

Pràctiques integrades

Pràctica 7

Matemàtiques, curs 2001-2002.

7 Llistes, conjunts i successions

El programa Maple permet treballar amb *conjunts* de dades. Aquests *conjunts* es poden entrar de diverses maneres i podem canviar l'estructura segons ens interressi.

7.1 Llistes

Una llista és un conjunt ordenat d'expressions on es permeten repeticions. L'entrada al Maple es fa entre claudàtors (`[ ]`), separant els elements amb comes.

Exemple 7.1

Definim la variable a com la llista `[1, 2, 3, 2, 1, 2]`:

```
> a:=[1,2,3,2,1,2];
```

Els elements d'una llista es poden cridar un a un mitjançant la posició entre claudàtors. Si utilitzem nombres negatius, retorna l'element començant per la cua.

Exemple 7.2

Si volem el tercer element de la llista a és:

```
> a[3];
```

Mentre que si volem l'últim és:

```
> a[-1];
```

De la mateixa manera també podem extreure una subllista. Si volem una subllista amb els elements entre les posicions i i j , cal introduir l'argument `i..j`:

```
> a[2..4];
```

També podem construir una llista com la unió de vàries. Per a això necessitem abans “treure” els claudàtors i afegir-los després. La funció que ens permet treure els claudàtors és la funció `op( )`. Un cop hem tret els claudàtors podem concatenar dues llistes:

Exercici 7.1

Definiu la funció `concatenar`, depenent de dues variables, que retorni la unió de dues llistes donades.

Comproveu que la definició que heu fet és correcta fent la prova sobre les llistes $a = [1, 2, 3, 2, 1]$ i $b = [3, 2, 4]$.

El resultat ha de ser la llista $c = [1, 2, 3, 2, 1, 3, 2, 4]$.

7.2 Conjunts

En un conjunt no hi ha repeticions i les dades no tenen un ordre prefixat (Maple pot variar l'ordre, depenent del context). L'entrada al Maple es fa entre claus ($\{ \}$), separant els elements per comes. La majoria d'opcions que hem vist per les llistes són també vàlides per als conjunts, tenint en compte les possibles diferències.

Exemple 7.3

Definiu a b el conjunt $\{1, 2, 5, 1, 3\}$:

```
> b:={1,2,5,1,3};
```

Observeu la sortida que us torna.

Els elements d'un conjunt també es poden cridar mitjançant els claudàtors, tenint en compte que, a priori, no coneixem l'ordre en que Maple guarda els elements.

Exemple 7.4

Per a cridar el tercer element del conjunt b fem:

```
> b[3];
```

Observeu que el tercer element no coincideix amb el que hem introduït quan hem definit b .

Exercici 7.2

Definiu a i b com els conjunts $\{x, y, z\}$ i $\{t, u\}$. Definiu $c = a \cup b$.

Definiu una funció que, a partir de dos conjunts, doni com a resultat la seva unió. Proveu-la sobre els conjunts $A = \{1, 4, 9, 16\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

7.3 Successions

Una successió d'elements és una conjunt ordenat però que s'interpreta com n arguments (i no una sola llista), on n és el número d'elements de la successió. L'entrada al Maple és sense cap delimitador.

Exemple 7.5

Si volem definir com a la successió 1, 4, 9, 16 posem

```
> a:=1,4,9,16;
```

Una altra manera d'aconseguir successions és mitjançant la comanda `seq` que vam introduir a la primera pràctica.

Exemple 7.6

La llista c amb els primers 10 quadrats enters.

```
> c:=seq(i^2,i=1..10);
```

Igual que en el cas de les llistes podem treure un element d'una successió, unir successions, ...

Exercici 7.3

Definiu la funció de dues variables $f(x, y) = x^2 - y^2$. Considereu $a = (5, 7)$. Com s'ha d'introduir a per aconseguir que $f(a)$ doni com a resultat el valor -24 ?

7.4 Canvis de format entre llistes, successions i conjunts

Maple permet transformar una expressió que té guardada com una llista, successió o conjunt als altres formats.

A l'apartat de llistes ja hem vist com podem canviar una llista d'expressions en una successió, mitjançant la comanda `op( )`.

Exemple 7.7

Podem convertir la llista $a = [1, 2, 3, 2, 1]$ en una successió b fent

```
> a:=[1,2,3,2,1];  
> b:=op(a);
```

Un cop tenim una successió podem transformar-la un altre cop en una llista afegint els delimitadors.

Exemple 7.8

Si volem recuperar la successió b en format llista podem afegir els claudàtors:

```
> [b];
```

Podem fer el mateix procediment amb els conjunts i les successions. Hem de tenir en compte que quan passem una successió o una llista a format conjunt perdem les repeticions i l'ordre que hi teníem.

Exercici 7.4

Convertiu la llista $a = [3, 2, 1, 4, 2, 2, 2]$ en un conjunt b i feu una nova llista c amb els elements de b .

Una altra manera de fer conversions entre llistes, successions i conjunts és amb la comanda `convert( )`. Aquesta comanda s'utilitza per a canvis en altres contextos dins de Maple (taules a matrius, ...).

Per a passar d'un format a l'altre tan sols cal conèixer la terminologia de Maple corresponent a cada un d'ells: `set` per a conjunts i `list` per a llistes.

Exemple 7.9

Considerem la llista formada pels elements $a = [3, 2, 1, 4, 3]$. Podem passar-la a format conjunt mitjançant:

```
> a:=[3,2,1,4,3];
> b:=convert(a,'set');
```

I podem tornar al format llista mitjançant:

```
> convert(b,'list');
```

7.5 Comptar elements de llistes i conjunts

La funció que permet comptar el nombre d'elements d'una llista o conjunt és la funció `nops( )`.

Exemple 7.10

Volem saber quants elements diferents té la llista $a = [3, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 2, 2, 4]$. La funció `nops( )` aplicada directament a la llista:

```
> a:=[3,4,2,1,3,5,3,4,3,4,5,3,2,2,4];
> nops(a);
```

retorna el nombre d'elements de la llista (amb repeticions incloses). Una manera de saber quants elements diferents té és passar primer la llista a conjunt b i comptar el nombre d'elements del conjunt:

```
> b:=convert(a,'set'); nops(b);
```

Exercici 7.5

Quants elements té la llista $a:=[[1,2,3],[x,y],\{2, 3,4\}, x, 1, 2]$?

7.6 Exemple: grups de permutacions

Recordem que una permutació d'un conjunt de n elements $\{1, 2, \dots, n\}$ és una aplicació bijectiva:

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \{1, 2, \dots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2, \dots, n\} \\ i & \mapsto & \sigma(i) \end{array}$$

i que el conjunt de totes aquestes permutacions es designa per S_n .

Podem escriure una permutació mitjançant la notació

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

o bé mitjançant un producte de cicles disjunts.

Per a treballar amb permutacions amb el programa Maple necessitem carregar el paquet **group**:

```
> with(group);
```

7.6.1 Entrar elements

Per la majoria de les funcions és necessari introduir una permutació com a producte de cicles disjunts. Per tant una permutació és una *llista de llistes* que està continguda a un S_n amb n fixada. L'element neutre (la permutació identitat) es denota per una llista buida (`[]`)

Exemple 7.11

Per a entrar la permutació $\sigma = (1, 2, 3)(4, 5)$ (producte dels cicles $(1, 2, 3)$ i $(4, 5)$) del grup simètric S_5 entrem:

```
> sigma=[[1,2,3],[4,5]];
```

En determinats casos és útil tenir definida una permutació com una llista ordenada amb les imatges de cada posició, o sigui, $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$. Tot i això, si volem operar amb ella haurem de transformar-la a un producte de cicles disjunts mitjançant la comanda `convert`.

Exemple 7.12

Si considerem la permutació $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ i la volem introduir amb aquesta notació posem:

```
> sigma=[2,4,1,3,5];
```

Si la volem escriure com a producte de cicles disjunts posarem:

```
> convert(sigma,'disjcyc');
```

Tenint en compte que sempre podem recuperar la notació inicial amb:

```
> convert(%, 'permlist', 5);
```

on l'argument 5 és per a concretar que és un element de S_5 .

7.6.2 Operacions amb permutacions

Per a multiplicar elements utilitzem la funció `mulperms( )`.

Exemple 7.13

Per a multiplicar les permutacions $\sigma_1 = (1, 2, 3)(4, 5)$ amb $\sigma_2 = (3, 4)$ escriuiríem:

```
> sigma1=[[1,2,3],[4,5]];
```

```
> sigma2=[[3,4]];
```

```
> mulperms(sigma1,sigma2);
```

Que ha calculat: $\sigma_1 \circ \sigma_2$ o bé $\sigma_2 \circ \sigma_1$?

Per a calcular la inversa d'una permutació s'utilitza la funció `invperm( )`.

Exemple 7.14

Calculem la inversa de la permutació $(1, 2, 3)(5, 6, 4)$:

```
> sigma=[[1,2,3],[6,5,4]];
```

```
> beta=invperm(sigma);
```

Comprovem que és la inversa:

```
> mulperms(sigma,beta);
```

Exercici 7.6

Considereu les permutacions S_8 : $\sigma_1 = (1, 2, 3)(6, 7, 8)$, $\sigma_2 = (5, 4, 3, 1)$ i $\sigma_3 = (2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

Calculeu les composicions $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_3^{-1}$, $\sigma_3^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ i $(\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1}$.

Quines relacions veieu entre els resultats que heu obtingut?

7.6.3 Signe d'una permutació

Maple té implementada la funció signe d'una permutació amb el nom de `parity( )`. L'argument l'hem d'entrar com a producte de cicles disjunts i Maple retorna 1 o -1 depenent del signe de la permutació.

Exemple 7.15

Volem calcular el signe de les permutacions $(2, 1, 3, 5)(4, 9, 10)$ i $(3, 4, 1)(5, 6, 7)$:

```
> parity([[2,1,3,5],[4,9,10]]);
> parity([[3,4,1],[5,6,7]]);
```

Exercici 7.7

Considereu la permutació de S_{10} donada per $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 10 & 4 & 7 & 8 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Determineu el seu signe.