

Eines informàtiques (MAPLE)

Pràctica 4

Matemàtiques per a ensenyants, curs 2002-2003.

4 Resoldre equacions

A aquesta pràctica aprendreu a aplicar la comanda de Maple `solve( )` per a obtenir les solucions **exactes** d'equacions (quan això sigui possible). Recordeu que en nombrosos casos no és possible obtenir solucions exactes de les equacions i que s'ha de deixar la feina als *solucionadors numèrics* per a poder calcular solucions **aproximades**. Més endavant en aquesta mateixa secció utilitzareu la comanda de Maple `fsolve( )` per a obtenir aproximacions decimals de solucions. També es discutirà la resolució de sistemes d'equacions lineals. Comenceu reinicialitzant les variables i carregant el paquet **plots**.

```
> restart;  
> with(plots):
```

4.1 Introduir i manipular equacions: les comandes `lhs` i `rhs`

Exemple 4.1

Es pot donar un nom a una equació igual que es fa amb qualsevol altre expressió. En la línia següent introduïm l'equació $x^3 - 5x^2 + 23 = 2x^2 + 4x - 8$ i li posem com a nom `eqn1`.

```
> eqn1:=x^3-5*x^2+23=2*x^2+4*x-8;
```

Exemple 4.2

Podem aïllar la part esquerra i la part dreta de l'equació utilitzant les comandes `lhs( )` i `rhs( )`.

```
> lhs(eqn1);  
> rhs(eqn1);
```

Exemple 4.3

Utilitzem les comandes `lhs( )` i `rhs( )` per a obtenir una equació que és equivalent a l'equació original `eqn1` però que té com a part dreta un 0. Posem-li com etiqueta `eqn2`.

```
> eqn2:=lhs(eqn1)-rhs(eqn1)=0;
```

4.2 Obtenir solucions exactes: la comanda `solve`

Primer considerem equacions polinòmiques. Existeixen algorismes per a calcular les solucions **exactes** per a polinomis que tenen fins a **grau 4** utilitzant únicament radicals. La comanda de Maple `solve( )` coneix aquests algorismes.

Exemple 4.4

Per a obtenir les solucions exactes de l'equació polinomial $3x^3 - 4x^2 - 43x + 84 = 0$ utilitzem la comanda `solve( )`. Noteu que el segon argument de la comanda li diu a Maple que x és la incògnita respecte de la que volem obtenir la solució.

```
> solve(3*x^3-4*x^2-43*x+84=0,x);
```

Aquí Maple ha trobat les tres solucions i les ha ensenyades.

Exemple 4.5

A vegades voldrem seleccionar una solució de la llista de solucions i utilitzar-la en un altre càlcul. Podem fer això assignant primer un nom (en aquest cas utilitzem la lletra N) al resultat de la comanda `solve( )`. Aleshores $N[1]$ és el primer nombre de la llista, $N[2]$ és el segon i així successivament (fixeu-vos en els claudàtors).

```
> N:=solve(x^2-5*x+3=0,x);
> N[1];
```

Exemple 4.6

Quan es treballa amb la comanda `solve( )` sovint és convenient començar donant un nom a l'equació. Noteu que utilitzem “:=” per assignar el nom i només “=” per a l'equació pròpiament dita.

```
> eqn1:=7*x^3-11*x^2-27*x-9=0;
```

Seguidament resollem l'equació utilitzant la comanda `solve( )` i assignem el nom H al resultat.

```
> H:=solve(eqn1,x);
```

Per a practicar proveu que cada un d'aquests valors satisfà l'equació. Això es pot fer fàcilment utilitzant la comanda `subs( )`.

```
> subs(x=H[1],eqn1);
> subs(x=H[2],eqn1);
> subs(x=H[3],eqn1);
```

Exemple 4.7

A vegades les solucions “exactes” són massa complicades per a poder ser realment útils. En les dues línies següents resollem l'equació $x^3 - 34x^2 + 4 = 0$.

```
> eqn1:=x^3-34*x^2+4=0;
> H:=solve(eqn1,x);
```

Com podreu veure, llegir aquestes solucions exactes és realment un rept! Noteu que I representa $\sqrt{-1}$. Quan una solució és així de complicada pot ser més útil mirar una solució aproximada utilitzant `evalf( )`.

```
> evalf(H);
```

Una bona alternativa a la comanda `solve( )` en una situació d'aquest tipus és la comanda `fsolve( )` que discutirem en la secció següent.

La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a determinar solucions exactes d'equacions **no polinòmiques**. Hi ha una llista d'alguns exemples simples a baix. En tot cas, si les equacions són complicades, per exemple si combinen exponencials, polinomis i expressions trigonomètriques, normalment no es podrà disposar de les solucions exactes. Un altre cop la comanda `fsolve( )` és una alternativa.

Exemple 4.8

Resoleu l'equació: $5e^{(x/4)} = 43$

```
> solve(5*exp(x/4)=43,x);
```

Exemple 4.9

A vegades Maple no mostra **totes** les solucions possibles. Com podríeu utilitzar el resultat d'aquí sota per a poder escriure el conjunt de totes les solucions de l'equació?

```
> solve(sin(x)=1/2,x);
```

Exercici 4.1

Resoleu l'equació $x^3 - 11x^2 + 7x + 147 = 0$. Per què Maple produeix només dues solucions diferents per a aquesta equació cúbica? Per què una d'elles està escrita dues vegades? (**Indicació:** Factoritzeu la part esquerra de l'equació).

4.3 Obtenir solucions aproximades: la comanda `fsolve`

Es pot utilitzar per a aproximar solucions de qualsevol tipus d'equació. Per a equacions polinòmiques `fsolve( )` produeix una **llista completa** de totes les solucions reals en un sol pas (mireu l'exemple 4.10). Per a altres tipus d'equacions, `fsolve( )` es pot utilitzar per a obtenir les solucions **d'una en una** (mireu els exemples 4.11 i 4.12).

Exemple 4.10

La comanda de Maple `fsolve( )` calcularà una aproximació numèrica per a cada una de les solucions reals d'una equació polinòmica. Aproximem totes les solucions reals de l'equació: $x^4 - x^3 - 17x^2 - 6x + 2 = 0$.

```
> eqn:=x^4-x^3-17*x^2-6*x+2=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Les quatre solucions que es mostren a sota ens donen una llista completa de les solucions de l'equació polinòmica.

Exemple 4.11

Determinem **totes?** les solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$ utilitzant la comanda `fsolve( )`.

```
> eqn:=x^3+1-exp(x)=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Maple ens dona una solució real. Aquest cop Maple no ens ha explicat la historia completa. Hi ha altres solucions? Com es poden trobar? En l'exemple 4.12 es presenta un procediment sistemàtic per a determinar les solucions que resten.

Exemple 4.12

Buquem les altres solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$.

El primer pas per a trobar les altres solucions és fer un dibuix del gràfic de la part esquerra de l'equació.

Nota: Recordeu que els talls amb l'eix de les x de $y = x^3 + 1 - e^x$ es corresponen exactament amb les solucions de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..5,y=-5..15);
```

El gràfic mostra **quatre** interseccions amb l'eix de les x . Una d'elles correspon a la solució que hem obtingut en l'exemple 4.11. Quina? Com trobaríeu les altres que falten?

Podem estendre la comanda `fsolve( )` per a que miri de trobar una solució en un interval particular. Per exemple per a trobar la solució negativa li demanem a Maple que busqui en l'interval $[-1, -0.2]$ ja que podem veure a partir del gràfic que hi ha exactament una solució en aquest interval.

```
> fsolve(eqn,x=-1..-0.2);
```

Per a determinar les altres dues solucions utilitzem `fsolve( )` un altre cop, aquesta vegada buscant a l'interval $[1, 2]$ i a l'interval $[4, 5]$.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
> fsolve(eqn,x=4..5);
```

Què passa si demaneu a Maple que busqui una solució en un interval on no hi ha solucions? Proveu-ho. A partir del gràfic és clar que no hi ha talls amb l'eix de les x (i per tant no hi ha solucions) entre 2 i 4.

```
> fsolve(eqn,x=2..4);
```

Noteu que Maple simplement respon amb la línia que originalment heu introduït, sense cap canvi, quan no pot trobar una solució a l'interval donat.

Hi ha altres solucions? Per exemple, hi ha alguna solució per a x més gran que 5? Podem comprovar això fent més gran l'interval sobre el que fem el gràfic. En la línia següent allarguem l'interval fins al $[-3, 50]$. No apareixen nous talls amb l'eix de les x . El gràfic confirma el que podem esperar mirant els termes de l'equació, és a dir el terme exponencial domina i fa que el gràfic vagi baixant a la llarga.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..50,y=-10..15);
```

Alternativament podem utilitzar la comanda `fsolve( )`, ara buscant en aquest interval més gran.

```
> fsolve(eqn,x=5..50);
```

Tal com esperàvem Maple no haurà trobat solucions.

D'una forma semblant podem comprovar si hi ha solucions **cap a l'esquerra**. Aquí busquem si hi ha solucions a l'interval $[-50, -1]$.

```
> fsolve(eqn,x=-50..-1);
```

Cap ni una tampoc!

Ara tenim una llista completa de les solucions aproximades de l'equació original $x^3 + 1 - e^x = 0$. Són: -8.251554597 , 0 , 1.545007279 i 4.567036837 .

Exemple 4.13

Utilitzem `fsolve( )` per a calcular les solucions aproximades de l'equació: $\frac{x^2}{20} - 10x = 15 \cos(x + 15)$. Com en l'últim exemple utilitzarem un gràfic per ajudar-nos a determinar el nombre i la situació aproximada de les solucions. La nostra feina se simplifica si comencem convertint l'equació que tenim en una d'equivalent que té com a part dreta un 0. Així resoldrem l'equació equivalent:

```
> x^2/20-10*x-15*cos(x+15) = 0;
```

Si ara dibuixem el gràfic de la part esquerra d'aquesta equació obtindrem un altre cop solucions en cada un dels talls amb l'eix de les x .

```
> eqn:=x^2/20-10*x-15*cos(x+15)=0;
```

```
> plot(lhs(eqn),x=-10..10);
```

A partir del gràfic sembla que hi ha una solució a l'interval $[1, 2]$. Ara dirigirem Maple cap a aproximar una solució en aquest interval.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
```

Hem trobat totes les solucions d'aquesta equació? De fet hi ha una altra solució! Per a trobar-la comenceu estirant l'interval sobre el que heu fet el gràfic. Aleshores utilitzeu `fsolve( )` per a obtenir una aproximació numèrica d'aquesta segona solució.

Exercici 4.2

Determineu totes les solucions de l'equació $x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 7x - 1 = 0$. Comenceu mirant un gràfic significatiu.

Exercici 4.3

Determineu totes les solucions de l'equació $x^2 - 2 = \ln(x + 5)$. Utilitzeu el gràfic **d'una** expressió per a localitzar les solucions. Comproveu cada una de les solucions substituint-la en la equació original.

Exercici 4.4

Els gràfics de $y = 10 - x^2$ i de $y = 4 \sin(2x) + 5$ es troben dues vegades sobre l'interval $[-5, 5]$.

- Feu el gràfic de les dues equacions juntes i estimeu amb el ratolí els punts d'intersecció.
- Escriviu una equació que es pugui resoldre per a determinar les coordenades x dels punts d'intersecció.
- Utilitzeu `fsolve( )` per a resoldre aquesta equació.
- Utilitzeu els resultats de la part c) per a estimar les coordenades y dels punts d'intersecció.
- Sembla que les corbes es poden trobar en un tercer punt a prop de $(1, 9)$. Utilitzeu `fsolve( )` i/o un gràfic significatiu per a demostrar que no hi ha cap punt d'intersecció en aquest lloc.

4.4 Resoldre equacions formals

Sovint Maple pot resoldre equacions formals per a qualsevol de les variables.

Suposeu que volem obtenir la solució per a la variable g de l'equació: $4 - v = 2T - kg$. La comanda `solve( )` funciona bé en aquest cas.

```
> solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Aquí hi ha una manera més maca per a mostrar el mateix resultat:

```
> g=solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Exercici 4.5

Editeu l'última comanda per a obtenir solucions per a les altres lletres T , k i v .

Exercici 4.6

Resoleu l'equació $x^2 + y^2 = 9$ per a la variable y . Assigneu el conjunt de solucions a una variable que es digui S . Quina relació hi ha entre les solucions $S[1]$ i $S[2]$?

4.5 Resoldre sistemes d'equacions lineals utilitzant la comanda solve

Recordeu que cal reinicialitzar les variables abans de continuar. Carregueu també el paquet **plots**:

```
> restart;
```

```
> with(plots):
```

La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a resoldre un sistema de m equacions lineals amb n incògnites. En direm un **sistema lineal m per n** perquè sigui més curt.

Exemple 4.14

Resoldre el sistema 2 per 2: $3x + 2y = 3$ i $x - y = -4$

Un gràfic de les dues funcions subjacents mostrarà que la solució correspon al punt d'intersecció en $(-1, 3)$. Però primer necessitem obtenir la forma explícita de cada una de les dues funcions lineals abans de poder fer-ne el dibuix. Per tant resollem cada una de les equacions respecte y .

```
> y1:=solve(3*x+2*y=3,y);
```

```
> y2:=solve(x-y=-4,y);
```

Ara construïm un gràfic format de dues parts: la “**part1**” conté els gràfics de les dues equacions i la “**part2**” dibuixa el punt que és la solució que hem trobat. Aquest punt ha de ser el punt d'intersecció de les dues línies. Ho és efectivament?

```
> part1:=plot([y1,y2],x=-5..5);
```

```
> part2:=plot([-1,3],style=point,color=blue,symbol=circle);
```

```
> display([part1,part2]);
```

Exemple 4.15

Aquí hi ha un exemple de solució d'un sistema **3 per 3** amb incògnites x , y i z . Resolem el sistema 3 per 3: $\{x + y + z = 1, 3x + y = 3, x - 2y - z = 0\}$

Exercici 4.7

Determineu les solucions del sistema: $4x + 3y = 12$, $5x - 7y = 35$ Comproveu la solució substituint els valors que s'obtenen en les dues equacions del sistema.

Sistemes lineals amb un nombre de solucions infinit

Quan un sistema té més **incògnites** que **equacions** sovint trobem no una si no un nombre infinit de solucions. Aquí hi ha un exemple.

Exemple 4.16

Resolem el sistema: $\{x + y + z = 1, 3x + y = 3\}$.

Noteu que aquest cop no obtenim un únic conjunt de valors numèrics per a x , y i z . En comptes d'això Maple ens diu com han d'estar relacionats els valors de x , y i z per a construir una solució típica. En particular l'expressió $\mathbf{x}=\mathbf{x}$ que surt en la resposta anterior indica que l'incògnita $\mathbf{x}$ pot ser **qualsevol** nombre. Ens referirem a aquesta incògnita com la *variable lliure* de la solució. Per a obtenir qualsevol **solució particular** (entre el nombre infinit que hi ha) trieu un valor per a la $\mathbf{x}$ i utilitzeu-lo per a calcular els valors corresponents de la $\mathbf{y}$ i de la $\mathbf{z}$. Per exemple si considerem $\mathbf{x}=4$.

```
> subs(x=4,solns);
```

Una solució és: $\mathbf{x}=4$, $\mathbf{y}=-9$ i $\mathbf{z}=6$. Preneu-vos un minut de temps i verifiqueu a mà que aquests tres nombres satisfan realment les equacions originals: $x + y + z = 1$ i $3x + y = 3$. Mirem ara la solució generada quan prenem $\mathbf{x}=2$.

```
> subs(x=2,solns);
```

Així que dues de les infinites solucions que hi ha són: $((\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=(4, -9, 6)$ i $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=(2, -3, 2)$.

Exercici 4.8

Resoleu el sistema: $\{x + 2y + z = 2, 3x + y = 1\}$ i doneu com a mínim tres solucions particulars.