

Pràctiques integrades

Pràctica 14

Matemàtiques, curs 2001-2002.

14 Límits de successions.

14.1 Experimentació amb els valors d'una successió.

Una successió no és altre cosa que una funció que permet obtenir un valor associat a cada nombre natural. Maple permet definir funcions, avaluar-les i fins i tot representar gràficament aquests valors.

Exercici 14.1

Definiu una funció (`n->expr`) o un `proc` que permeti calcular els valors de la successió a_n per a qualsevol natural n , feu una llista dels 20 primers termes i un gràfic d'aquests valors per a:

- $a_n = \frac{2n-5}{n^2+1}$.
- $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
- $a_n = n^2 \ln(n)$.
- La successió que compleix $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = -a_n^2 + 4a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = -a_n^2 + 4a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 2.8$ i $a_{n+1} = -a_n^2 + 4a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$.
- La successió que compleix $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n - 3}$.

Exercici 14.2

Calculeu per a diferents valors dels paràmetres a i b els valors dels 20 primers termes de les successions donades per:

- $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.
- $x_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

Quin serà el límit d'aquestes successions en funció de a i b ?

Una de les formes típiques de definir una successió sense donar explícitament quin és el valor de cada un dels termes en funció del seu índex és la de donar un primer terme (a_1) i després dir que cada un dels altres termes a_{n+1} és funció de l'anterior ($a_{n+1} = f(a_n)$). És ben conegut que en molts cassos el límit d'una successió d'aquest tipus és un valor l tal que $l = f(l)$. Amb Maple es pot il·lustrar aquest fet amb una certa facilitat.

Exercici 14.3

Feu una funció o `proc` amb nom `recurr(n,ini,f)` que tingui com arguments un índex `n` un valor inicial `ini` i el nom d'una funció `f` (que haurà d'estar definida previamente) que doni com a resultat el valor del terme a_n de la successió definida per la recurrència $a_{n+1} = f(a_n)$ amb valor inicial $a_1 = ini$.

Exercici 14.4

Utilitzeu la funció `recurr` que acabeu de definir per a investigar el límit de la successió definida per les condicions $1 < a_1$ i $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ depenent del valor inicial a_1 .

Exercici 14.5

Feu un gràfic per a la successió d'abans amb un dibuix del gràfic de $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$, el de $y = x$ i els punts de la forma $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_2]$, $[a_2, a_3]$, $[a_3, a_3] \dots$ units per línies (de fet, podeu fer una funció que realitzi totes aquestes operacions en general).

14.2 Càlcul de límits automàtics.

La comanda de Maple que calcula el límit d'una expressió és `limit`. Si teniu una successió definida per $a_n = f(n)$ podeu saber el seu límit posant `limit(f(n),n=infinity);`. Per exemple:

```
> limit(n/(n+1),n=infinity);
> limit(n!/n^n,n=infinity);
> limit(2^(n^2)/n!,n=infinity);
> limit((1+1/n)^n,n=infinity);
> limit((-1)^n*sqrt(n)*sin(n^n)/(n+1),n=infinity);
> limit(cos(2*n*Pi),n=infinity);
```

Noteu que en aquest últim exemple Maple ha donat com a resultat el rang de valors $-1 \dots 1$ i no ha reconegut que els cosinus d'angles que són múltiples enters de 2π sempre valen 1. Això és conseqüència del fet que, si no fem res, la variable `n` pren valors reals i, per tant, no podem assegurar que la successió sigui constant i igual a 1.

14.2.1 Declaració de tipus.

Maple permet declarar que una variable ha de ser d'un cert tipus. Per a declarar que la variable `n` només pren valors enters positius es pot utilitzar la comanda `assume` de la següent forma

```
> assume(n,posint);  
> limit(cos(2*n*Pi),n=infinity);
```

Si consulteu l'ajuda de la comanda `assume` i de la comanda `type` podreu veure diferents formes de restringir els valors d'una variable i quins són els tipus possibles.

14.2.2 Exercicis:

Exercici 14.6

Utilitzeu `limit` per a conèixer els límits de les successions:

- $x_n = \frac{1+2^\alpha+3^\alpha+\dots+n^\alpha}{n^{(\alpha+1)}}$ per a diferents valors (positius) del paràmetre α .
- $x_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}{\ln(n)}$.
- $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.
- $x_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{(n \ln(n))}$.
- $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1)^{\sqrt{n}}$.