Problemes d'àlgebra. Curs 01–02

Sistemes d'equacions lineals.

1. Resoleu els següents sistemes d'equacions:

(a) $$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+z &=& 12 \\ x+y-z &=& 1 \\ x+3y-z &=& 7 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z &=& 1 \\ x+z &=& -3 \\ x-y+z &=& 3 \end{array}\right\}$$

(c) $$\left.\begin{array}{rcr} 3x+y-z+t &=& -4 \\ x-2y+3z-2t &=& 2 \\ 2x+z+t &=& 0 \\ 9x-4y+7z-4t &=& -2 \end{array}\right\}$$

(d) $$\left.\begin{array}{rcr} x+y-2z+t+3u &=& 1 \\ 3x+3t+9u &=& 3 \\ 2x-y+2z+2t+6u &=& 2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u &=& 3 \\ 4x+3y-6z-2t-6u &=& 4 \end{array}\right\}$$

(e) $$\left.\begin{array}{rcr} \frac{1}{2}x+3y &=& 6 \\ x-y-z &=& 1 \\ -\frac{1}{2}x-4y-z &=& -3 \end{array}\right\}$$

(f) $$\left.\begin{array}{rcr} x &=& \sqrt{2}y \\ y &=& \sqrt{3}z \\ z &=& \sqrt{5}t \\ t &=& \sqrt{7}u \\ u &=& \sqrt{11}x+9 \end{array}\right\}$$

2. Contesteu les següents preguntes sobre el sistema (d) del problema anterior:

(a) Quantes equacions fan falta, com a mínim, per obtenir un sistema amb les mateixes solucions?

(b) Si suprimim la 2ª equació varien les solucions del sistema? I si suprimim la 1ª?

(c) Hi ha alguna solució en la qual $x = 2$? I amb $y = 5$?

(d) Hi ha alguna solució amb $x = 3,\ y = 7$? I amb $z = 0, t = 14$?

(e) Pot ser que al descriure les solucions del sistema es puguin prendre t, u com a paràmetres lliures? es podrien pendre y i t?

3. Considerem el següent sistema d'equacions lineals en funció d'un paràmetre a.

$$\begin{array}{rl} ax+2y+z &= a+2 \\ (a-3)x-(a+1)y+4z &= 2a-2 \\ 2x+ay-2z &= -2y \end{array}$$

(a) Doneu la matriu associada al sistema d'equacions anterior, i calculeu el seu rang en funció del paràmetre a.

(b) Per a quins valors de a aquest sistema d'equacions no té solució?

(c) Per a quins valors té més d'una solució? per a quins valors de a té el sistema només una sola solució?

(d) Per tots els casos que sigui possible, doneu la solució en funció de a.

4. Discutiu i resoleu els següents sistemes, en funció del valor dels paràmetres que hi intervenen:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & 1 \\ x+y+az & = & 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} ax-y & = & 0 \\ -x+ay-z & = & 0 \\ -y+az-t & = & 0 \\ -z+at-u & = & 0 \\ -t+au & = & 0 \end{array}\right\}$$

5. Suposem que les següents dades corresponent als quatre invariants d'uns sistemes d'equacions lineals, $(n, m, r, \overline{r})$ on $n =$ número d'incògnites, $m =$ número d'equacions, $r =$ rang del sistema, $\overline{r} =$ rang de la matriu ampliada. Per cadascun dels casos digueu si els nombres tenen sentit i, en cas afirmatiu, digueu el que pugueu sobre el sistema:

$$(2,2,2,3), (8,1,2,2), (2,1,1,1), (4,5,5,5), (5,4,4,4), (9,9,9,9), (2,1,0,1).$$

6. Un turista va viatjar per Europa i es va gastar 30 euros en allotjament per dia d'estada a Anglaterra, 20 euros a França i 20 a Alemanya. En menjar, el turista va gastar 20 euros diaris a Anglaterra, 30 a França i 20 a Alemanya. A més, per altres conceptes el turista va gastar 10 euros diares a cada un dels països. Quan va tornar va comprovar que havia gastat 340 euros en allotjament, 320 en aliments i 140 en despeses vàries. Calculeu el nombre de dies que el turista va passar a cada un dels països o bé demostreu que va calcular malament les despeses.

Càlcul matricial

7. Calculeu els productes: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

calculeu $(A+B)C$, $C(3A+2B)$, AC i CA. És cert que $AC = CA$?

9. Simplifiqueu l'expressió $(A+B-I_n)(A-B+I_n)+(A+2B)(B-A)$, on A i B són matrius $n \times n$.

10. Determineu x, y sabent que es compleix:

$$\begin{pmatrix} 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 11 & y & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ trobeu dues matrius quadrades no nul.les B i C tals que $AB = 0 = CA$. Pot ser que A sigui una matriu invertible?

12. Fixem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Doneu una matriu elemental E tal que al calcular el producte EA intercanviem la segona i la tercera fila de la matriu A?

(b) Doneu una matriu elemental E tal que producte EA sigui el de fer l'operació elemental de sumar a la primera fila de A quatre vegades la segona fila.

(c) Doneu una matriu elemental E tal que el producte EA sigui el resultat de multiplicar per $\frac{-2}{3}$ la segona fila de A.

(d) Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat d'intercanviar la segona i la tercera columna de la matriu A

(e) Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat de sumar $\frac{1}{4}$ vegades la primera columna de A a la tercera columna de A.

(f) Doneu una matriu elemental E tal que el producte AE sigui el resultat de multiplicar la tercera columna de la matriu A per -17.

(g) Calculeu la inversa de cadascuna les matrius elementals anteriors. Quines operacions elementals fan aquestes matrius que heu trobat.

13. Determineu el rang de les matrius següents i, en cas que siguin invertibles, calculeu la seva inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Trobeu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

i determineu totes les matrius X que satisfan l'equació

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Sigui A la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6-a-a^2 \\ 2 & 3a-1 & a^2-a-4 \\ 1 & 3a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}$ on a és un paràmetre real.

(a) Decidir per a quins valors del paràmetre la matriu A és invertible.

(b) Per a quins valors del paràmetre l'equació $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6+a \\ 6-a \end{pmatrix}$ és compatible?

(c) Per a quins valors del paràmetre el sistema homogeni $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ té alguna solució diferent de la $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$?

Determinants

16. Calculeu els següents determinants:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

17. Calculeu els següents determinants:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

18. Suposem que el determinat de la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ és diferent de zero. Calculeu l'expressió de A^{-1}.

19. Feu servir el determinant per decidir si les matriu següents són invertibles. En cas afirmatiu, calculeu la inversa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quin rang tenen les matrius anteriors?

20. Discutiu el següent sistema d'equacions segons el valor del paràmetre λ.

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z &= \lambda \\ x + y + z &= \lambda + 1 \end{aligned}\right\}$$

Espais vectorials

21. Quins dels següents conjunts són subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$?

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy + z = x\} \\
E_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + \pi y = 0\} \\
E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy = 0\} \\
E_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\} \\
E_5 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y = \sqrt{3}z\} \\
E_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 2xy + y^2 = 0\} \\
E_7 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = -1\} \\
E_8 &= \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \\
E_9 &= \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 x_2 = 0\} \\
E_{10} &= \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}
\end{aligned}
$$

22. Demostreu que les solucions d'un sistema d'equacions lineal homogeni són un subespai vectorial.

23. Considerem $M_n(\mathbb{R})$. Decidiu si els següents subconjunts són subespais vectorials:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A^2 = 0\}. \\
\mathrm{F} &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A = A^t\}. \\
\mathrm{G} &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A = -A^t\}.
\end{aligned}
$$

24. Quines de les següents famílies són $\mathbb{R}$–linealment independents?

(a) $\{(1,0),\ (-1,1),\ (0,\sqrt{2})\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{(1,0,0),\ (1,-1,1),\ (2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1,1,0,0),\ (1,2,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

(d) $\{x^3, x^2, x^3 - x^2 + 2\}$ de $\mathbb{R}[X]$.

(e) $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $\mathbb{R}[X]$ amb n fixada.

(f) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

Per a les famílies que no són linealment independents expresseu-ne un com a combinació lineal dels altres. Trobeu una base del subespai que generen.

25. Considerem $\{(1,0,-1,0),\ (1,1,1,0),\ (0,1,1,1),\ (0,1,2,0)\}$ una família de vectors de $\mathbb{R}^4$. Proveu que el vector $(0,3,5,1)$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors d'aquesta família de dues formes diferents. Què podem dir d'aquesta família de vectors?

26. Siguin $F =< (1,-1,1),(0,1,-1) >$ i $G =< (1,0,0),(1,-2,2) >$ subspais de $\mathbb{R}^3$.

(a) Proveu que $F = G$.

(b) Sigui $e = (9, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2})$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal de les dues famílies de vectors que generen F.

27. Trobeu la dimensió i una base de cadascun dels següents subspais vectorials sobre $\mathbb{R}$:

$E_1 =< (1,0,-1),\ (-2,0,3),\ (3,1,0),\ (0,0,1) >$

$E_2 =< (1,0,2,3),\ (2,0,4,1),\ (1,-1,0,0) >$

$E_3 =< (1,-1,0,1),\ (2,0,-1,1),\ (3,-1,-1,2),\ (0,2,-1,-1) >$

$E_4 = \{(x,y,z,t)\,|\, x = y - 3z,\ \ z = t\}$

$E_5 = \{(x,y,z)\,|\, x = y = z\}$

$E_6 = \{(x,y,z,t)\,|\, x + y = 3u,\ \ y - 3u = t,\ \ z = 3tx = -t\}$

28. Completar a una base de $\mathbb{R}^3$ cadascuna de les següents famílies:

(a) $\{(1,1,1),\ (7,0,0)\}$.

(b) $\{(5,1,4)\}$.

(c) $\{(1,2,3),\ (-1,0,0),\ (2,0,3)\}$.

(d) $\{(5,2,1),\ (-3,-2,1),\ (2,0,2)\}$.

29. Proveu que $\mathbb{R}^2 =< (0,1) > + < (1,1) >=< (0,1) > + < (2,1) >$. Trobeu tots els vectors (a,b) tals que $\mathbb{R}^2 =< (0,1) > + < (a,b) >$.

30. Trobeu una base i la dimensió dels subespais de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rcl} F & = & < (1,0,-1,1),\ (1,1,0,9),\ (2,1,-1,10) > \\ G & = & < (0,0,0,1),\ (1,-1,0,1),\ (-1,1,0,3),\ (0,0,1,7) > . \end{array}$$

Trobeu també una base i la dimensió de $F \cap G$ i $F + G$.
És cert que $F + G = \mathbb{R}^4$?

31. Demostreu que

$$v_1 = (1,1,0,0) \qquad v_2 = (0,0,1,1) \qquad v_3 = (1,0,0,4) \qquad v_4 = (0,0,0,2)$$

formen una base de $\mathbb{R}^4$

(a) Calculeu les components del vector $(1,0,2,-4)$ en aquesta base.

(b) Determineu les components d'un vector arbitrari en aquesta base.

32. Trobeu la fórmula que relaciona les components d'un vector de $\mathbb{R}^3$ en la base formada per

$$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (0,1,1) \qquad e_3 = (0,0,1)$$

amb les del mateix vector en la base

$$v_1 = (0,1,1) \qquad v_2 = (1,0,1) \qquad v_3 = (1,1,0)$$

33. Considereu la base de $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Doneu les matrius de canvi de base de $\mathcal{B}$ a la canònica i viceversa. Quines són les components de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$?

Aplicacions lineals

34. Quines de les següents aplicacions entre $\mathbb{R}$-espais vectorials són lineals?

(a) De $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$: $f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

(b) De $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$: $f(x,y,z) = xy + xz + yz$
$g(x,y,z) = x + 1 - y$
$h(x,y,z) = x + y + z$

(c) De $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$: $f(x,y) = (x - y, 2x, y - 3x, y)$

35. Siguin f i g les següents aplicacions de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (x - y, 2x + y) \;\text{ i }\; g(x,y) = (y - 2x, x + y).$$

(a) Proveu que són endomorfismes.

(b) Calculeu $(f \circ g)(1,0)$, $(g \circ f)(1,0)$, $(f + g)(1,0)$, $(2f + g)(1,0)$ i $f^2(1,0)$.

(c) Obteniu l'expressió general de $(f \circ g)(x,y)$ i de $(g \circ f)(x,y)$.

(d) Calculeu $f^{-1}(\{(1,0)\})$.

36. Escriviu les matrius associades a cadascuna de les següents aplicacions lineals, respecte a les bases canòniques. Utilitzant la matriu, trobeu la dimensió i una base de $\ker f$ i de $\mathrm{Im} f$, i discutiu a cada un dels casos la injectivitat i exhaustivitat.

(a) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x - 2y, 3x + y, 4y) \end{array}$

(c) $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, x-z, 4z, 0) \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z, -y+z+t, x+3y+z+2t, y-z+t) \end{array}$$

Per l'aplicació de l'apartat (c) trobeu $f^{-1}(W)$ essent $W =< (1,0,4,0) > \subset \mathbb{R}^4$.

37. Considereu les següents aplicacions:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x) \end{array}$$

Sigui $\mathcal{B}_1$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_2$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$, i siguin $\mathcal{B}_3 = \{(1,2),(-1,1)\}$ a $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,-1),(4,0,3),(1,1,0)\}$ a $\mathbb{R}^3$.

(a) Proveu que f i g són lineals.

(b) Proveu que $\mathcal{B}_3$ i $\mathcal{B}_4$ són bases de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ respectivament.

(c) Trobeu la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B}_2$ de sortida i $\mathcal{B}_1$ d'arribada.

(d) Trobeu la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B}_4$ de sortida i $\mathcal{B}_1$ d'arribada.

(e) Trobeu la matriu associada a g en les bases $\mathcal{B}_1$ de sortida i $\mathcal{B}_3$ d'arribada.

(f) Trobeu la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B}_4$ de sortida i $\mathcal{B}_3$ d'arribada.

(g) Trobeu la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques.

38. Considerem els triangles T i T' de vèrtexs $(0,0),(1,3),(4,2)$ i $(0,0),(2,1),(1,1)$, respectivament.

(a) Raoneu que existeixen aplicacions lineals bijectives de $\mathbb{R}^2$ que transformen T en T'.

(b) Doneu dues aplicacions lineals diferents que transformin T en T', i dues més que transformin T' en T.

39. Determineu si existeixen aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ que compleixin les següents condicions i, en cas afirmatiu, determineu si n'hi ha una o més d'una i doneu la fòrmula explícita d'un exemple.

(a) $f(-1,-1,1) = (-1,5)$, $f(-2,2,-2) = (2,-10)$, $f(0,-1,0) = (3,-15)$.

(b) $g(1,2,-1) = (-1,5)$, $g(1,1,-1) = (2,-10)$, $g(0,-1,0) = (3,4)$.

(c) $h(1,2,-1) = (-1,5)$, $h(1,1,-1) = (2,-10)$, $h(0,-1,0) = (3,-15)$.

Diagonalització

40. Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els vectors propis dels endomorfismes següents:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per $f(x,y,z) := (-2x-2y+z, -2x+y-2z, x-2y-2z)$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per $g(x,y,z) := (4x-5y+2z, 5x-7y+3z, 6x-9y+4z)$.

(c) $h\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definit per $h(x,y,z,t) := (x+3y, 4x+2y, x-y+5z-3t, 2x+4z-2t)$.

(d) $l\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definit per $l(x,y,z,t) := (x+ay, y, z, t)$, on a és un paràmetre real.

Decidiu, en cada cas, si l'endomorfisme diagonalitza.

41. Comproveu que la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$
diagonalitza. Calculeu A^{100} explícitament.

42. Siguin A i B les matrius
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 10 & -1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculeu els valors propis de A i de B.

(b) Calculeu una base dels subespais de vectors propis per a cada valor propi de A i de B.

(c) Doneu una expressió per a A^n en funció de n per a tot $n \geq 1$.

43. Comproveu que la matriu següent sempre diagonalitza.
$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & -b \end{pmatrix}$$

44. Trobeu una matriu B tal que
$$B^2 = A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

45. Determineu quines de les matrius següents són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalitzi l'endomorfisme associat.
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$