Pràctiques integrades

Pràctica 4

Matemàtiques, curs 2001-2002.

4 Resoldre equacions

A aquesta pràctica aprendreu a aplicar la comanda de Maple `solve( )` per a obtenir les solucions **exactes** d'equacions (quan això sigui possible). Recordeu que en nombrosos casos no és possible obtenir solucions exactes de les equacions i que s'ha de deixar la feina als *solucionadors numèrics* per a poder calcular solucions **aproximades**. Més endavant en aquesta mateixa secció utilitzareu la comanda de Maple `fsolve( )` per a obtenir aproximacions decimals de solucions. També es discutirà la resolució de sistemes d'equacions lineals. Comencem reinicialitzant les variables i carregant el paquet **plots**.

```
> restart:
> with(plots):
```

4.1 Introduir i manipular equacions: les comandes `lhs( )` i `rhs( )`

Exemple 1:
Es pot donar un nom a una equació igual que es fa amb qualsevol altre expressió. En la línia següent introduïm l'equació $x^3 - 5\,x^2 + 23 = 2\,x^2 + 4\,x - 8$ i li posem com a nom `eqn1`.

```
> eqn1:=x^3-5*x^2+23=2*x^2+4*x-8;
```

Exemple 2:
Podem aïllar la part esquerra i la part dreta de l'equació utilitzant les comandes `lhs( )` i `rhs( )`.

```
> lhs(eqn1);
> rhs(eqn1);
```

Exemple 3:
Utilitzem les comandes `lhs( )` i `rhs( )` per a obtenir una equació que és equivalent a l'equació original `eqn1` però que té com a part dreta un 0. Posem-li com etiqueta `eqn2`.

```
> eqn2:=lhs(eqn1)-rhs(eqn1)=0;
```

4.2 Obtenir solucions exactes: la comanda `solve( )`

Primer considerem equacions polinòmiques. Existeixen algoritmes per a calcular les solucions **exactes** per a polinomis que tenen fins a **grau 4**. La comanda de Maple `solve( )` coneix aquests algoritmes.

Exemple 1:
Per a obtenir les solucions exactes de l'equació polinomial $3\,x^3 - 4\,x^2 - 43\,x + 84 = 0$ utilitzem la comanda `solve( )`. Noteu que el segon argument de la comanda li diu a Maple que x és la incògnita respecte de la que volem obtenir la solució.

```
> solve(3*x^3-4*x^2-43*x+84=0,x);
```

Aquí Maple ha trobat les tres solucions i les ha ensenyades.

Exemple 2:
A vegades voldrem seleccionar una solució de la llista de solucions i utilitzar-la en un altre càlcul. Podem fer això assignant primer un nom (en aquest cas utilitzem la lletra `N`) al resultat de la comanda `solve()`. Aleshores `N[1]` és el primer nombre de la llista, `N[2]` és el segon i així successivament (fixeu-vos en els claudàtors).

```
> N:=solve(x^2-5*x+3=0,x);
> N[1];
```

Exemple 3:
Quan es treballa amb la comanda `solve( )` sovint és convenient començar donant un nom a l'equació. Noteu que utilitzem "`:=`" per assignar el nom i només "`=`" per a l'equació pròpiament dita.

```
> eqn1:=7*x^3-11*x^2-27*x-9=0;
```

Seguidament resolem l'equació utilitzant la comanda `solve( )` i assignem el nom `H` al resultat.

```
> H:=solve(eqn1,x);
```

Per a practicar comproveu que cada un d'aquests valors satisfà l'equació. Això es pot fer fàcilment utilitzant la comanda `subs( )`.

```
> subs(x=H[1],eqn1);
> subs(x=H[2],eqn1);
> subs(x=H[3],eqn1);
```

Exemple 4:
A vegades les solucions "exactes" són massa complicades per a poder ser realment útils. En les dues línies següents resolem l'equació $x^3 - 34\,x^2 + 4 = 0$.

```
> eqn1:=x^3-34*x^2+4=0;
> H:=solve(eqn1,x);
```

Com podreu veure, llegir aquestes solucions exactes és realment un repte! Noteu que I representa $\sqrt{-1}$. Quan una solució és així de complicada és més útil mirar una solució aproximada utilitzant `evalf( )`.

```
> evalf(H);
```

Una bona alternativa a la comanda `solve( )` en una situació d'aquest tipus és la comada `fsolve( )` que discutirem en la secció següent.
La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a determinar solucions exactes d'equacions **no polinòmiques**. Hi ha una llista d'alguns exemples simples a baix. En tot cas, si les equacions són complicades, per exemple si combinen exponencials, polinomis i expressions trigonomètriques, normalment no es podrà disposar de les solucions exactes. Un altre cop la comanda `fsolve( )` és una alternativa.

Exemple 5:
Resoleu l'equació: $5\,e^{(\frac{x}{4})} = 43$

```
> solve(5*exp(x/4)=43,x);
```

Exemple 6:
A vegades Maple no mostra **totes** les solucions possibles. Com podrieu utilitzar el resultat d'aquí sota per a poder escriure el conjunt de totes les solucions de l'equació?

```
> solve(sin(x)=1/2,x);
```

Exercici 4.1

Resoleu l'equació $x^3 - 11\,x^2 + 7\,x + 147 = 0$. Per què Maple produeix només dues solucions diferents per a aquesta equació cúbica? Per què una d'elles està escrita dues vegades? (**Indicació:** Factoritzeu la part esquerra de l'equació).

El fet que $(x - 7)$ és un **factor repetit** porta com a conseqüència que l'equació cúbica tingu només dues solucions diferents -3 i 7. Diem que l'arrel 7 té **multiplicitat 2**, això significa aquí que hi ha dos factors de la forma $(x - 7)$ en la factorització del polinomi.

4.3 Obtenir solucions aproximades: la comanda `fsolve( )`

Es pot utilitzar per a aproximar solucions de qualsevol tipus d'equació. Per a equacions polinòmiques `fsolve()` produeix una **llista completa** de totes les solucions reals en un sol pas (mireu l'Exemple 1). Per a altres tipus d'equacions, `fsolve( )` es pot utilitzar per a obtenir les solucions **d'una en una** (mireu els Exemples 2 i 3).

Exemple 1:
La comanda de Maple `fsolve( )` calcularà una aproximació numèrica per a cada una de les solucions reals d'una equació polinòmica. Aproximem totes les solucions reals de l'equació: $x^4 - x^3 - 17\,x^2 - 6\,x + 2 = 0$.

```
> eqn:=x^4-x^3-17*x^2-6*x+2=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Les quatre solucions que es mostren a sota ens donen una llista completa de les solucions de l'equació polinòmica.

Exemple 2:
Trobem **totes** les solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$ utilitzant la comanda `fsolve( )`.

```
> eqn:=x^3+1-exp(x)=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Maple ens dóna una solució real. Aquest cop Maple no ens ha explicat la historia completa. Hi ha altres solucions? Com es poden trobar? En l'Exemple 3 es presenta un procediment sistemàtic per a determinar les solucions que resten.

Exemple 3:
Trobem les altres solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$.

El primer pas per a trobar les altres solucions és fer un dibuix del gràfic de la part esquerra de l'equació.
Nota: Recordeu que els talls amb l'eix de les x de $y = x^3 + 1 - e^x$ es corresponen exactament amb les solucions de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..5,y=-5..15);
```

El gràfic mostra **quatre** interseccions amb l'eix de les x. Una d'elles correspon a la solució que hem obtingut en l'Exemple 2. Quina? Com trobarieu les altres que falten?

Podem extendre la comanda `fsolve( )` per a que miri de trobar una solució en un interval particular. Per exemple per a trobar la solució negativa li demanem a Maple que busqui en l'interval $[-1,\ -0.2]$ ja que podem veure a partir del gràfic que hi ha exactament una solució en aquest interval.

```
> fsolve(eqn,x=-1..-.2);
```

Per a determinar les altres dues solucions utilitzem `fsolve( )` un altre cop, aquesta vegada buscant a l'interval $[1,\ 2]$ i a l'interval $[4,\ 5]$.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
> fsolve(eqn,x=4..5);
```

Què passa si demaneu a Maple que busqui una solució en un interval on no hi ha solucions?
Proveu-ho. A partir del gràfic és clar que no hi ha talls amb l'eix de les x (i per tant no hi ha solucions) entre 2 i 4.

```
> fsolve(eqn,x=2..4);
```

Noteu que Maple simplement respon amb la línia que originalment heu introduït sense cap canvi quan no pot trobar una solució a l'interval donat.

Hi ha altres solucions? Per exemple, hi ha alguna solució per a x més gran que 5? Podem comprovar això fent més gran l'interval sobre el que fem el gràfic. En la línia següent allarguem l'interval fins al $[-3,\ 50]$. No apareixen nous talls amb l'eix de les x. El gràfic confirma el que podem esperar mirant els termes de l'equació, és a dir el terme exponencial domina i fa que el gràfic vagi baixant a la llarga.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..50,y=-10..15);
```

Alternativament podem utilitzar la comanda `fsolve( )`, ara buscant en aquest interval més gran.

```
> fsolve(eqn,x=5..50);
```

Tal com esperàvem Maple no haurà trobat solucions.
D'una forma semblant podem comprovar si hi ha solucions **cap a l'esquerra**. Aquí busquem si hi ha solucions a l'interval $[-50,\ -1]$.

```
> fsolve(eqn,x=-50..-1);
```

Cap ni una tampoc!
Ara tenim una llista completa de les solucions aproximades de la nostra equació original $x^3+1-e^x=0$.
Són: $-.8251554597$, 0, 1.545007279 i 4.567036837.

Exemple 4:
Utilitzem `fsolve( )` per a calcular les solucions aproximades de l'equació: $\frac{x^2}{20}-10\,x=15\cos(x+15)$.
Com en l'últim exemple utilitzarem un gràfic per ajudar-nos a determinar el nombre i la situació aproximada de les solucions. La nostra feina se simplifica si comencem convertint l'equació que tenim en una d'equivalent que té com a part dreta un 0. Així resoldrem l'equació equivalent: $\frac{x^2}{20}-10\,x-15\cos(x+15)=0$.
Si ara dibuixem el gràfic de la part esquerra d'aquesta equació obtindrem un altre cop solucions en cada un dels talls amb l'eix de les x.

```
> eqn:=x^2/20-10*x-15*cos(x+15)=0;
> plot(lhs(eqn),x=-10..10);
```

A partir del gràfic sembla que hi ha una solució a l'interval $[1,\ 2]$.
Ara dirigirem Maple cap a trobar una solució en aquest interval.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
```

Hem trobat totes les solucions d'aquesta equació? De fet hi ha una altra solució! Per a trobar-la comenceu estirant l'interval sobre el que heu fet el gràfic. Aleshores utilitzeu `fsolve( )` per a obtenir una aproximació numèrica d'aquesta segona solució.

Exercici 4.2

Determineu totes les solucions de l'equació $x^5 - 4\,x^3 + 3\,x^2 + 7\,x - 1 = 0$. Comenceu mirant un gràfic significatiu.

Exercici 4.3

Determineu totes les solucions de l'equació $x^2 - 2 = \ln(x + 5)$. Utilitzeu el gràfic **d'una** expressió per a localitzar les solucions. Comproveu cada una de les solucions substituint-la en la'equació original.

Exercici 4.4

Els gràfics de $y = 10 - x^2$ i de $y = 4\sin(2\,x) + 5$ s'intersequen dues vegades sobre l'interval $[-5,\ 5]$.
a) Feu el gràfic de les dues equacions juntes i estimeu amb el ratolí els punts d'intersecció.
b) Escriviu una equació que es pugui resoldre per a determinar les coordenades x dels puns d'intersecció.
c) Utilitzeu `fsolve( )` per a resoldre aquesta equació.
d) Utilitzeu els resultats de la part c) per a estimar les coordenades y dels punts d'intersecció.
e) Sembla que les corbes es poden intersectar en un tercer punt a prop de $(1,\ 9)$. Utilitzeu `fsolve( )` i/o un gràfic significatiu per a demostrar que no hi ha cap punt d'intersecció en aquest lloc.

4.4 Resoldre equacions formals

Sovint Maple pot resoldre equacions formals per a qualsevol de les variables.
Suposeu que volem obtenir la solució per a la variable g de l'equació: $4 - v = 2\,T - k\,g$.
La comanda `solve( )` funciona bé en aquest cas.

```
> solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Aquí hi ha una manera més maca per a mostrar el mateix resultat:

```
> g=solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Exercici 4.4

Editeu l'última comanda per a trobar solucions per a les altres lletres T, k i v.

Exercici 4.5

Resoleu l'equació $x^2 + y^2 = 9$ per a la variable y. Assigneu el conjunt de solucions a una variable que es digui S. Quina relació hi ha entre les solucions `S[1]` i `S[2]`?

4.5 Resoldre sistemes d'equacions lineals utilitzant la comanda `solve( )`

Recordeu que cal reinicialitzar les variables abans de continuar. Carreguem també el paquet **plots**:

```
> restart:
> with(plots):
```

La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a resoldre un sistema de m equacions lineals amb n incògnites. En direm un **sistema lineal** m **per** n perquè sigui més curt.

Exemple 1:
Resoldre el sistema 2 per 2: $3\,x + 2\,y = 3$ i $x - y = -4$

```
> solve({3*x+2*y=3,x-y=-4});
```

Un gràfic de les dues funcions subjacents mostra que la solució correspon al punt d'intersecció en $(-1, 3)$. Però primer necessitem obtenir la forma explícita de cada una de les dues funcions lineals abans de poder fer-ne el dibuix. Per tant resolem cada una de les equacions respecte y.

```
> y1:=solve(3*x+2*y=3,y);
> y2:=solve(x-y=-4,y);
```

Ara construim un gràfic format de dues parts: la "`part1`" conté els gràfics de les dues equacions i la "`part2`" dibuixa el punt que és la solució que hem trobat. Aquest punt ha de ser el punt d'intersecció de les dues línies. Ho és efectivament?

```
> part1:=plot([y1,y2],x=-5..5):
> part2:=plot([[-1,3]],style=point,color=blue,symbol=circle):
> display([part1,part2]);
```

Exemple 2:
Aquí hi ha un exemple de solució d'un sistema **3 per 3** amb incògnites x, y i z.
Resolem el sistema 3 per 3: $\{x + y + z = 1,\ 3\,x + y = 3,\ x - 2\,y - z = 0\}$

```
> solve({x+y+z=1, 3*x+y=3, x-2*y-z=0});
```

Exercici 4.6

Determineu la solució del sistema:
$4\,x + 3\,y = 12,\ 5\,x - 7\,y = 35$
Comproveu la solució substituint els valors que s'obtenen en les dues equacions del sistema.

Sistemes lineals amb un nombre de solucions infinit

Quan un sistema té més **incògnites** que **equacions** sovint trobem no una si no nombre infinit de solucions. Aquí hi ha un exemple.

Exemple 1:
Resolem el sistema: $\{x + y + z = 1,\ 3\,x + y = 3\}$.

```
> solns:=solve({x+y+z=1, 3*x+y=3});
```

Noteu que aquest cop no obtenim un únic conjunt valors numèrics per a x, y i z. En comptes d'això Maple ens diu com han d'estar relacionats els valors de x, y i z per a construir una solució típica.
En particular l'expressió $x = x$ en la resposta anterior indica que l'incògnita x pot ser **qualsevol** nombre. Ens referirem a aquesta incògnita com la *variable lliure* de la solució. Per a obtenir qualsevol **solució particular** (entre el nombre infinit que hi ha) trieu un valor per a la x i utilitzeu-lo per a calcular els valors corresponents de la y i de la z. Per exemple si $x = 4$.

```
> subs(x=4,solns);
```

Així una solució és: $x = 4$, $y = -9$ i $z = 6$.
Preneu-vos un minut de temps i verifiqueu a ma que aquests tres nombres satisfan realment les equacions originals: $x + y + z = 1$ i $3\,x + y = 3$.
Mirem ara la solució generada quan prenem $x = 2$.

```
> subs(x=2,solns);
```

Així que dues de les infinites solucions que hi ha són: $(x,\ y,\ z) = (4,\ -9,\ 6)$ i $(2,\ -3,\ 2)$.

Exercici 4.7

Resoleu el sistema: $\{x + 2\,y + z = 2,\ 3\,x + y = 1\}$ i doneu com a mínim tres solucions particulars.