

Pràctiques Integrades

1er de Matemàtiques

Pràctica 20

curs 2002–03

20 Integrals de Riemann

En aquesta pràctica analitzarem el concepte de la integral de Riemann. Donada una funció f amb valors reals definida en un interval $[a, b]$, la integral de Riemann dóna sentit i calcula l'àrea de la regió plana limitada pel gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = a$ i $x = b$. El mètode es basa en aproximar la regió mitjançant unions d'un nombre finit de figures per a les quals sabem calcular l'àrea: rectangles i trapezis per exemple.

Per a fer aquest anàlisi utilitzarem algunes de les funcions que proporciona el paquet¹ **student** (que ja podeu carregar amb la comanda `with(student);`). En concret, analitzarem el funcionament de les comandes `rightbox`, `leftbox`, `rightsum`, `leftsum`, `simpson`, `trapezoid` i `Int`.

20.1 La integral de Riemann

Maple conté instruccions que ens permeten analitzar sumes de Riemann per a una funció f . Comencem amb les sumes que apareixen *avaluant la funció en el costat dret*. La comanda `rightbox` realitza una representació gràfica de la suma de Riemann donada $f(x)$ i un interval $[a, b]$ considerant com altures dels rectangles els valors de la funció f en el cantó dret de cada sub-interval. Per defecte parteix l'interval inicial en quatre subintervals d'igual longitud. També tenim l'opció de determinar el nombre de subintervals en que volem subdividir aquest interval inicial. La comanda `rightsum` té la mateixa sintaxi que `rightbox` i calcula la suma total de l'àrea dels rectangles obtinguts, és a dir, la suma de Riemann corresponent associada a la partició.

Exemple 20.1

```
> f:=x->x^2;
> rightbox(f(x),x=0..1);
> rightsum(f(x),x=0..1);
> rightbox(f(x),x=0..1,10);
> rightsum(f(x),x=0..1,10);
```

Repetiu l'exemple anterior per a la funció $\sin(x)$ entre 0 i 2π . Com podeu observar les sumes de Riemann aproximen l'àrea amb signe, és a dir, l'àrea sota l'eix d'abscisses és de signe negatiu.

Recordeu que per aconseguir aproximacions numèriques dels valors obtinguts podeu usar la comanda `evalf`.

¹Si utilitzeu Maple 8 i consulteu l'ajuda veureu que en aquesta versió del programa hi ha un nou paquet, que deixa parcialment obsolet **student**, anomenat **Student[Calculus1]**. Tot i l'existència d'aquest nou paquet, es pot seguir utilitzant **student** sense problemes. La inclusió d'aquest nou paquet és una de les diferències significatives que hi ha entre Maple 7 i Maple 8.

Exercici 20.1

Construiu una seqüència que contingui les sumes de Riemann *avaluant en el costat dret* per a la funció $f(x) = x^2$ entre 0 i 1 partint l'interval en 2^n subintervals, per a $n = 1$ fins a 15.

Les corresponents comandes per a les sumes que apareixen quan s'avalua $f(x)$ en el costa esquerra són `leftbox` i `leftsum` i tenen un comportament completament anàleg a les que acabem de veure.

Exercici 20.2

Repetiu l'exemple i l'exercici anteriors per a les sumes de Riemann *avaluant a l'esquerra*.

El paquet **student** dona una tercera opció a l'hora d'aproximar àrees sota la gràfica d'una funció. Aquesta consisteix en considerar per a cada subinterval $[a + ih, a + (i + 1)h]$, on $h = (b - a)/n$, el rectangle de base h i alçada $f(a + (i + \frac{1}{2})h)$, és a dir, el valor de f al punt mig de l'interval. Aquesta suma es pot analitzar amb Maple mitjançant les comandes `middlebox` i `middlesum`.²

Exercici 20.3

Repetiu l'exemple i l'exercici anteriors amb la suma intermitja de Riemann.

La integral de Riemann és el límit de les sumes de Riemann quan el nombre de subintervals tendeix a infinit. En el següent exemple aplicarem la definició per a calcular la integral de Riemann de la funció $f(x) = x^2$ entre 0 i 1.

Exemple 20.2

```
> f:=x->x^2;
> seqsup:=n->rightsum(f(x),x=0..1,n);
> intsup:=limit(seqsup(n),n=infinity);
```

Exercici 20.4

Calculeu el límit de l'exemple anterior però prenent les sumes per l'esquerra primer i les sumes intermitges després. Comproveu que s'obté el mateix resultat.

²En el paquet **Student[Calculus1]** de Maple 8 la comanda que calcula sumes de Riemann és `RiemannSum` i també té opcions per a calcular *sumes superiors* i *sumes inferiors*.

La comanda de Maple `int` permet obtenir el mateix resultat de forma automàtica. Comproveu-ho en el següent exemple.

Exemple 20.3

```
> int(f(x),x=0..1);
```

Maple conté comandes que s'anomenen inerts. Aquestes comandes només ens representen per pantalla la funció que els hem demanat però no retornen el valor del resultat (potser us heu fixat en que el resultat que donen les comandes `rightsum`, `leftsum` i `middlesum` és una expressió en forma de sumatori i no el valor d'aquest sumatori). Donen una oportunitat a l'usuari de comprovar que no ha comès cap error quan ha escrit la comanda o per a poder guardar una expressió formal en lloc del resultat final d'un càlcul. La comanda inert associada a la integral de Riemann és `Int`.

Exemple 20.4

```
> Int(f(x),x=0..1);
> value(%);
```

Com heu vist en l'exemple anterior, per fer que una comanda inert s'executi i ens retorni el valor del que li hem demanat cal aplicar-li la comanda `value`.

20.2 El mètode dels trapezis

Sigui f una funció contínua en l'interval $[a, b]$. Dividim l'interval en n parts iguals i en cadascun d'aquests subintervalls $[a + ih, a + (i + 1)h]$ aproximem la funció pel trapezi que s'obté al substituir la gràfica de la funció entre $f(a + ih)$ i $f(a + (i + 1)h)$ pel segment que uneix aquests dos punts. Recordeu que l'àrea d'un trapezi és la semisuma de les bases per l'alçada. En la nostra situació, si $h = (b - a)/n$, l'àrea és $\frac{h}{2}(f(a + ih) + f(a + (i + 1)h))$.

La comanda `trapezoid` calcula la suma corresponent a la descomposició mitjançant trapezis donada una funció f , l'interval $[a, b]$ i el nombre de subintervalls que volem considerar.

Exemple 20.5

```
> g:=x->exp(x);
> trapezoid(g(x),x=0..1,10);
```

Exercici 20.5

- Considerem una funció que retorni les sumes trapezoidals de g entre 0 i 1 en funció de n i calculeu-ne el límit. Compareu-lo amb la integral de Riemann, què observeu?
- Realitzeu un procediment (`trapezoidbox` potser?) que tingui com arguments una funció f , un interval $[a, b]$ i un nombre n , i doni com a resultat una representació gràfica del mètode dels trapezis per a

f dividint l'interval $[a, b]$ en n trossos iguals (recordeu que l'opció `filled=true` per la comanda `plot` sombreja l'àrea sota la gràfica fins l'eix d'abscisses).

20.3 Mètode de Simpson

Tot seguit anem a descriure un altre mètode per a aproximar la integral de Riemann. Dividim l'interval $[a, b]$ en un nombre parell n de parts iguals, $x_i = a + ih$ per $i = 0, \dots, n$ on $h = (b - a)/n$. Per a cada interval $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ considerem una funció quadràtica $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ que coincideix amb f en els punts x_{2i-2} , x_{2i-1} , x_{2i} .

Donats tres punts $[a, b1]$, $[a + h, b2]$ i $[a + 2h, b3]$, anem a veure com calcular els coeficients de la funció quadràtica $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ tals que $f(a) = b1$, $f(a+h) = b2$ i $f(a+2h) = b3$. I tot seguit, la corresponent integral de Riemann entre a i $a + 2h$. Per això utilitzarem les tècniques de la interpolació (recordeu d'una pràctica anterior que les comandes referents a la interpolació es troben al paquet **CurveFitting**).

Exemple 20.6

```
> with(CurveFitting):
> PolynomialInterpolation([a,b1],[a+h,b2],[a+2*h,b3],x);
> q:=unapply(%,x);
> int(q(x),x=a..a+2*h);
> simplify(%);
```

Exercici 20.6

Apliqueu les comandes de l'exemple anterior a la funció $f(x) = \sqrt{x}$ amb $a = 0$ i $h = 0.5$, $h = 0.05$ i $h = 0.005$. Dibuixeu en una mateixa gràfica la funció f i les corresponents aproximacions quadràtiques.

El mètode de Simpson consisteix en aproximar la integral mitjançant àrees del tipus que acabem de descriure, és a dir, donada f en un interval $[a, b]$ i un nombre parell n , aproximem l'àrea sota la gràfica per la suma

$$\sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}))$$

Maple calcula aquesta suma directament amb la comanda `simpson`.

Exemple 20.7

```
> g:=x->sqrt(x);
> simpson(g(x),x=0..1,6);
> simpson(g(x),x=0..1,10);
> simpson(g(x),x=0..1,16);
```

Exercici 20.7

Repetiu l'exercici final de la secció (exercici 20.5) anterior però ara amb el mètode de Simpson.

20.4 La funció integral

Donada f una funció contínua i $a \in \mathbb{R}$, podem definir una nova funció com $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, és a dir, a cada valor de x li assignem la integral de Riemann entre a i x . Aquesta funció s'obté amb Maple si en el rang per a x d'una comanda `int` no especifiquem cap valor concret si no una variable o si no especifiquem cap rang concret per a la variable respecte de la que s'integra

```
> f:=x->cos(x);
> F:=int(f(t),t=a..x);
> FF:=int(f(x),x);
```

(Noteu que no surt exactament el mateix resultat.)

Per a valors de x propers a a , podem aproximar la integral de Riemann per l'àrea obtinguda amb el mètode de Simpson. Per exemple, si $f(x) = \cos(x)$

```
> f:=x->cos(x);
> F:=x->simpson(f(y),y=0..x,2);
```

Exercici 20.8

Feu una representació gràfica de la regió associada a cada valor de x per a $x = \pi, \pi/2, \pi/4, \pi/8$.

Recordeu que la derivada d'una funció F a $x = a$ és $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$. Per tant, la derivada en $x = 0$ de $F(x)$ és

```
> limit(F(h)/h,x=0);
```

Què observeu? (compareu el resultat amb $f(0)$) Quina conclusió en treieu?

20.5 Àrea entre dues gràfiques

Donades dues funcions contínues f i g , observeu que amb les eines que tenim també podem calcular l'àrea de la regió que delimiten.

Exercici 20.9

- En una mateixa gràfica representeu les funcions $f(x) = 2x^2$ i $g(x) = x^3 - x + 2$ i sombregeu l'àrea que delimiten de color vermell.
- Calculeu l'àrea d'aquesta regió.