Eines informàtiques (MAPLE)

Pràctica 3

Matemàtiques per a ensenyants, curs 2002-2003.

3 Gràfics

En aquesta secció aprendreu com dibuixar el gràfic d'una funció definida per una expressió. Altres temes que hi podreu trobar inclouen: combinar gràfics de diferents expressions en un únic dibuix, representar punts, i combinar diferents estructures gràfiques en un únic dibuix. Recordeu fer

necordeu lei

> restart;

si veniu de fer altres càlculs.

3.1 Representar una expressió: la comanda plot

Exemple 3.1

Utilitzem la comanda plot () per a dibuixar el gràfic de $3x^2 - 8$ per a x entre -5 i 5.

> plot(3*x²-8,x=-5..5);

Observeu que Maple posa l'escala de l'eix de les y de manera automàtica, triant l'escala de les y que mostra tot el gràfic que correspon al domini que s'ha especificat. Podem eliminar l'elecció automàtica de l'escala de les y especificant a part del rang de les x un rang per a les y. En la línia següent hem limitat el rang de les y a l'interval [-20, 40].

> plot(3*x²-8,x=-5..5,-20..40);

Si feu clic amb el botó esquerre del ratolí, el gràfic queda seleccionat i la barra d'opcions inferior es modifica. Ara quan feu clic en el gràfic, les coordenades del punt del lloc on ho feu es veuran en la finestra de l'esquerra. El botó 1:1 fa que les escales de les x i de les y siguin iguals. Podeu experimentar sobre el gràfic anterior les diferents opcions possibles.

Exemple 3.2

L'escala automàtica és una característica útil però hi ha cops en els que necessitarem especificar manualment el rang de les y. Per exemple l'escalat automàtic no és apropiat per a gràfics amb asímptotes verticals. Compareu els dos gràfics següents. Noteu que hem fixat els límits per a les y a l'interval [-20, 20] en la segona comanda plot().

- > plot(x/(x-2),x=-5..5);
- > plot(x/(x-2),x=-5..5,-20..20);

Exemple 3.3

Dibuixarem el gràfic de $y = x^3 + 1 - e^x$ en el domini [-8, 8]. Triarem un rang per a les y que permeti veure els quatre talls amb l'eix de les x. Primer doneu un cop d'ull al gràfic amb l'escala automàtica per a les y.

> plot(x^3+1-exp(x),x=-8..8);

Com que els valors de les y a prop de 8 són negatius i molt grans en valor absolut, l'escala vertical ha hagut de ser massa gran i no es poden veure clarament els talls amb l'eix de les x. S'obté una visió molt millor restringint els límits en el rang de les y.

```
> plot(x<sup>3</sup>+1-exp(x),x=-8..8,-5..15);
```

Exercici 3.1

Dibuixeu $y = \sin(x)$ per a dos períodes complets.

Exercici 3.2

Dibuixeu $y = 3x^4 - 6x^2$ per al domini [-10, 10] amb escala automàtica per a les y. Després d'observar el gràfic, editeu el domini i el recorregut per tal de veure els talls amb l'eix de les x clarament. Feu una estimació dels talls amb l'eix de les x amb el cursor.

3.2 Representar differents expressions

Per a mostrar més d'un gràfic en el mateix dibuix feu-ne la llista dins de claudàtors [] separant-los per comes.

> plot([cos(x),x^2],x=-1..4,y=-4..4);

Noteu que cada un dels gràfics es mostra utilitzant un color diferent. Podeu especificar els colors per a cada funció afegint una opció de color al final de la comanda. Els colors s'assignaran en el mateix ordre que el de les funcions. Fixeu-vos que la llista dels colors també es fa amb uns claudàtors []. Aquí hi ha un exemple.

> plot([cos(x),x²],x=-1..5,y=-4..4,color=[blue,black]);

Aquests són els colors disponibles en Maple (s'han d'escriure en anglès, no val posar groc).

aquamarine	coral	green	magenta	plum	turquoise	yellow
black	cyan	gray	maroon	red	violet	
blue	brown	grey	orange	sienna	wheat	
navy	gold	khaki	pink	tan	white	

Taula 1: Colors disponibles per a comandes plot()

Exercici 3.3

Feu junts els gràfics de les funcions $y = x^2 - 5x + 6$ i $y = \frac{1}{(x-2)^2}$. Experimenteu amb diferents rangs per a les y de forma que es puguin veure dibuixos complets dels dos gràfics.

3.3 Representar punts

La comanda plot() pot dibuixar també un o més punts.

Exemple 3.4

Dibuixem el punt (2,3). Noteu en la línia següent que utilitzem dos jocs de claudàtors.

> plot([[2,3]],style=point);

Exemple 3.5

Podem controlar la mesura dels rangs per a les x i per a les y afegint aquesta informació a la comanda com en la línia següent.

> plot([[2,3]],x=-7..7,y=-7..7,style=point);

Exemple 3.6

Per a dibuixar més d'un punt fem una llista dins la comanda plot() (observeu les comes). Recordeu que s'ha de posar un parell de claudàtors per cada punt i un parell extra envoltant la llista.

> plot([[2,3],[-2,5],[1,-4]],x=-7..7,y=-7..7,style=point);

Exemple 3.7

Canviant l'estil a "line" es connecten els punts conservant l'ordre de la llista.

> plot([[2,3],[-2,5],[1,-4]],x=-7..7,y=-7..7,style=line);

Exemple 3.8

Es poden utilitzar declaracions opcionals per a especificar el color dels punts i el símbol que es fa servir (per exemple "diamond", "circle" i "cross", que és el que hi ha per defecte) per a representar-los.

> plot([[3,2],[-2,3],[2,-1]],style=point,color=blue,symbol=circle);

Exercici 3.4

Dibuixeu els punts següents utilitzant el color vermell i el símbol "diamond": [1, 4], [-2, -3], [4, -5] i [-6, 5]. Després connecteu els punts amb línies rectes amb una comanda plot() a part.

3.4 Combinar gràfics d'expressions i punts: la comanda display

Un *paquet* especial de dibuix anomenat **plots** conté moltes més possibilitats gràfiques. Per a utilitzar les seves comandes, necessiteu executar la línia següent que *carrega* **plots**. Recordeu que els dos punts al final de la línia fa que la línia es pugui executar sense mostrar cap resultat. Per a poder veure el contingut de **plots** podeu substituir els dos punts per un punt i coma.

> with(plots):

La comanda display() permet combinar gràfics d'expressions i de punts en el mateix dibuix. El primer pas consisteix en nomenar individualment cada un dels components del dibuix. Important: Ens hem d'assegurar que utilitzem uns dos punts al final de cada línia per a suprimir la presentació dels resultats (mireu les tres primeres línies que hi ha a sota). La comanda display() s'utilitza ara per a fer el dibuix que volem (acaba amb un punt i coma).

- > pict1:=plot([-3*x+5,9-x^2],x=-3..5,color=[green,red]):
- > pict2:=plot([[-1,8],[4,-7]],style=point,color=blue,symbol=circle):
- > display([pict1,pict2]);

De forma alternativa podem fer la llista d'aquestes tres comandes plot() relacionades en un sol grup d'execució escrivint MAJÚSCULES-RETORN al final de cada línia.

> pict1:=plot([-3*x+5,9-x^2],x=-3..5,color=[green,red]): pict2:=plot([[-1,8],[4,-7]],style=point,color=blue,symbol=circle): display([pict1,pict2]);

Exercici 3.5

Feu un gràfic que contingui a l'hora el gràfic de la funció $y = x^2 + x - 6$ i les seves interseccions amb l'eix de les x i el de les y marcades amb un cercle.

3.5 Gràfics al pla d'expressions paramètriques

Tot i que ja donen força joc, els gràfics del pla de la forma y = f(x) no deixen de ser els més simples de tots. En general, una corba del pla es descriu per una expressió de la forma (x(t), y(t)) on t és un paràmetre real. Per exemple, les el·lipses de centre l'origen i eixos els eixos de coordenades són les corbes de la forma $(a \cos(t), b \sin(t))$ amb $t \in [0, 2\pi]$ i a, b valors positius. Per a fer un gràfic d'una d'aquestes el·lipses es pot utilitzar la comanda plot de la forma següent:

> plot([2*cos(t),3*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained);

per a dibuixar una amb semieixos 2 i 3, o posar

```
> plot([4*cos(t),4*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained);
```

per a dibuixar la circumferència de radi 4.

Exercici 3.6

Quina corba descriu la parametrització $\{x(t) = t\cos(2\pi t), y(t) = t\sin(2\pi t)\}$

3.5.1 Coordenades polars

Per a determinar corbes del pla s'utilitzen sovint les coordenades polars (r = distància d'un punt a l'origen, $\theta = \text{angle entre la línia horitzontal i la recta que uneix l'origen i el punt}$). Concretament, sovint tenim una corba descrita com $r = f(\theta)$. Dins el paquet **plots** disposeu de la comanda **polarplot()** que fa el gràfic corresponent sense cap altre manipulació. Per exemple, l'espiral $r = 2\theta$ es pot fer amb:

```
> with(plots):
```

```
> polarplot(2*theta,theta=0..3*Pi);
```

Teniu en compte que, com que les coordenades rectangulars s'obtenen a partir de les coordenades polars d'una forma prou simple $(x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta))$, també es podria haver fet

> plot([2*theta*cos(theta),2*theta*sin(theta),theta=0..3*Pi]);

per a obtenir el mateix gràfic.

També resulta fàcil combinar diferents gràfics en un de sol per la comanda polarplot(). Per exemple

> with(plots):

```
> polarplot([2*theta,10*cos(5*theta)],theta=0..3*Pi);
```

dibuixarà l'espiral anterior i una flor de cinc pètals a sobre.

3.6 Gràfics al pla definits implícitament

Quan es vol fer el gràfic d'una corba del pla determinada per una equació de la forma f(x, y) = 0 i no es pot aïllar una de les variables en funció de l'altre, ni tampoc es disposa d'una parametrització, també es pot obtenir un gràfic amb la comanda implicitplot() del paquet **plots**. Per exemple la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$ es pot veure amb

implicitplot(x^2-y^2=1,x=-2..2,y=-2..2); >

No cal que espereu miracles respecte aquesta funció, hi pot haver moltes corbes que siguin difícils de representar a partir de la seva equació. Per exemple

implicitplot(y^2-x^3-x^2,x=-1..1,y=-1..1);

no dóna un gràfic que passi per (0,0) sense una mica més d'ajuda.

3.7Opcions de la comanda plot

En alguns dels exemples d'utilització de la comanda plot ja heu vist que després de l'expressió que es vol representar i els límits de la variable i els valors es poden afegir opcions. Les opcions que poden sortir en un gràfic del pla són:

adaptive	filled	legend	scaling	tickmarks
axes	font	linestyle	style	title
axesfont	labels	numpoints	symbol	titlefont
coords	labeldirections	resolution	symbolsize	view
discont	labelfont	sample	thickness	xtickmarks

Taula 2: Opcions de la comanda plot()

Busqueu en l'ajuda de Maple (?plot[options]) quina és la funció de cada una d'elles. En particular, podreu trobar com aconseguir que implicitplot() dibuixi una mica millor alguns dels gràfics que li donen problemes.

3.8Gràfics a l'espai

La comanda bàsica pera fer el gràfic d'una funció de dues variables f(x,y) és plot3d(). S'utilitza de la mateixa manera que plot() i l'únic que s'ha de tenir en compte és que no es pot deixar d'explicitar els marges de variació de les dues variables (x, y). A continuació podeu provar els següents exemples:

Exemple 3.9

- plot3d(exp(-(x^2+y^2-1)),x=-2..2,y=-2..2); plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
- >

Observareu que, igual que en el cas dels gràfics en el pla, quan seleccioneu un gràfic dels que acabeu de fabricar, apareixen nous botons en el menú del programa que permeten canviar les opcions de visualització de la figura. És particularment interessant la possibilitat de *qirar* el gràfic per a observar-lo des de diferents punts de vista (seleccionar i moure el cursor). També podreu observar que, amb el gràfic seleccionat, el botó dret fa que surti un menú des del que també es poden realitzar aquestes modificacions. La majoria d'aquests efectes també es poden obtenir afegint opcions a la comanda plot3d() que executeu.

3.8.1Gràfics paramètrics

Quan l'objecte de l'espai que voleu dibuixar no és el gràfic d'una funció sinó que el que teniu és una parametrització respecte dues variables (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) també es pot utilitzar plot3d() de la forma següent:

Exemple 3.10

```
plot3d([sin(u)*cos(v), sin(u)*sin(v), cos(u)]
```

,u=-Pi..Pi,v=-Pi/2..Pi/2); plot3d([u*cos(v),u*sin(v),v],u=-4..4,v=-2*Pi..2*Pi);

Exercici 3.7

Feu un gràfic en el que surti l'esfera de radi 1 centrada a l'origen i al mateix temps el cilindre obtingut considerant els punts (x, y, z) amb (x, y) a la circumferència de centre $(0, \frac{1}{2})$ i radi $\frac{1}{2}$ i la coordenada z arbitrària. Com és la intersecció d'aquestes dues superfícies?

Si el que es vol aconseguir és una corba de l'espai (x(t), y(t), z(t)), s'ha de carregar el paquet **plots** i utilitzar la comanda spacecurve().

Exemple 3.11

spacecurve([3*cos(v),3*sin(v),v],v=-2*Pi..2*Pi); fa el gràfic d'una hèlix.

3.8.2 Corbes de nivell

Un altre tipus de gràfics que dóna informació interessant sobre les funcions de dues variables és el gràfic de les seves corbes de nivell. Dins el paquet **plots** es pot fer servir la comanda **contourplot()** com en l'exemple següent:

Exemple 3.12

- > contourplot(sin(x)+sin(y),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2*Pi..2*Pi,
- filled=true,coloring=[red,green],scaling=constrained);

on s'observen les corbes de nivell de l'expressió $\sin(x) + \sin(y)$ colorejades en diferents tons de vermell i verd segons els diferents valors que va prenent l'expressió en cada una de les regions.

Relacionada amb les corbes de nivell, també es disposa de la comanda contourplot3d() en el paquet **plots** que marca sobre el gràfic tridimensional d'una funció les diferents corbes de nivell.

Exemple 3.13

- > contourplot3d(sin(x)+sin(y),x=-2*Pi..2*Pi,y=-2*Pi..2*Pi,
- > filled=true,coloring=[red,green],scaling=constrained);

3.8.3 Superfícies definides implícitament

A vegades les superfícies que es volen visualitzar no tenen un parametrització senzilla sinó que venen donades de forma implícita. Com per les corbes del pla determinades implícitament, podem dibuixar una aproximació del gràfic de la superfície determinada per f(x, y, z) = 0 amb la comanda implicitplot3d() del paquet **plots**.

Exemple 3.14

```
> implicitplot3d(x<sup>2</sup>+y<sup>2</sup>-z<sup>2</sup>=1,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
> implicitplot3d(x<sup>2</sup>-y<sup>2</sup>-z=1,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

Nota: Com en el cas de la comanda implicitplot(), no espereu miracles. Si voleu dibuixar una regió d'una superfície en la que hi ha singularitats o *porqueries* complicades el resultat pot ser que no sigui del tot satisfactori.

Exercici 3.8

Feu un gràfic del con $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en el que es vegi la punxa en (0, 0, 0).

3.8.4 Opcions dels gràfics a l'espai

Com en el cas de gràfics al pla, ja heu vist en els exemples anteriors que es poden modificar aspectes d'un gràfic de l'espai modificant algunes de les opcions de visualització. La llista de totes les opcions comuns a tots els gràfics a l'espai és:

ambientlight	filled	labels	projection	thickness
axes	font	light	scaling	tickmarks
axesfont	grid	lightmodel	shading	title
color	gridstyle	linestyle	style	titlefont
contours	labeldirections	numpoints	symbol	view
coords	labelfont	orientation	symbolsize	

Taula 3: Opcions de la comanda plot3d()

Mireu en l'ajuda de Maple que és el que controla cada una d'aquestes opcions (?plot3d[options]).

3.9 Animació de gràfics

Quan es vol veure com evoluciona una corba o una superfície que depèn d'un paràmetre, una bona solució és fer una *animació* d'aquesta evolució. Les comandes **animate()** i **animate3d()** del paquet **plots** fan aquesta feina.

Exemple 3.15

La comanda

```
> animate([r*cos(u),r*sin(u),u=0..2*Pi],r=0..6,frames=20,
```

> scaling=constrained);

dibuixarà una animació d'un circumferència centrada a l'origen de radi creixent, des de 0 fins a 6 (realitzant 20 *fotogrames* de la pel·lícula). Per a veure efectivament l'animació heu de seleccionar el gràfic que surt, en aquest moment apareixeran nous botons en la barra d'eines del programa que permeten arrencar, parar, anar més ràpid o més lent, ... (amb el botó dret també apareix un menú des del que es pot controlar l'animació).

Per a generar animacions de gràfics a l'espai s'utilitza la comanda $\tt animate3d($).

Exemple 3.16

```
> animate3d([r*cos(t+a), r*sin(t+a), r^2*cos(2*t)], r=0..2, t=0..2*Pi,
```

> a=0..3,frames=20);

Exercici 3.9

Feu una animació que mostri una esfera de radi 1 que va *botant*, movent el seu centre des del (0, 0, 1) fins al (0, 0, 0) i tornant a pujar.

3.10 Comandes del paquet plots

Ja s'ha comentat en altres apartats algunes de les funcions que proporciona el paquet **plots** (com ara display(), polarplot(), implicitplot()). El llistat complet de les funcions que defineix aquest paquet és el de la taula que ve tot seguit. En l'ajuda de Maple podreu trobar què fa i com s'utilitza cada una d'elles (?plots).

animate	densityplot	listplot	$polyhedra_supported$
animate3d	display	listplot3d	replot
animatecurve	display3d	loglogplot	rootlocus
arrow	fieldplot	logplot	semilogplot
changecoords	fieldplot3d	matrixplot	setoptions
complexplot	gradplot	odeplot	setoptions3d
complexplot3d	gradplot3d	pareto	spacecurve
conformal	implicitplot	pointplot	sparsematrixplot
contourplot	implicitplot3d	pointplot3d	sphereplot
contourplot3d	inequal	polarplot	surfdata
coordplot	listcontplot	polygonplot	textplot
coordplot3d	listcontplot3d	polygonplot3d	textplot3d
cylinderplot	listdensityplot	polyhedraplot	tubeplot

Taula 4: Comandes del paquet plots