

TOPOLOGIA I

Poliedres regulars de l'espai. Curs 2001-2002

88. *Demostreu que els únics poliedres regulars són el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre. (Direm que un poliedre és regular si és homeomorf a S^2 , totes les cares tenen el mateix nombre de costats i a cada vèrtex hi ha el mateix nombre d'arestes.)*

Suposem que cada cara té n -arestes i que a cada vèrtex hi van a parar m -arestes. D'aquí resulten les equacions:

$$nc = 2a \quad mv = 2a$$

On v, c, a són en nombre de vèrtexs, arestes i cares respectivament. Com que el políedre ha de ser una superfície homeomorfa a S^2 , ha de complir:

$$2 = c - a + v = \frac{2a}{n} - a + \frac{2a}{m}$$

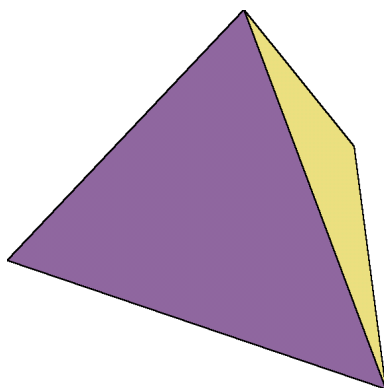
Ara el que hem de fer és estudiar els possibles casos en algun ordre i el que triarem serà segons el valor de n (o sigui, el nombre de costats de cada cara).

- $n = 3$) Cada cara seran triangles. L'equació d'abans ens queda:

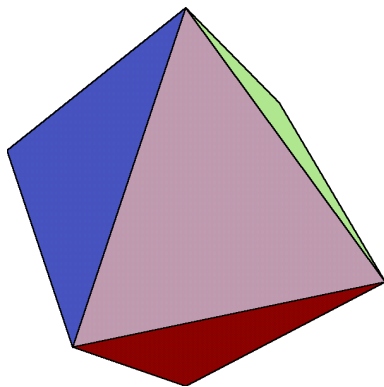
$$2 = \frac{2a}{3} - a + \frac{2a}{m}$$

I per tant $(6 + a)m = 6a$, fem variar ara les m :

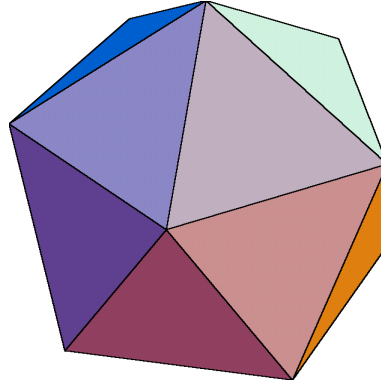
En el cas $n = 3, m = 3$ obtenim $c = 4$ i $a = 6, v = 4$, o sigui, un tetràedre:



En el cas $n = 3, m = 4$ obtenim $c = 8$ i $a = 12, v = 6$, o sigui, un octàedre.



En el cas $n = 3, m = 5$ obtenim $c = 20$ i $a = 30, v = 12$, o sigui, un icosaedre.

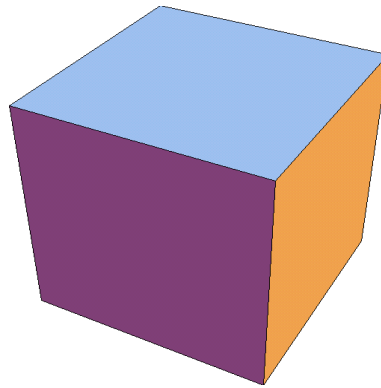


Finalment no pot ser $m \geq 6$ ja que $0 \leq a = \frac{6m}{6-m}$.

- $n = 4$) Cada cara seran quadrats. L'equació d'abans ens queda:

$$2 = \frac{2a}{4} - a + \frac{2a}{m}$$

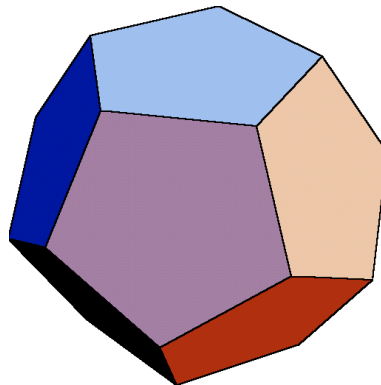
I per tant $a = \frac{4m}{4-m} \geq 0$, el que ens diu que m només pot valer 3, llavors queda: $n = 4$, $m = 3$, $a = 12$, $v = 8$, $c = 6$ i tenim un cub:



- $n = 5$) Cada cara seran pentàgons:

$$2 = \frac{2a}{5} - a + \frac{2a}{m}$$

I per tant $a = \frac{10m}{10-3m} \geq 0$, el que ens diu que m només pot valer 3, llavors queda: $n = 5$, $m = 3$, $a = 30$, $v = 20$, $c = 12$ i tenim un dodecàedre:



- $n \geq 6$) El que hem de veure és que no hi ha poliedres regulars tals que cada cara tingui més de 6 arestes.

$$2 = \frac{2a}{n} - a + \frac{2a}{m}$$

I per tant $a = \frac{2nm}{2(m+n)-nm}$ i el denominador $2(m+n) - nm$ és negatiu o zero per a $n \geq 6$ i $m \geq 3$.