

Eines informàtiques (MAPLE)

Pràctica 1

Matemàtiques per a ensenyants, curs 2002-2003.

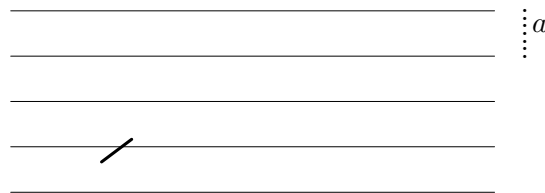
1 Simulació

Avui estudiarem la simulació de problemes amb ordinador. Sovint quan un problema és molt complex o bé no se sap com resoldre'l una manera d'abordar-lo és mitjançant una simulació. D'aquesta manera trobarem una aproximació del resultat que busquem. Òbviament després necessitarem eines matemàtiques i estadístiques per a saber com de bo és aquest resultat, és a dir, com d'aproximat és al resultat real. Avui però no tractarem aquesta segona qüestió.

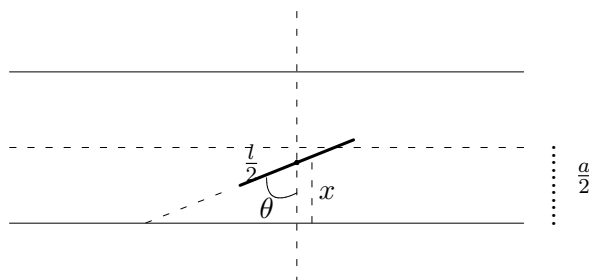
Veurem que una simulació basada en el comportament aleatori necessita d'un mecanisme per generar seqüències d'esdeveniments, on cada seqüència obeeix una llei de probabilitat que regula algun aspecte determinat del comportament aleatori en qüestió. Una que apareix sovint en els treballs de simulació és la que suposa que els esdeveniments dins la seqüència són independents i estan idènticament distribuïts. En els exemples que tractarem avui, seguiran una distribució uniforme contínua i una distribució uniforme discreta.

1.1 El problema de l'agulla de Buffon

Tirem una agulla de longitud l sobre un camp ratllat on la separació entre les ratlles és a . Quina és la probabilitat que l'agulla talli alguna ratlla? (Suposem $l < a$).



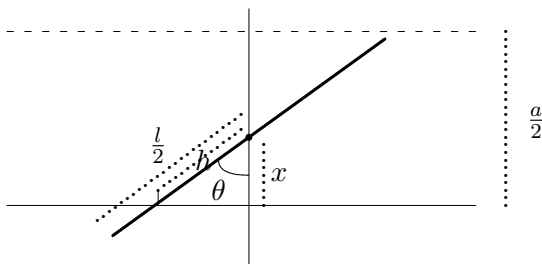
La posició de l'agulla ve donada per la posició x del seu centre de masses i per l'angle θ que forma amb la vertical.



Per raons de simetria podem suposar que $x \in [0, \frac{a}{2}]$ i $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. És a dir,

$$\Omega = [0, \frac{a}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

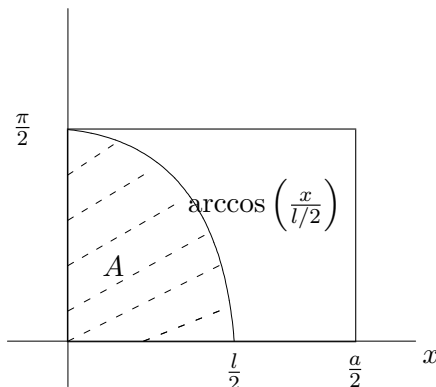
La regió favorable a que l'agulla talli alguna ratlla correspondrà als punts (x, θ) on $x \in (0, \frac{l}{2})$ (observeu que si $\frac{l}{2} < x < \frac{a}{2}$ no podrà tallar), i anem a veure quina és la condició que ha de satisfer l'angle per tal que l'agulla pugui tallar.



$\cos \theta = \frac{x}{h}$ i cal que $h < \frac{l}{2}$, és a dir, cal que $\frac{x}{\cos \theta} < \frac{l}{2}$, per tant, $\frac{x}{l/2} < \cos \theta$ i com que l'arccosinus és una funció decreixent,

$$\theta < \arccos \left(\frac{x}{l/2} \right).$$

Gràficament, els parells (x, θ) pels quals l'agulla talla corresponen a la regió ratllada A:



Lavors, si anomenem B l'esdeveniment "l'agulla talla",

$$\begin{aligned}
 P(B) = \frac{\text{Àrea}(A)}{\text{Àrea}(\Omega)} &= \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \int_0^{\arccos\left(\frac{x}{\frac{l}{2}}\right)} d\theta dx}{\frac{a \cdot \pi}{4}} \\
 &= \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \arccos\left(\frac{x}{\frac{l}{2}}\right) dx}{\frac{a \cdot \pi}{4}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot l}{\frac{a \cdot \pi}{4}} \\
 &= \frac{2 \cdot l}{a \cdot \pi}.
 \end{aligned}$$

Per a calcular $\int_0^{\frac{l}{2}} \arccos\left(\frac{x}{\frac{l}{2}}\right) dx$ utilitzeu el manipulador algebraic *Maple*.

En el cas particular que $l = a$, és a dir que la longitud de l'agulla coincideix amb la distància entre les línies, tenim que

$$P(B) = \frac{2}{\pi},$$

i per tant, podem obtenir una aproximació del nombre π llançant molts cops una agulla i comptant el nombre de cops que talla.

Concretament, considerem m , el nombre de cops que l'agulla toca alguna de les línies paral·leles (en la simulació que veurem, quan passarà això l'agulla serà de color vermell, en cas contrari l'agulla serà de color blau) i n , el nombre de cops que s'ha llançat l'agulla. Aleshores, la proporció $X = m/n$, és una estimació de la probabilitat que una agulla llançada a l'atzar toqui alguna de les línies. D'altra banda, resolent de forma teòrica el problema, hem vist que aquesta probabilitat és $\frac{2}{\pi}$. Per tant si considerem el quocient $\frac{2}{X} = \frac{2n}{m}$, obtindrem una aproximació del nombre π .

Entreu a la pàgina web següent per veure una simulació del problema:

<http://mat.uab.es/bardina/buffon.html>

Llanceu, per exemple, 11 agulles. Si ho aneu repetint, veureu que algun dels cops obtenim 7 agulles que tallen de les 11 llançades. De fet, aquest és el valor concret més probable, i ens dóna una aproximació de π igual a:

3.142857143

que és força bona tenint en compte que només hem llançat 11 agulles!

Entreu a aquesta altra pàgina on hi ha un applet que permet veure com es va aproximant π a mesura que anem llançant agulles:

<http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html>

A continuació veurem com es fa per realitzar una simulació d'aquest tipus utilitzant el *Maple*. Prenem la longitud de l'agulla l igual a la distància entre línies a i igual a 1, és a dir, $l = a = 1$.

Observeu que el que hem de fer és generar de manera aleatòria les posicions del centre de masses de l'agulla. La comanda que ens ho permet fer és la següent:

```
> x:=stats[random,uniform[0,0.5]](11);
```

Això ens genera una llista de mida 11 de nombres aleatoris entre 0 i 0'5. És a dir, 11 nombres distribuïts segons una llei uniforme a l'interval $[0, 0'5]$.

Ara, hem de generar l'angle que han de formar les agulles amb la vertical. Recordeu que això correspon a una llei uniforme a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, per tant,

```
> theta:=[stats[random,uniform[0,Pi/2]](11)];
```

Tenim per tant dues llistes, la primera ens dona la posició del centre de masses i la segona l'angle que formen amb la vertical. A continuació hem de comptar quantes d'aquestes agulles tallen alguna línia. Recordeu que si anomenàvem x la posició i θ l'angle, la condició per a que l'agulla talli ve donada per $\theta < \arccos(\frac{x}{l/2})$.

El que farem serà fer un petit programa que ens vagi mirant si aquesta condició se satisfà o no i ens compti el nombre d'agulles que tallen m :

```
> m:=0;
for i from 1 to 11 do;
if theta[i]<arccos(x[i]*2) then m:=m+1;
end if;end do;
pi:=2*11/m;
print(tallen,m,aproximacioPi,evalf(pi));
```

Estudieu detalladament el que fa aquest petit programa pas a pas, i modifiqueu tots els passos adequadament per a obtenir l'aproximació de π simulant 355 llançaments, i 1420 llançaments.

1.2 Canviar o mantenir-se

En un concurs el presentador sempre actua de la següent forma: tenim 3 portes, darrera una de les quals hi ha un cotxe, escollim una porta a l'atzar, el presentador ens ensenya una porta de les altres dues que està buida i ens dona l'oportunitat de canviar. Què és millor canviar o mantenir-se?

Es pot veure que la probabilitat de guanyar si no canviàvem l'elecció és de $\frac{1}{3}$ mentre que si canviem tenim una probabilitat de guanyar de $\frac{2}{3}$. Calcularem ara de forma aproximada aquesta probabilitat a partir d'una simulació.

En primer lloc hem d'escollir una llista de mida 20 que correspondrà a la nostra elecció de portes. Ens la podem inventar, per exemple:

```
> escollim:=[2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 1, 1];
```

o fem que la generi la màquina aleatòriament, és a dir, fem que generi una mostra de mida 20 d'una variable amb distribució uniforme discreta dels nombres 1, 2 i 3:

```
> escollim:=[stats[random,discreteuniform[1,3]](20)];
```

Anem ara a fer el "sorteig" d'on està realment amagat el cotxe:

```
> cotxe:=[stats[random,discreteuniform[1,3]](20)];
```

Fem ara un petit programa que ens digui quina serà la porta que ens ensenyarà el presentador:

```
> ensenya:=[]:
for i from 1 to 20 do;
if escollim[i]<>1 and cotxe[i]<>1 then ensenya:=[op(ensenya),1]
```

```

elif escollim[i]<>2 and cotxe[i]<>2 then ensenya:=[op(ensenya),2]
else ensenya:=[op(ensenya),3];
end if;end do;
print(ensenya);

```

La nova llista correspon a la porta que ens ensenya el presentador i que no conté el cotxe.

Finalment calculem en quants d'aquests sorteigs guanyem i en quants perdem segons si canviem l'elecció o no:

```

> c:=0;d:=0;
for i from 1 to 20 do;
if escollim[i]=cotxe[i] then c:=c+1 else d:=d+1;
end if; end do;
print(nocanvio,c/20,canvio,d/20);

```

Estudieu bé com funciona aquesta simulació i modifiqueu tots els passos adequadament per a obtenir l'aproximació de les dues probabilitats simulant 1000 sorteigs.

1.3 El problema dels dos amics

Dos amics van a dinar al mateix restaurant, de manera independent l'un de l'altre, en un instant escollit a l'atzar entre la una i les dues. Quan arriben estan mitja hora dinant i se'n van. Quina és la probabilitat que realment es trobin?

Cada un des dos amics arriba en un instant entre la una i les dues, per tant podem considerar les variables X i Y que siguin la fracció d'hora en que arriba cada un d'ells. I els dos amics es trobaran si la diferència és menor de mitja hora.

Així doncs heu de generar dues mostres de variables uniformes X i Y en l'interval $[0,1]$. I aleshores fer un petit programa que us compti en quants dels casos generats $|Y - X| \leq \frac{1}{2}$ i feu la proporció entre els cops que els dos amics es troben i la mida de la mostra per aproximar aquesta probabilitat.

Feu-ho primer per una mostra de mida 100 i després per una de mida 1000.

1.4 El problema dels segments i el triangle

Una barra de longitud 1 es trenca per dos punts escollits a l'atzar, quina és la probabilitat que amb els tres segments que s'obtenen es pugui formar un triangle?

Per resoldre aquest problema escollim dos punts a l'atzar entre 0 i 1, mirem quin és el més gran i a partir d'aquí sabem la longitud dels tres segments. Recordem que donats tres segments, per a que puguin formar un triangle cal que agafats de dos en dos, la suma de les longituds dels dos segments sigui més gran que la longitud del tercer segment.

Generem per tant una mostra U uniforme $[0,1]$ i una mostra V uniforme $[0,1]$. Podem ara considerar X el mínim i Y el màxim per cada índex. Per tant per cada índex i , les longituds dels tres segments són $1 - Y[i]$, $Y[i] - X[i]$ i $X[i]$. I ara hem de comptar en quants casos se satisfà la condició que agafats els segments de dos en dos la suma de les seves longituds és més gran que la longitud del tercer segment.

Feu-ho primer per una mostra de mida 100 i després per una de mida 1000.

1.5 Quadrat i circumferència

Escollim un punt x a l'atzar entre 0 i 1, i dibuixem un quadrat de longitud x i una circumferència de radi $1 - x$. Calculeu la probabilitat que l'àrea de la circumferència sigui més gran que l'àrea

del quadrat.

Feu una simulació del problema amb una mostra de mida 1000.

Anem ara a complicar una mica més el problema:

Suposem ara que escollim un punt x a l'atzar entre 0 i 1, i dibuixem un quadrat de longitud el segment més gran entre x i $1 - x$, i una circumferència de radi el segment més petit entre x i $1 - x$. Calculeu de nou la probabilitat que l'àrea de la circumferència sigui més gran que l'àrea del quadrat.

Feu una simulació de mida 1000 d'aquest problema.

1.6 Solucions

1.6.1 Problema dels dos amics

```
> X:=stats[random,uniform[0,1]](1000);
> Y:=stats[random,uniform[0,1]](1000);
> c:=0;for i from 1 to 1000 do;if X[i]-Y[i]<=0.5 and X[i]-Y[i]>=-0.5 then c:=c+1 end if;end do;print(evalf(c/1000));
```

1.6.2 Problema dels costats i el triangle

```
> U:=stats[random,uniform[0,1]](100);
> V:=stats[random,uniform[0,1]](100);
> X:=[]:Y:=[]:for i from 1 to 100 do: Y:=[op(Y),max(U[i],V[i])]: X:=[op(X),min(U[i],V[i])]: end do;print(X,Y);
> c:=0;for i from 1 to 100 do: if (1-Y[i])+(Y[i]-X[i])>X[i] and (1-Y[i])+X[i]>(Y[i]-X[i]) and (Y[i]-X[i])+X[i]>(1-Y[i]) then c:=c+1; end if; end do; print(evalf(c/100));
```

1.6.3 Quadrat i circumferència

```
> X:=stats[random,uniform[0,1]](1000);
> c:=0;for i from 1 to 1000 do;if (X[i])^ 2<evalf(Pi*(1-X[i])^ 2) then c:=c+1:end if;end do;print(evalf(c/1000));
> c:=0;for i from 1 to 1000 do;if (max(X[i],1-X[i]))^ 2<evalf(Pi*(min(1-X[i],X[i]))^ 2) then c:=c+1:end if;end do;print(evalf(c/1000));
```

La solució exacta al primer apartat del problema és $\frac{\pi-\sqrt{\pi}}{\pi-1}$, i la del segon apartat és $\frac{\pi+1-2\sqrt{\pi}}{\pi-1}$.