

Pràctiques Integrades

1er de Matemàtiques

Pràctica 17

curs 2002–03

17 Aproximació de funcions

17.1 Polinomi interpolador

Recordem en primer lloc que Maple pot representar gràficament un núvol de punts $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ amb la funció `plot`.

Exercici 17.1

Definiu una llista `l` com els següents punts de $\mathbb{R}^2$: $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$ i $(10, 2)$. Dibuixeu en una gràfica el núvol de punts corresponent.

Donats n punts $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ amb $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ existeix un polinomi p de grau menor o igual a $n - 1$ complint que $p(x_i) = y_i$ per a tot $i = 1..n$, que anomenem *polinomi interpolador*. La funció que calcula polinomis interpoladors està al paquet **CurveFitting** i s'anomena `PolynomialInterpolation`.

Exemple 17.1

Si volem calcular el polinomi que interpola els punts $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(2, 4)$, que ha de ser de grau menor o igual a 2, ho podem fer amb Maple:

```
> with(CurveFitting);  
> ll:=[[0,0],[1,1],[2,4]]:  
PolynomialInterpolation(ll,x);
```

Exercici 17.2

Calculeu el polinomi interpolador p als punts de l'exercici anterior. Quan val el polinomi avaluat al punt 5? I al punt 9.5? Feu la representació gràfica dels punts i el polinomi interpolador.

17.2 Spline

Una altra opció per a trobar funcions que passin per punts fixats és “*agrupar*” els punts en subconjunts més petits i calcular el polinomi de grau més petit per a cada un dels subconjunts. Per exemple, podem considerar que la unió dels punts mitjançant segments es correspon a considerar els punts de dos en dos i considerar el polinomi de grau 1 (recta) que els uneix.

Dins el paquet **CurveFitting** tenim la funció **Spline** (la **S** en majúscules) per a definir aquestes noves aproximacions.

Exemple 17.2

Si volem unir els punts $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(2, 4)$ amb rectes escrivim:

```
> ll:=[[0,0],[1,1],[2,4]]:
   Spline(ll,x,degree=1);
```

On l'opció **degree=1** és per a definir el grau dels polinomis que estem calculant.

Exercici 17.3

Dibuixeu tres gràfiques amb els “*splines*” de graus 1, 2 i 3 de la llista de punts de l'exercici llista1.

17.3 Exercicis

Exercici 17.4

Feu una funció (o procediment) **dibuix** que fixada una llista de punts dibuixi de colors diferents el núvol de punts, els segments que uneixen els punts, el “*spline*” de grau 2, el “*spline*” de grau 3 i el polinomi interpolador en una sola gràfica.

Exercici 17.5

Considereu la llista de punts:

```
lli1:= [[-9,1], [-8,1], [-7,1], [-6,1], [-5,2], [-4,3], [-3,5], [-2,8], [-1,12], [0,16],
[1,12], [2,8], [3,5], [4,3], [5,2], [6,1], [7,1], [8,1], [9,1]].
```

Dibuixeu el núvol de punts en una gràfica. Apliqueu la funció **dibuix** de l'exercici anterior a aquest núvol de punts. Que observeu?

Exercici 17.6

Definiu una funció `aproxf` que depengui de 4 paràmetres `f`, `a`, `b`, `n` que dibuixi la funció `f` entre `a` i `b` i el polinomi de grau menor o igual a `n` que interpoli a `n+1` punts equiespaiats entre `a` i `b` (inclosos).

Exercici 17.7

Apliqueu la funció `aproxf` a la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre -5 i 5 i per als valors de `n` 1, 3, 6, 10 i 15. Què observeu?

17.4 Polinomi de Taylor

Un altre tipus d'aproximació polinòmica és la que s'anomena *aproximació de Taylor*. De fet l'aproximació de Taylor d'una funció és com un polinomi interpolador en el que és concentra tota la informació en un sol punt.

La comanda per a obtenir l'aproximació de Taylor de grau `n` d'una funció `f` al voltant del punt `c` és `taylor(f(x),x=c,n)` (noteu que la comanda `taylor` s'aplica a una expressió `f(x)` i no a la funció `f`).

Exemple 17.3

```
> taylor(cos(x),x=0,8);  
> taylor(ln(x),x=1,10);
```

Noteu que el resultat de `taylor` està format per una component polinòmica i una component de la forma $O((x-c)^n)$. La part polinòmica és el polinomi aproximador pròpiament dit, més endavant veurem com es pot interpretar la part $O((x-c)^n)$. Si es vol extreure el polinomi del resultat d'una comanda `taylor`, s'utilitza `convert(expr, polynom)`.

Exemple 17.4

El polinomi de Taylor de grau 5 al voltant del 0 per a la funció $f(x) = \frac{1}{1-x}$ s'obté amb

```
> expr:=taylor(1/(1-x),x=0,5);  
> poli:=convert(expr, polynom);
```

Exercici 17.8

Realitzeu un procediment que, donats $f(x)$, c i n , doni com a resultat només el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x)$ al voltant de c . Modifiqueu el procediment anterior per tal que retorni en una llista els polinomis de grau 1 fins a n .

Exercici 17.9

Considereu la funció $f(x) = e^x$ i el punt $c = 0$. Feu un gràfic en el que es vegin alhora el gràfic de $f(x)$ i el del seu polinomi de Taylor per a $n = 2$. Què observeu?

Repetiu l'exercici per a $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ i per a $f(x) = \arctan(x)$.

Noteu doncs que es pot dir que el polinomi de Taylor de grau 1 ($n = 2$) és la recta tangent al gràfic de $f(x)$ en $x = c$ (això s'expressa sovint dient que *l'ordre de contacte entre els dos gràfics és 2*).

En l'exercici següent podreu veure com el concepte d'ordre de contacte s'estén a graus superiors.

Exercici 17.10

Preneu $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ i $p(x)$ el polinomi de Taylor amb $n = 8$ de $f(x)$ al voltant de 0. Calculeu els valors de $\frac{f(x) - p(x)}{x^7}$ per a $x = \pm \frac{1}{2^n}$ (amb n des de 1 fins a 20 i amb 25 decimals com a mínim). Quin sembla que serà el límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^7}$?

Com es poden obtenir els coeficients del polinomi de Taylor d'una funció a partir d'aquesta funció? Per a veure quina és aquesta relació recordeu que la comanda que dona el coeficient d'una expressió polinòmica `expr` respecte una altra expressió `var` és `coeff(expr,var)` i que si es vol buscar el coeficient respecte `var^k` també es pot fer `coeff(expr,var,k)`. Per exemple:

Exemple 17.5

```
> taylor(exp(-x^2),x=0,9);
> coeff(taylor(exp(-x^2),x=0,9),x,4);

> taylor(sin(x),x=Pi/2,8);
> coeff(%,(x-Pi/2),4);
```

Exercici 17.11

Donada $f(x) = \arctan(x)$ determineu les expressions de les derivades successives $f^{(n)}(x)$ i avalueu-les en $x = 0$ per a n des de 1 fins a 10. Feu el mateix amb $p(x)$, el polinomi de Taylor de grau 10 de $f(x)$ al voltant de 0.

Exercici 17.12

Compareu els valors que heu obtingut en l'exercici anterior amb els coeficients del polinomi de Taylor $p(x)$. (Feu el quocient entre uns i altres i si no veieu res mireu què passa si $f(x) = e^x$).

Al principi de la pràctica diu que el polinomi de Taylor permet aproximar una funció per un polinomi. L'exercici següent mostra com funciona aquest tipus d'aproximació.

Exercici 17.13

Feu un procediment que faci un dibuix dels gràfics (en diferents colors) d'una funció donada i dels seus polinomis de Taylor, fins a un grau n especificat en els arguments, al voltant d'un punt també donat entre els arguments.

Apliqueu l'anterior a la funció $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$ al voltant del punt $x = 2$ fins al grau 7.

Exercici 17.14

Les coses no van sempre tan bé com en tots els exemples anteriors. Proveu de determinar l'expressió de qualsevol polinomi de Taylor de $f(x) = e^{(-1/x^2)}$ al voltant de 0.

Tot i que `taylor` no aconsegueix fer gaire cosa amb aquest problema, hauríeu de poder determinar quin és el polinomi de Taylor de qualsevol grau per a la funció anterior al voltant de 0. I encara que es tingui el polinomi de Taylor, noteu que el resultat que s'obté no és gaire interessant!