^4 \int_{S_R} (\sin^4 \varphi \cos^3 \theta + \sin^4 \varphi \sin^3 \theta + \cos^3 \varphi \sin \varphi) d\varphi \wedge d\theta.$$

Les integrals entre 0 i 2π de les potències imparells de sinus i cosinus són zero, de manera que només queda la integral entre 0 i π de $\cos^3 \varphi \sin \varphi$, que també val 0. És a dir,

$$\int_{S_R} X_2 \cdot \nu dS_R = 0.$$

També s'arriba a aquest resultat trivialment aplicant el teorema de la divergència, ja que la divergència de X_2 és $2x + 2y + 2z$, funció imparell sobre l'esfera.

- 238.** Comproveu explícitament el teorema de Stokes (el del rotacional) per a la regió V de l'el·lipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ que està per sobre del pla $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i per al camp vectorial $X = (-3y, 3x, z^4)$.

Solució: Calculem el rotacional.

$$\text{Rot } X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = (0, 0, 6).$$

El normal a l'el·lipsoide és el gradient normalitzat:

$$\nu = (2x, 2y, z) \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2}}.$$

Si parametritzem l'el·lipsoide E per $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2})$, l'element d'àrea és

$$dS_E = \frac{1}{z} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + z^2} dx \wedge dy.$$

Per tant,

$$\int_E \text{Rot } X \cdot \nu \, dS_E = \int_E 6dx \wedge dy = \frac{3\pi}{2},$$

ja que x, y varien en el disc $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ que té àrea $\pi/4$.

Per fer aquest càlcul aplicant el teorema del rotacional parametrizem la vora d'aquesta regió de l'elipsoide per $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}})$, llavors

$$\int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2} \sin t, \frac{3}{2} \cos t, \frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, 0\right) dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Nota: Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrització d'una superfície S de $\mathbb{R}^3$. Denotem (u, v) les coordenades cartesianes dels punts de U . Observem que

$$\int_S (X \cdot \nu) \, dS = \int_U (X \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) \, du \, dv,$$

ja que

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

i

$$dS = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du \wedge dv.$$

239. La meitat superior de l'elipsoide $x^2/2 + y^2/2 + z^2 = 1$ talla el cilindre $x^2 + y^2 = y$ al llarg d'una corba tancada γ . Calculeu la circulació del camp vectorial $X = (y^3, xy + 3xy^2, z^4)$ al llarg de γ .

Solució: Sense Stokes. Parametrizem γ per $\gamma(t) = (\sin t \cos t, \cos^2 t, \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 t})$. Per arribar aquí només cal adonar-se que $x^2 + y^2 = y$ es pot escriure com $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. Una parametrització d'aquest cercle és doncs $x = (1/2) \sin s$, $y = (1/2)(1 + \cos s)$ i agafar $s = 2t$.

Així

$$\gamma'(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, -2 \sin t \cos t, \frac{\sin t \cos t}{2\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 t}}).$$

El camp restringit a la corba

$$F(\gamma(t)) = (\cos^6 t, \sin t \cos^3 t + 3 \sin t \cos^5 t, (1 - \frac{1}{2} \cos^2 t)^2),$$

i la projecció sobre el tangent a la corba

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \cos^8 t - \sin^2 t \cos^6 t - 2 \sin^2 t \cos^4 t - 6 \sin^2 t \cos^6 t - \frac{\sin t \cos t}{2} (1 - \frac{1}{2} \cos^2 t)^{3/2} \\ &= 8 \cos^8 t - 5 \cos^6 t - 2 \cos^4 t - \frac{\sin t \cos t}{2} (1 - \frac{1}{2} \cos^2 t)^{3/2}. \end{aligned}$$

Així

$$\int_0^\pi F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 8 \frac{35\pi}{128} - 5 \frac{5\pi}{16} - 2 \frac{3\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}.$$

ja que el darrer terme de $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ és la derivada de $(1 - \frac{1}{2} \cos^2 t)^{-1/2}$ i, per tant, la seva integral entre 0 i π és zero.

Amb Stokes. Observem primerament que

$$\text{Rot } X = (0, 0, y),$$

i que el normal a l'el·lipsoide és

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, 2z) \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

i per tant

$$\text{Rot } X \cdot \nu = \frac{\sqrt{2}yz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

En coordenades cilíndriques l'el·lipsoide és (millor veure nota dos problemes anteriors)

$$\varphi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, \frac{\sqrt{2-r^2}}{\sqrt{2}}).$$

La mètrica està donada per

$$I = \begin{pmatrix} \frac{4-r^2}{4-2r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

i l'element d'àrea

$$dA = r \sqrt{\frac{4-r^2}{4-2r^2}} dr \wedge d\alpha$$

Per tant

$$\int \text{Rot } X \cdot \nu dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin \alpha} r^2 \sin \alpha dr \wedge d\alpha = \int_0^\pi \sin \alpha \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sin \alpha} d\alpha = \frac{\pi}{8}$$

ja que

$$\sqrt{1+z^2} = \frac{\sqrt{4-r^2}}{\sqrt{2}}.$$

Els límits d'integració es veuen clars escrivint $x^2 + y^2 = r^2$ en cilíndriques, i.e. $r^2 = r \sin \alpha$.

La discrepància en el signe dels dos mètodes prové de que tal com hem parametritzat γ en el primer mètode, recorrem el recinte sobre l'el·lipsoide deixant l'el·lipsoide a la dreta i no a l'esquerra com ha de ser quan la normal és la normal exterior, com la que hem agafat en el segon mètode.

240. Doneu una expressió de la divergència d'un camp de $\mathbb{R}^3$ en coordenades cilíndriques.

Solució: Denotem r, φ, z les coordenades cilíndriques de $\mathbb{R}^3$. És a dir, $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$.

Sigui

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial r} + a_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} + a_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

amb $a_i = a_i(r, \varphi, z)$. Com que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

tenim

$$X = (a_1 \cos \varphi - a_2 r \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial x} + (a_1 \sin \varphi + a_2 r \cos \varphi) \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

i

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial}{\partial x}(a_1 \cos \varphi - a_2 r \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(a_1 \sin \varphi + a_2 r \cos \varphi) + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

Utilitzant que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ tenim

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(a_1 \cos \varphi - a_2 r \sin \varphi) &= (\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})(a_1 \cos \varphi - a_2 r \sin \varphi) \\ &= \cos \varphi (\cos \varphi \frac{\partial a_1}{\partial r} - \sin \varphi \frac{\partial a_2}{\partial r} r - a_2 \sin \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \varphi (\frac{\partial a_1}{\partial \varphi} \cos \varphi - a_1 \sin \varphi - r \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} \sin \varphi - r a_2 \cos \varphi)\end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(a_1 \sin \varphi + a_2 r \cos \varphi) &= (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})(a_1 \sin \varphi + a_2 r \cos \varphi) \\ &= \sin \varphi (\sin \varphi \frac{\partial a_1}{\partial r} + \cos \varphi \frac{\partial a_2}{\partial r} r + a_2 \cos \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos \varphi (\frac{\partial a_1}{\partial \varphi} \sin \varphi + a_1 \cos \varphi + r \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} \cos \varphi - r a_2 \sin \varphi)\end{aligned}$$

Sumant obtenim

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_1)}{\partial r} + \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

241. Integreu la funció $g = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ sobre la part del paraboloide $z = x^2 + y^2$ per sota del pla $y = z$.

Solució: Parametritzem el paraboloide per $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$. Així

$$\begin{aligned}\varphi_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 2r) \\ \varphi_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)\end{aligned}$$

Els coeficients de la primera forma fonamental són $E = 1 + 4r^2$, $F = 0$, $G = r^2$. L'element d'àrea és $dS = r\sqrt{1 + 4r^2}dr \wedge d\theta$. Per tant, dient P a la part del paraboloide que està per sota de $z = y$, tenim

$$\int_P g dS = \int_P \sqrt{4r^2 + 1} r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \int_P (r + 4r^3) dr d\theta$$

La condició $y > z$ s'escriu com $r \sin \theta > r^2$, és a dir $0 < r < \sin \theta$. En particular $0 < \theta < \pi$.

Així

$$\int_P g dS = \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} (r + 4r^3) dr d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} + \sin^4 \theta \right) d\theta = \frac{5\pi}{8}.$$

- 242.** Integreu $\int_S F \cdot \nu dS$ si $F(x, y, z) = (x, y, z)$, S és el cub unitari amb diagonal de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ i ν és normal exterior unitari.

Solució: Pel teorema de la divergència, denotant Q el cub sòlid, tenim

$$\int_S F \cdot \nu dS = \int_Q \operatorname{div} F dV = \int_Q 3 dV = 3.$$

Si volem fer el càlcul directament tenim

Flux a través de la cara $C_1 : z = 1$.

$$\int_{C_1} F \cdot \nu dS = \int_{C_1} (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) dS = 1.$$

Flux a través de la cara $C_2 : z = 0$.

$$\int_{C_2} F \cdot \nu dS = \int_{C_2} (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dS = 0.$$

Flux a través de la cara $C_3 : x = 1$.

$$\int_{C_3} F \cdot \nu dS = \int_{C_3} (1, y, z) \cdot (1, 0, 0) dS = 1.$$

Flux a través de la cara $C_4 : x = 0$.

$$\int_{C_4} F \cdot \nu dS = \int_{C_4} (0, y, z) \cdot (-1, 0, 0) dS = 0.$$

Flux a través de la cara $C_5 : y = 1$.

$$\int_{C_5} F \cdot \nu dS = \int_{C_5} (x, 1, z) \cdot (0, 1, 0) dS = 1.$$

Flux a través de la cara $C_6 : y = 0$.

$$\int_{C_6} F \cdot \nu dS = \int_{C_6} (x, 0, z) \cdot (0, -1, 0) dS = 0.$$

La suma és 3 com ja hem vist en aplicar el teorema de la divergència.

243. Trobeu el flux del camp $X(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la part regular de la frontera de

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H\}$$

amb $R, H > 0$.

Solució: Usant el teorema de la divergència. La divergència de X és 3. Per tant,

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu dS = \int_{\Omega} 3dV = 3\pi R^2 H.$$

Sense usar el teorema de la divergència.

Integrem primer sobre la tapa superior $T_1 : z = H$.

$$\int_{T_1} X \cdot \nu dS = \int_{T_1} (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) dS = \int_{T_1} z dS = H \int_{T_1} dS = H\pi R^2.$$

Integrem ara sobre la base $B : z = 0$.

$$\int_{T_1} X \cdot \nu dS = \int_{T_1} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) dS = - \int_{T_1} z dS = 0.$$

Integrem sobre la superfície lateral L . Aquí el camp unitari normal exterior és $\nu = \frac{1}{R}(x, y, 0)$.

$$\int_L X \cdot \nu dS = \int_L (x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, 0) dS = \int_L R dS = R 2\pi R H = 2\pi R^2 H.$$

Sumant aquests tres integrals obtenim $3\pi R^2 H$, que és el mateix resultat que hem obtingut usant el teorema de la divergència.

244. Trobeu el flux del camp $X(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la part regular de la frontera de

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{H^2}, 0 \leq z \leq H \right\}$$

amb $R, H > 0$.

Solució: Usant el teorema de la divergència. La divergència de X és $3(x^2 + y^2 + z^2)$. En coordenades cilíndriques,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu dS &= \int_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \int_{\Omega} (r^2 + z^2) r dr \wedge d\theta \wedge dz \\ &= 6\pi \int_0^H \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{Rz/H} dz + 6\pi \int_0^H \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{Rz/H} z^2 dz = \frac{3\pi R^4 H}{10} + \frac{3\pi R^2 H^3}{5}. \end{aligned}$$

Sense usar el teorema de la divergència. Tapa superior $T : z = H$.

$$\int_T X \cdot \nu dS = \int_T (x^3, y^3, z^3) \cdot (0, 0, 1) dS = \int_P H^3 dS = H^3 \pi R^2.$$

Superfície lateral L . Aquí el vector normal val

$$\nu = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} (\cos \theta, \sin \theta, -\frac{R}{H}),$$

com es veu fàcilment a partir de la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2})$. L'element d'àrea és

$$dS = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} dx dy.$$

$$\int_L X \cdot \nu dS = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \int_L (x^3, y^3, z^3) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, -\frac{R}{H}) dS.$$

Substituint el dS i passant a polars

$$\int_L X \cdot \nu dS = \frac{H}{R} \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^3 \cos^4 \theta + r^3 \sin^4 \theta - z^3 \frac{R}{H}) r dr d\theta.$$

Recordem que

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Substituint obtenim

$$\int_L X \cdot \nu dS = \frac{3\pi H R^4}{10} - \frac{2\pi R^2 H^3}{5}.$$

Per tant

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu dS = \int_T X \cdot \nu dS + \int_L X \cdot \nu dS = H^3 \pi R^2 + \frac{3\pi H R^4}{10} - \frac{2\pi R^2 H^3}{5}$$

resultat que coincideix amb l'obtingut anteriorment.

245. Considereu els camps vectorials

$$Y = (1 - (x^2 + y^2 + z^2))^2 (y, -x, e^{z^2})$$

$$E = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$X = E + \operatorname{rot} Y$$

(a) Calculeu $\operatorname{div} X$.

(b) Calculeu el flux de X a través de la superfície

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

(c) Calculeu la circulació $\int_{\Sigma} Y$, essent $\Sigma = S_1 \cap \{z = 0\}$

(d) Calculeu el flux de X a través de

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0\}$$

Solució: a) Com que la divergència del rotacional és zero tenim

$$\operatorname{div} X = \operatorname{div} E = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = 0.$$

b)

$$\int_{S_1} X \cdot \nu \, dS = \int_{S_1} E \cdot \nu \, dS + \int_{S_1} \operatorname{rot} Y \cdot \nu \, dS.$$

Observem que $\operatorname{rot} Y = 0$ sobre S_1 . En efecte, $Y = f(y, -x, e^{z^2})$ amb $f = f(x, y, z) = (1 - (x^2 + y^2 + z^2))^2$, una funció que sobre S_1 compleix $f = f_x = f_y = f_z = 0$.

Com que en tots els termes del rotacional de Y apareixen alguna d'aquestes 4 funcions, tenim que $\operatorname{rot} Y = 0$ sobre S_1 .

Per tant

$$\int_{S_1} X \cdot \nu \, dS = \int_{S_1} E \cdot \nu \, dS = \int_{S_1} (x, y, z) \cdot (x, y, z) \, dS = \int_{S_1} dS = 2\pi.$$

c) El teorema del rotacional, i el fet de que $\operatorname{rot} Y = 0$ sobre S_1 ens diu que aquesta integral és zero. De fet, ja es veu que $Y = 0$ sobre Σ .

d) Primer mètode. Com que la divergència de X és zero i l'origen no pertany a la figura tres dimensional delimitada per per S_1 , S_2 , i la corona circular $C = \{(x, y, 0) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, tenim que

$$\int_{S_1} X \cdot (-x, -y, -z) \, dS + \int_{S_2} X \cdot (x, y, z) \, dS + \int_C X \cdot (0, 0, -1) \, dS = 0.$$

Observem com hem canviat el signe de la normal en S_1 ja que la normal a d'apuntar cap enfora.

Però

$$\int_C X \cdot (0, 0, -1) \, dS = \int_C E \cdot (0, 0, -1) \, dS + \int_C \operatorname{rot} Y \cdot (0, 0, -1) \, dS$$

Com que la tercera component de E és zero sobre la corona ($z = 0$) tenim

$$\int_C X \cdot (0, 0, -1) \, dS = \int_C \operatorname{rot} Y \cdot (0, 0, -1) \, dS$$

La tercera component del rotacional de $Y = f(y, -x, e^{z^2})$ val

$$\frac{\partial}{\partial x}(-xf) - \frac{\partial}{\partial y}(yf) = -2f - xf_x - yf_y = 4\sqrt{f} - 6f$$

ja que $f_x = -4x\sqrt{f}$ i $f_y = -4y\sqrt{f}$.

Llavors

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{rot} Y \cdot (0, 0, -1) dS &= - \int_C (4\sqrt{f} - 6f) dx \wedge dy \\ &= 6 \int_C (1 - r^2)^2 r dr \wedge d\theta - 4 \int_C (1 - r^2) r dr \wedge d\theta \\ &= 2\pi \left(2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} + 6 \left[\frac{r^6}{6} \right]_1^{\sqrt{2}} - 8 \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} \right) = 4\pi \end{aligned}$$

Així doncs,

$$\int_{S_2} X \cdot (x, y, z) dS = - \int_{S_1} X \cdot (-x, -y, -z) dS - \int_C X \cdot (x, y, z) dS = 2\pi - 4\pi = -2\pi.$$

Segon mètode. Directament, denotant $\gamma(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t, 0)$, tenim

$$\begin{aligned} \int_{S_2} X \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z) dS &= \int_{S_2} E \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z) dS + \int_{S_2} \operatorname{rot} Y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z) dS \\ &= \int_{S_2} \frac{1}{2^{3/2}}(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z) dS + \int_{\partial S_2} Y(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{S_2} 2 dS + \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))(\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \cos t, e^0) \cdot \sqrt{2}(-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} (-2f(\gamma(t))) dt \\ &= 2\pi - 4\pi = -2\pi, \end{aligned}$$

ja que $f(\gamma(t)) = 1$.

- 246.** La secció d'un canal és un rectangle 40×10 (en metres) i la suposem en el pla xz . El canal és ple d'aigua i a cada punt la velocitat del flux d'aigua és $V = z(400 - x^2)$ (en metres cúbics per minut). Calculeu el flux de massa d'aigua per una secció perpendicular a l'eix y si la densitat és igual a ρ .

Solució: Com que la massa és el volum per la densitat, el flux de massa és el flux de volum per la densitat, que suposem constant i igual a ρ .

$$\text{Flux} = \int_C V \cdot \nu dS$$

on C és la secció del canal, $\nu = (0, 1, 0)$ el normal unitari al canal i $dS = dx \wedge dz$ és l'element d'àrea del canal. Per tant

$$\text{Flux de massa} = \int_C \rho(0, z(400 - x^2), 0) \cdot (0, 1, 0) dx dz = \rho \int_0^{40} \int_0^{10} z(400 - x^2) dx dz = \frac{800000\rho}{3}.$$

247. Sigui D un domini compacte de $\mathbb{R}^2$ i sigui f una funció C^∞ nul·la a la vora de D .

1. Proveu que

$$\int_D f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = - \int_D \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

2. Deduïu de l'apartat anterior que si f és harmònica a D , llavors és idènticament nul·la.

248. Utilitzeu el Teorema de Green per a calcular l'àrea d'una fulla de la rosa de quatre pètals. Recordeu que l'equació d'aquesta corba en coordenades polars (r, t) és $r(t) = 3 \sin 2t$.

Solució: El teorema de Green diu

$$\int_{\partial D} F \cdot \gamma'(t) dt = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

on D és un domini del pla, $\gamma(t)$ una parametrització de la vora i $F = (P, Q)$ un camp.

Un truc estàndard quan es vol calcular l'àrea és integrar el camp $F(x, y) = (-y, x)$, ja que llavors el teorema de Green diu

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot \gamma'(t) dt = 2A}$$

on A és l'àrea del domini.

La vora la tenim parametritzada per

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t) = (3 \sin 2t \cos t, 3 \sin 2t \sin t).$$

Així

$$\gamma'(t) = (r' \cos t - r \sin t, r' \sin t + r \cos t).$$

Per tant

$$\int_{\partial D} F \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\partial D} (-r \sin t, r \cos t) \cdot (r' \cos t - r \sin t, r' \sin t + r \cos t) dt.$$

És a dir

$$\int_{\partial D} F \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\partial D} r^2 dt = \int_0^{\pi/2} 9 \sin^2 2t dt = \frac{9}{2} \int_0^\pi \sin^2 u du = \frac{9\pi}{4} = 2A.$$

L'àrea demanada és doncs $9\pi/8$.

249. Considereu a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ les funcions

$$\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$V(x, y, z) = \frac{x}{\varrho(x, y, z)}$$

(a) Calculeu la circulació de $F = \nabla V$ al llarg d'un arc de la circumferència centrada a $(0, 0, 0)$ i que uneix els punts $(1, 0, 0)$ i $(-1, 0, 0)$

(b) Calculeu la circulació de $G = \varrho^3 \nabla V$ al llarg del perímetre del quadrat

$$Q = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

(c) Calculeu el flux del camp $H = \varrho^2 \nabla V$ a través de l'esfera de centre $(0, 0, 0)$ i radi 3

Solució:

a) Calculem el gradient de V .

$$F = \nabla V = \frac{1}{\rho^2}(\rho - x\rho_x, -x\rho_y, -x\rho_z).$$

Una parametrització de la circumferència que ens donen és $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi$. Així

$$\text{Circulació} = \int_0^\pi F \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{\rho^2} \left((-\sin t)(\rho - \rho_x \cos t) + (\cos t)(-\rho_y \cos t) \right) dt$$

Però $\rho_x = \frac{x}{\rho} = \cos t$, ja que sobre $\gamma(t)$ tenim $x = \cos t$ i $\rho = 1$. Anàlogament $\rho_y = \frac{y}{\rho} = \sin t$. Substituint aquests valors a la integral tenim

$$\text{Circulació} = \int_0^\pi \left((-\sin t)(1 - \cos^2 t) - \cos^2 t(\sin t) \right) dt = - \int_0^{2\pi} \sin t dt = -2.$$

b) Aplicarem el teorema de Green. Dins del quadrat tenim $y = 0$, de manera que $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$. Aprofitant el càlcul del gradient fet a l'apartat a) tenim

$$\rho^3 \nabla V = (z^2, 0, -zx).$$

Dient $\gamma(t)$ a una parametrització de ∂Q , i aplicant Green en el pla $y = 0$, tenim

$$\text{Circulació} = \int_{\partial Q} \rho^3 \nabla V \cdot \gamma'(t) dt = \int_Q \left(\frac{\partial(-xz)}{\partial x} - \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) dx dz = - \int_0^1 \int_0^1 3z dx dz = -\frac{3}{2}.$$

c) Aplicarem el teorema de la divergència. A l'apartat a) hem vist que $H = (\rho - x\rho_x, -x\rho_y, -x\rho_z)$.

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = -\frac{2x}{\rho}.$$

Hem usat que $\rho_{xx} = (\rho - x\rho_x)/\rho^2$, etc.

Es compleix que $\operatorname{div} H(x, y, z) = -\operatorname{div} H(-x, -y, -z)$, de manera que la integral de $\operatorname{div} H$ sobre una esfera centrada a l'origen és zero. Per tant, pel teorema de la divergència, la integral del flux de H sobre la vora d'aquesta esfera és zero.

250. Considereu les superfícies de $\mathbb{R}^3$ donades per

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$$

i sigui $X = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

- (a) Calculeu $\int_{\gamma} X$, si $\gamma = S^2 \cap P$.
- (b) Calculeu el flux de X a través de $S^2 \cap \{z > x + y\}$.

Solució: a) Apliquem el teorema del rotacional a la superfície S determinada per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; z = x + y\}.$$

Llavors

$$\int_{\gamma} X = \int_{\partial S} X \cdot \gamma'(t) dt = \int_S \operatorname{rot} X dS$$

on $\gamma(t)$ és una parametrització de ∂S . Ara bé, com que $X = \frac{1}{M}(x, y, z)$ amb $M = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, i $M_x = \frac{x}{M}$, $M_y = \frac{y}{M}$, $M_z = \frac{z}{M}$, tenim

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{M} \right) = 0,$$

i anàlogament els altres termes del rotacional, de manera que $\operatorname{rot} X = 0$, i la integral demanada és zero.

b)

Apliquem el teorema de la divergència pot portar algún problema ja que el camp donat no és diferenciable a l'origen. Fem el càlcul directe.

$$\int_E X \cdot \nu dS = \int_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) \cdot (x, y, z) dS = \int_E dS = 2\pi.$$

La última igualtat deguda a que E és mitja esfera, i per tant, la seva àrea val 2π . A més, sobre E , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- 251.** Sigui R una regió simple (amb frontera una corba simple) del pla amb frontera diferenciable C i àrea A . Proveu que el centre de gravetat $(\bar{x}, \bar{y})$ de R ve donat per

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx.$$

Feu servir aquesta propietat per trobar el centre de masses de la regió envoltada per la corba $\gamma(t) = (2 \cos t - \sin 2t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, suposada homogènia.

Solució: Per definició de centre de gravetat tenim

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_R x dx dy.$$

A partir d'aquí el resultat és immediat per Stokes. Si ens volem entretenir una mica el podem resoldre aplicant el teorema de Green al camp $F = (P, Q) = (0, \frac{x^2}{2})$. Suposem la vora parametritzada per $\gamma(s) = (x(s), y(s))$.

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{A} \int_C F \cdot \gamma'(s) ds = \frac{1}{2A} \int_C x(s)^2 y'(s) ds = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy.$$

Anàlogament faríem per a $\bar{y}$.

Calculem ara l'àrea envoltada per la corba C donada. Com en el problema 248 tenim

$$A = \frac{1}{2} \int_C F \cdot \gamma'(t) dt$$

amb $F(x, y) = (-y, x)$. Així

$$A = \frac{1}{2} \int_C (-2 \sin t, 2 \cos t - \sin 2t) \cdot (-2 \sin t - 2 \cos 2t, 2 \cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 - 4 \sin^3 t) dt = 4\pi.$$

Per tant, la coordenada $\bar{x}$ del centre de masses de la regió envoltada per la corba $\gamma(t) = (2 \cos t - \sin 2t, 2 \sin t)$ és

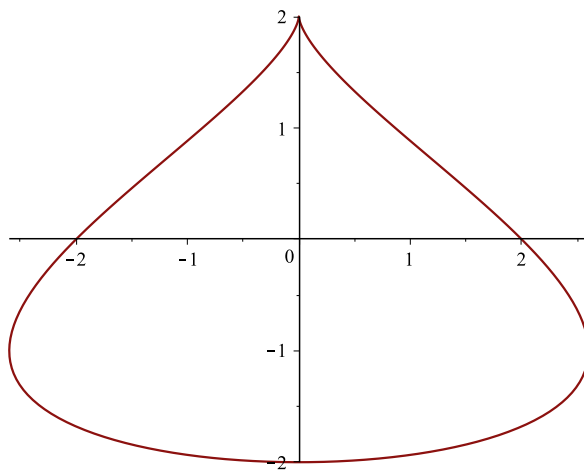
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{8\pi} \int_C x^2 dy = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin 2t)^2 \cdot 2 \cos t dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (4 \cos^3 t + 4 \sin^2 t \cos^3 t - 8 \sin t \cos^3 t) dt = 0. \end{aligned}$$

(La integral entre 0 i 2π de les potències imparells de sinus i cosinus és zero.)

Anàlogament

$$\bar{y} = -\frac{1}{8\pi} \int_C y^2 dx = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 t \cdot (-2 \sin t - 2 \cos 2t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos 2t dt = -\frac{1}{2}.$$

El centre de masses és doncs el punt $(0, -1/2)$.



- 252.** Si $X = (x, y, z)$ i D és una regió solida simple envoltada per una superfície S amb normal exterior ν , proveu el volum V de D és

$$V = \frac{1}{3} \int_S X \cdot \mathbf{n} dA.$$

Solució: Aplicació directa del teorema de la divergència, observant que la divergència de X és igual a 3.

253. Sigui $M = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $N = \frac{x}{x^2+y^2}$. Verifiqueu

1. $\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \int_R (N_x - M_y) dA$ on R és l'anell centrat a $(0,0)$, radi exterior 2 i radi interior 1 (trieu les orientacions de forma coherent).
2. $\int_{\partial R} Mdx + Ndy \neq \int_R (N_x - M_y) dA$ en el disc R de radi 1.
3. Per què l'apartat anterior no contradiu el teorema de Green?

Solució: 1) Aplicació directa del Teorema de Green. Observem que $\int_C Mdx + Ndy$ és una manera equivalent d'escriure $\int_C \mathbf{F} \cdot \gamma'(t) dt$, amb $F = (M, N)$ i $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrització de C .

2) El disc de radi 1 el parametritzem per $x = \cos t$, $y = \sin t$, de manera que $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$. Així

$$\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \int_{\partial R} (-\sin t)(-\sin t) dt + \cos t(\cos t) dt = 2\pi.$$

En canvi, és fàcil veure que $N_x = M_y$, de manera que $\int_R (N_x - M_y) dA = 0$.

3) Perquè el camp $\mathbf{F} = (M, N)$ no és diferenciable a l'origen.

254. [Identitats de Green]. Sigui R una regió simple amb frontera C diferenciable a trossos que orientem positivament i considerem el vector normal exterior ν . Siguin $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcions diferenciables i $F : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial diferenciable. Proveu que:

1. $\int_C g(F \cdot \nu) ds = \int_R (g \operatorname{div} F + \operatorname{grad} g \cdot F) dA$.
2. $\int_C g(\operatorname{grad} f \cdot \nu) ds = \int_R (g \Delta f + (\operatorname{grad} g) \cdot (\operatorname{grad} f)) dA$.

Solució: Posem $F = (P, Q)$. Llavors, aplicant les definicions i el teorema de Green tenim,

$$\begin{aligned} \int_R (g \operatorname{div} F + \operatorname{grad} g \cdot F) dA &= \int_R \left(g \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} P + \frac{\partial g}{\partial y} Q \right) dA \\ &= \int_R \left(\frac{\partial}{\partial x} (gP) + \frac{\partial}{\partial y} (gQ) \right) dA \\ &= \int_C (-gP, gQ) \cdot T ds \end{aligned}$$

on T és el tangent unitari a C . Però el producte escalar de dos vectors és igual al producte escalar dels seus ortogonals de manera que finalment tenim

$$\int_R (g \operatorname{div} F + \operatorname{grad} g \cdot F) dA = \int_C g(F \cdot \nu) ds$$

La segona igualtat és conseqüència immediata de la primera, amb $F = \text{grad} f$, i observant que $\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f$.

255. Sigui f una funció diferenciable definida en una regió simple R amb frontera C diferenciable a trossos. Assumim que f s'anul·la sobre C i que $\Delta f = 0$ (Laplacià) a R .

1. Proveu que $\int_D \|\nabla f\| dA = 0$ per a tot rectangle $D \subset R$.
2. Proveu que f és constant sobre R .

Solució: Apliquem la segona identitat de Green del problema anterior amb $g = f$.

$$\int_C f \text{grad} f \cdot \nu dL = \int_R (f \Delta f + (\text{grad} f) \cdot (\text{grad} f)) dA.$$

Si $f = 0$ sobre C i $\Delta f = 0$ a R , aquesta igualtat queda

$$0 = \int_R (\text{grad} f) \cdot (\text{grad} f) dA = \int_R \|\nabla f\|^2 dA$$

Això implica $\nabla f = 0$, i per tant f és constant sobre tot R .

256. Sigui $F(x, y, z) = (0, 0, \rho z)$ i $M \subset \{z \leq 0\}$ una varietat tridimensional compacta amb vora. El camp F es pot interpretar com la pressió cap al fons d'un fluid de densitat constant ρ a $\{z \geq 0\}$. Donat que el fluid exerceix pressió en totes direccions, es defineix l'empenyiment a M exercit pel fluid com $\int_{\partial M} F \cdot \nu dS$. Proveu el teorema d'Arquimedes: l'empenyiment és igual al pes del fluid que desallotja M .

Solució: Pel teorema de la divergència l'empenyiment és $\int_{\partial M} F \cdot \nu dS = \int_M \text{div}(F) dV = \rho \text{vol}(M)$ i hem acabat.

257. Calculeu la integral del camp vectorial $F = (y + e^{x-y}, x^2 + x - e^{x-y})$ sobre la corba $C : x^2 + y^2 = 1$ orientada positivament pel vector tangent $T = (y, -x)$.

Solució: Parametritzem la corba C per $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$. D'aquesta manera $\gamma'(t) = (-\sin t, -\cos t)$, i.e. $\gamma'(x, y) = (y, -x)$. Ens demanen

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^{2\pi} (-\sin t + e^{\sin t + \cos t}, \cos^2 t - \sin t - e^{\sin t + \cos t}) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi \end{aligned}$$

ja que les demés funcions que s'han d'integrar tenen primitiva periòdica (i, per tant, la integral entre 0 i 2π val zero).

- 258.** Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, la superfície de $\mathbb{R}^3$ orientada amb el vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0)$ i sigui $F = (x + e^{x+y}, -y + e^{x+y}, z)$. Calculeu el flux del camp vectorial F sobre la superfície S .

Solució: Pensem el cilindre parametritzat per $\varphi(t, z) = (\cos t, \sin t, z)$. La primera forma fonamental en aquesta base és la identitat, de manera que, en particular l'element d'àrea és $dx \wedge dz$. Ens demanen

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu dS &= \int_S (\cos t + e^{\cos t + \sin t}, -\sin t - e^{\cos t + \sin t}, z) \cdot (\cos t, \sin t, 0) dt dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt dz + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t) e^{\cos t + \sin t} dt dz = 0, \end{aligned}$$

ja que les dues integrals respecte de t tenen primitiva periòdica.

- 259.** Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, la superfície de $\mathbb{R}^3$ orientada amb el vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$ i sigui $\mathbf{F} = (x + 1, y - 1, 1 - 2z)$. Calculeu el flux del camp vectorial F sobre la superfície S .

Solució: Primer mètode. Aquesta superfície es pot parametritzar per $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, de manera que $\varphi_x = (1, 0, -x/z)$, $\varphi_y = (0, 1, -y/z)$, i per tant els coeficients de la primera forma fonamental són $E = 1 + \frac{x^2}{z^2}$, $G = 1 + \frac{y^2}{z^2}$, $F = \frac{xy}{z^2}$. Per tant, l'element d'àrea és $dS = \frac{1}{z} dx \wedge dy$.

Així doncs,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \int_S (x + 1, y - 1, 1 - 2z) \cdot (x, y, z) dS = \int_S (1 - 3z^2 + x - y + z) \frac{1}{z} dx \wedge dy.$$

Aquestes integrals són fàcils:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{z} dx \wedge dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr \wedge d\theta = 2\pi. \\ -3 \int_S z dx \wedge dy &= -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr \wedge d\theta = -2\pi. \\ \int_S dx \wedge dy &= \pi; \quad \int_S \frac{x}{z} dx \wedge dy = \int_S \frac{y}{z} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Per tant, sumant aquestes quantitats obtenim

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \pi.$$

Segon mètode. Teorema de la divergència. Clarament $\operatorname{div} F = 0$, de manera que la integral sobre la superfície de la esfera més la integral sobre l'equador ($E : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$) és zero. Per tant la integral que ens demanen val

$$- \int_E \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) dx \wedge dy = - \int_E (2z - 1) \Big|_E dx \wedge dy = \int_E dx \wedge dy = \pi.$$

- 260.** Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 5 - x - y\}$ la superfície orientada amb el vector normal $(1, 1, 1)$. Donat el camp vectorial $F = (x, y, z)$ calculeu $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Solució: Aquesta superfície es pot parametritzar per $\varphi(x, y) = (x, y, 5 - x - y)$, de manera que $\varphi_x = (1, 0, -1)$, $\varphi_y = (0, 1, -1)$, i per tant $\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Els coeficients de la primera forma fonamental són $E = G = 2$, $F = 1$. Per tant, l'element d'àrea és $dS = \sqrt{3}dx \wedge dy$. Així doncs,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_S (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) \sqrt{3} dx \wedge dy = \int_S (x + y + z) dx \wedge dy = \int_S 5 dx \wedge dy = 5\pi.$$

- 261.** Sota¹ certes circumstàncies una ona electromagnètica consisteix en un camp elèctric $\mathbf{E}$ i un camp magnètic $\mathbf{B}$ perpendiculars entre ells en la direcció de propagació de la ona (diem que és

¹Resum teòric fet per D. Marin i E. Gallego necessari per entendre aquest problema.

Equacions de Maxwell.

Recordem que la força $\mathbf{F}$ que exerceix un camp elèctric $\mathbf{E}$ i un camp magnètic $\mathbf{B}$ sobre una partícula de càrrega q que té velocitat $\mathbf{v}$ ve donada per la fórmula de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

La segona llei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ determina doncs el moviment un cop coneguda la massa m de la partícula. D'aquesta manera el problema de l'electromagnetisme es redueix a conèixer el camp elèctric $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ i el camp magnètic $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ en cada punt de l'espai (x, y, z) i en cada instant de temps t a partir de la distribució de càrregues elèctriques (codificada en una funció densitat de càrrega $(\rho(x, y, z, t))$ i del seu moviment (codificat amb el vector densitat de corrent $\mathbf{j}(x, y, z, t)$). La determinació de $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ s'efectua a partir de les lleis següents (expressades en un sistema d'unitats físiques convenient):

- (1) *Llei de Gauss:* El flux del camp elèctric a través d'una superfície tancada $S = \partial\Omega$ delimitant un domini Ω és igual a la càrrega elèctrica Q que hi ha a l'interior de Ω :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \stackrel{\text{div}}{\Longleftrightarrow} \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_\Omega \rho dV \Longleftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho.$$

- (2) *Llei de Faraday:* El voltatge (la circulació de $\mathbf{E}$) al llarg d'una trajectòria tancada simple $C = \partial S$ que és la vora d'una superfície S és igual a (menys) la variació del flux magnètic a través de S :

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{rot}}{\Longleftrightarrow} \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Longleftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

- (3) *Absència de càrregues magnètiques:* El flux del camp magnètic a través de qualsevol superfície tancada $S = \partial\Omega$ és zero:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \stackrel{\text{div}}{\Longleftrightarrow} \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \Longleftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

- (4) *Llei d'Ampère modificada per Maxwell:* La circulació de $\mathbf{B}$ al llarg d'una corba tancada simple $C = \partial S$ és proporcional a la suma de l'intensitat de corrent que travessa S més la variació en el temps del flux de $\mathbf{E}$ a través S :

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \left(\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right) \stackrel{\text{rot}}{\Longleftrightarrow} c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

La constant de proporcionalitat és l'invers de la velocitat de la llum c al quadrat.

una ona plana). Per exemple és el cas quan

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (0, 0, E(y, t)), \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = (B(y, t), 0, 0)$$

amb E i B funcions de classe C^2 . Suposem un ambient sense corrent $\mathbf{J} = 0$ (per exemple en el buit).

1. Proveu que $\text{rot } \mathbf{E} = (\partial_y E, 0, 0)$ i que $\text{rot } \mathbf{B} = (0, 0, -\partial_y B)$.

2. Deduïu de les equacions de Maxwell que

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

on c és la velocitat de la llum.

3. Deduïu l'equació d'ona per B i E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}.$$

4. Comproveu que les solucions generals són de la forma $f(y - ct) + g(y + ct)$.

Solució: 1) Obvi.

2) Les equacions de Maxwell diuen que la circulació de $\mathbf{B}$ al llarg d'una corba tancada simple $C = \partial S$ és proporcional a la suma de la intensitat de corrent que travessa S més la variació en el temps del flux de E a través de S . En el buit la intensitat de corrent és zero i tenim:

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot \gamma'(t) dt = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \nu dS$$

on ν és el normal unitari a la superfície S , $\gamma(t)$ una parametrització de la vora de S , B el camp magnètic i E el camp elèctric.

Pel teorema del rotacional tenim

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \nu dS = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \nu dS.$$

Com que aquesta igualtat és certa per a tota superfície, els integrands han de ser iguals. Per tant

$$\text{rot } \mathbf{B} \cdot \nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nu$$

(ν no depèn de t). Però, novament, com ν és arbitrari, ha de ser

$$\text{rot } \mathbf{B} = (0, 0, -\frac{\partial B}{\partial y}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} (0, 0, \frac{\partial E}{\partial t}),$$

és a dir,

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

La llei de Faraday diu que el voltatge (la circulació de $\mathbf{E}$) al llarg d'una trajectòria tancada simple $C = \partial S$ que és la vora d'una superfície S és igual a (menys) la variació del flux magnètic a través de S :

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \gamma'(t) dt = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \nu dS.$$

Pel teorema del rotacional, i els mateixos comentaris de l'apartat anterior això és equivalent a dir

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

És a dir,

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

3) Aplicarem la identitat

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

on

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

i

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{grad } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

amb $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ i amb $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Recordem que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Tindrem

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{E}) = (0, -B_{tz}, B_{ty}) = -(0, 0, E_{yy}).$$

Com ja hem vist que $B_y = -\frac{1}{c^2} E_t$ tenim $c^2 E_{yy} = E_{tt}$.

Anàlogament

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{B}) = (\frac{1}{c^2} E_{ty}, -\frac{1}{c^2} E_{tx}, 0) = (-B_{yy}, 0, 0).$$

Com ja hem vist que $E_y = -B_t$ tenim $c^2 B_{yy} = B_{tt}$.

4) És clar, per la regla de la cadena, que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (f(y - ct) + g(y + ct)) = 0.$$

Capítol 10

Exercicis complementaris de Càlcul Vectorial

262. Proveu les següents identitats:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fF) &= \operatorname{grad}(f)F + f\operatorname{div} F \\ \operatorname{rot}(fF) &= \operatorname{grad}(f) \times F + f\operatorname{rot} F.\end{aligned}$$

Solució: Càlcul directe.

263. Siguin f, ρ funcions de classe $\mathcal{C}^1$ a $\mathbb{R}$, i $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

- (a) Considerem els camps E tals que $\operatorname{div} E = \rho(r)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y = 0\}$. Quins d'aquests són radials?
- (b) Si $B = f(r)(-y, x, 0)$, calculeu $\operatorname{rot} B$.
- (c) Si $J = \rho(r)(0, 0, z)$, en quins casos $\operatorname{div} J = 0$?
- (d) Donat J com a l'apartat c), determineu f per tal de que $\operatorname{rot} B = J$.

Solució: a) Si $E = \lambda(r)\frac{\partial}{\partial r}$ llavors aplicant la fórmula del problema anterior tenim

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\lambda)}{\partial r} = \frac{1}{r}(\lambda + r\lambda') = \rho(r).$$

La funció $\lambda(r)$ ha de complir doncs l'equació diferencial

$$\lambda'r + \lambda = r\rho(r),$$

equació lineal de primer ordre que podem resoldre si coneixem $\rho(r)$.

b)

$$\operatorname{Rot} B = \left(-\frac{\partial}{\partial z}(xf(r)), -\frac{\partial}{\partial z}(yf(r)), \frac{\partial}{\partial x}(xf(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(r))\right) = (0, 0, 2f(r) + rf'(r)).$$

Hem usat que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(r) = f'(r) \frac{y}{r}.$$

c)

$$\operatorname{div} J = \frac{\partial(z\rho(r))}{\partial z} = \rho(r),$$

per tant $\operatorname{div} J = 0$ si i només si $\rho(r) = 0$, és a dir, si i només si $J = 0$.

d) Com ja hem calculat el rotacional de B tenim

$$\operatorname{rot} B = J \quad \text{si i només si} \quad 2f(r) + rf'(r) = z\rho(r)$$

però aquesta igualtat només es pot donar si $\rho(r)$, i per tant J , és zero. Només cal derivar respecte de z l'anterior igualtat.

Per tant $f(r)$ és solució de l'equació diferencial $xy' + 2y = 0$. És a dir, $f(r) = kr^{-2}$, amb k constant.

264. Integreu la funció $z(x^2 + y^2)$ a la semiesfera S donada per $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$ i $z > 0$.

Solució: Parametritzem S per

$$\begin{aligned} x &= 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y &= 2 \sin \varphi \sin \theta \\ z &= 2 \cos \varphi \end{aligned}$$

amb $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi/2$. Els coeficients de la primera forma fonamental són $E = 4$, $F = 0$, $G = 4 \sin^2 \varphi$. L'element d'àrea és $dS = 4 \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta$.

$$\int_S z(x^2 + y^2) dS = \int_S 2 \cos \varphi (4 \sin^2 \varphi) 4 \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta = 32 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \wedge d\theta = 16\pi.$$

265. Si la densitat d'una esfera metel·lica massissa B centrada a l'origen i de radi 5 és en el punt (x, y, z) proporcional a $1 + z^2$, calculeu la massa d'aquest objecte.

Solució: Massa és volum per densitat.

$$\begin{aligned} M &= \int_B \lambda(1 + z^2) dV = \lambda \frac{4}{3} \pi 5^3 + \lambda \int_B z^2 dx dy dz \\ &= \lambda \frac{4}{3} \pi 5^3 + \lambda \int_0^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr \\ &= \lambda \frac{4}{3} \pi 5^3 + 5^4 \lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \lambda \frac{4}{3} \pi 5^3 + 5^4 \lambda \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = 8\pi \lambda 5^3. \end{aligned}$$

266. Es considera el camp $X = (M, N)$ a $\mathbb{R}^2$, calculeu la circulació de X al llarg de la corba C si

1. $M = xy, N = x^{3/2} + y^{3/2}$ i C és el quadrat amb vèrtexs $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.
2. $M = (x^2 + y^2)^{3/2} = N$ i C és el cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Solució: 1) Primer mètode. Observem que

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3}{2}x^{1/2} - x.$$

Si denotem per Q l'interior del quadrat, pel teorema de Green tenim

$$\int_{\partial Q} X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_Q \left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right) dx dy = \frac{1}{2}.$$

Segon mètode. Sigui $\gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_2(t) = (1, t), \gamma_3(t) = (1-t, 1), \gamma_4(t) = (0, 1-t), 0 \leq t \leq 1$, una parametrització del quadrat.

Llavors tenim

$$\int_{\gamma_1} X(\gamma_1(t)) \cdot (1, 0) dt = \int_{\gamma_1} (0, t^{3/2}) \cdot (1, 0) dt = 0.$$

Anàlogament,

$$\int_{\gamma_2} X(\gamma_2(t)) \cdot (0, 1) dt = \int_{\gamma_2} (t, 1 + t^{3/2}) \cdot (0, 1) dt = \frac{7}{5}.$$

$$\int_{\gamma_3} X(\gamma_3(t)) \cdot (-1, 0) dt = \int_{\gamma_3} (1-t, (1-t)^{3/2} + t^{3/2}) \cdot (-1, 0) dt = -\frac{1}{2}.$$

$$\int_{\gamma_4} X(\gamma_4(t)) \cdot (0, -1) dt = \int_{\gamma_4} (0, (1-t)^{3/2}) \cdot (0, -1) dt = -\frac{2}{5}.$$

Sumant tenim $0 + 7/5 - 2/5 - 1/2 = 1/2$, com volíem.

267. Considereu el camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per $X(x, y, z) = (x, y, 2z - x - y)$. Calculeu el flux d'aquest camp a través de les següents superfícies:

- (a) $S = \{x^2 + y^2 = 1, z \in (0, 1)\} \cup \{x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$
- (b) $S = \{x^2 + y^2 = z^2, z \in (1, 4)\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, z \in (0, 1)\}$
- (c) $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, a > 0$
- (d) $S = \{x + y - 2z = 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

Solució: a) Primer mètode. Directament. Denotem L el cilindre, T_0 la tapa de sota ($z = 0$) i T_1 la tapa de sobre ($z = 1$).

Sobre L :

$$\int_L X \cdot \nu dS = \int_L (x, y, 2z - x - y) \cdot (x, y, 0) dS = \int_L (x^2 + y^2) dS = \int_L dS = 2\pi.$$

Sobre T_0 :

$$\int_{T_0} X \cdot \nu dS = \int_{T_0} (x, y, 2z - x - y) \cdot (0, 0, -1) dS = \int_L (x + y) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \wedge dz = 0.$$

Hem suposat el cilindre parametritzat per $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$.

Així doncs,

$$\int_L X \cdot \nu dS + \int_{T_0} X \cdot \nu dS = 2\pi.$$

b) Segon mètode. Teorema de la divergència. Com $\operatorname{div} X = 4$, i el volum del cilindre massís C és π , tenim

$$\int_C \operatorname{div} X dV = 4\pi = \int_L X \cdot \nu dS + \int_{T_0} X \cdot (0, 0, -1) dS + \int_{T_1} X \cdot (0, 0, 1) dS.$$

Com

$$\int_{T_1} X \cdot (0, 0, 1) dS = \int_{T_1} 2 - x - y dx dy = \int_{T_1} 2 dx dy = 2\pi,$$

la integral demanada val

$$\int_L X \cdot \nu dS + \int_{T_0} X \cdot (0, 0, -1) dS = 4\pi - 2\pi = 2\pi.$$

d) Parametritzem per $\varphi(x, y) = (x, y, \frac{x+y}{2})$. Així $\varphi_x = (1, 0, 1/2)$, $\varphi_y = (0, 1, 1/2)$ i el vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Els coeficients de la primera forma fonamental són $E = G = 5/4$, $F = 1/4$. Per tant, l'element d'àrea és $dS = \sqrt{\frac{3}{2}} dx \wedge dy$. El flux val

$$\begin{aligned} \int_S (x, y, 2z - x - y) \cdot \nu dS &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_S (x, y, 0) \cdot (-1, -1, 2) dS \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Observem que si canviem ν per $-\nu$ el resultat final canvia de signe. Tal com està enunciat el problema no hi ha un argument que prioritzi un dels dos signes.

- 268.** Utilitzant el teorema de la divergència a $\mathbb{R}^n$ aplicat al camp radial proveu que el volum $(n-1)$ -dimensional de l'esfera de radi 1 és n vegades el volum n -dimensional de la bola unitat. Què succeeix quan el radi és r ?

Solució: Aplicació directa del teorema de la divergència al camp $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$. Si el radi és r , tenim $rV_{n-1}(S_r^{n-1}) = nV_n(B_r)$.

269. Comproveu que el flux del camp vectorial de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definit per

$$X(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

a través de boles centrades a l'origen és independent del seu radi.

Solució: El camp normal unitari a una bola centrada a l'origen en el punt $(x, y, z) \in B(O; R)$ és $\nu = \frac{1}{R}(x, y, z)$. El flux és doncs

$$\int_B X \cdot \nu dS = \frac{1}{R^4} \int_B (x, y, z) \cdot (x, y, z) dS = \frac{1}{R^4} \int_B R^2 dS = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi.$$

Capítol 11

Referència mòbil

- 270.** Calculeu la curvatura d'una superfície que té, respecte d'una certa parametrització (x, y) amb $y > 0$, primera forma fonamental

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Solució: Prenem la referència mòbil donada per una base ortonormal respecte d'aquest producte.

$$\begin{aligned} e_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} \\ e_2 &= y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Recordem que la notació $\frac{\partial}{\partial x}$ vol dir $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ on $\varphi = \varphi(x, y)$ és la carta local en la que ens han donat la superfície.

La base dual de la referència mòbil és

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{1}{y} dx \\ \theta^2 &= \frac{1}{y} dy. \end{aligned}$$

Les diferencials de la base dual

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -a \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= -b \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

En el nostre cas

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $a = -1$, $b = 0$.

La forma de connexió és

$$\omega_2^1 = a\theta^1 + b\theta^2.$$

Per tant, en el nostre cas

$$\omega_2^1 = -\theta^1.$$

L'equació d'estructura és

$$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2.$$

En el nostre cas

$$d\omega_2^1 = -d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^2.$$

Per tant $K = -1$.