

PROBLEMES DE TOPOLOGIA I

Matemàtiques, 2.001-2.002

També podeu trobar aquesta llista a l'apartat de *docència* a <http://mat.uab.es/cirera>

Espais topològics

- 1.- Sigui X un conjunt amb una mètrica d . Definim una altra mètrica d' a X com $d'(x, y) = \lambda d(x, y)$, on $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Demostreu que d i d' indueixen la mateixa topologia a X .

★2.-

- (a) Sigui X un espai topològic metrizable. Demostreu que per a cada parell de punts diferents x i y hi ha entorns $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ de x i y respectivament tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.
- (b) Demostreu que si X té com a mínim dos punts i està dotat de la topologia grollera, llavors X no és metrizable. Doneu exemples de topologies a $\mathbb{R}^2$ que no siguin induïdes per cap mètrica.
- (c) Descriu la topologia induïda a $\mathbb{R}^2$ per cadascuna de les dues distàncies següents, on $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$:

$$(i) \quad d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y; \end{cases}$$

$$(ii) \quad d(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } x_1 = y_1 \text{ i } x_2 \neq y_2, \text{ o bé } x_1 \neq y_1 \text{ i } x_2 = y_2 \\ 1, & \text{si } x_1 \neq y_1 \text{ i } x_2 \neq y_2 \\ 0, & \text{en els altres casos.} \end{cases}$$

- 3.- Determineu el nombre de topologies diferents que es poden donar en un conjunt de tres elements.

- 4.- Considerem la classe $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k; k \in \mathbb{R}\}$ de subconjunts del pla $\mathbb{R}^2$, on $G_k = \{(x, y) \mid x > y + k\}$.

- (a) Demostreu que τ és una topologia a $\mathbb{R}^2$.
- (b) És τ una topologia a $\mathbb{R}^2$ si substituïm “ $k \in \mathbb{R}$ ” per “ $k \in \mathbb{Z}$ ”? I si hi posem “ $k \in \mathbb{Q}$ ”?

- ★5.- Considerem $\mathbb{R}^2$ amb la topologia usual. Decidiu quins dels següents subconjunts són oberts, quins són tancats, i quins no són ni oberts ni tancats:

$$(i) \quad \{(x, y) \mid |x + y| < 1\}. \quad (iv) \quad \{(x, y) \mid x = y, x \neq 0\}.$$

$$(ii) \quad \{(x, y) \mid |x + y| \leq 1\}. \quad (v) \quad \{(x, y) \mid x^4 + y^4 < 1\}.$$

$$(iii) \quad \{(x, y) \mid xy \geq 0\}. \quad (vi) \quad \{(x, y) \mid |x| > 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0\}.$$

- 6.- Demostreu que el conjunt dels nombres reals de la forma $a\sqrt{2}$ amb $a \in \mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$ amb la topologia usual.

- ★7.- Siguin A i B dos subconjunts d'un espai topològic X . Demostreu que:

$$(i) \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}; \quad (iv) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}; \quad (vii) \quad \widehat{\overline{X - A}} = \overset{\circ}{\overline{X - A}};$$

$$(ii) \quad \widehat{\overline{A \cap B}} = \overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}}; \quad (v) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad (viii) \quad \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B;$$

$$(iii) \quad \widehat{\overline{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{\overline{A}} \cup \overset{\circ}{\overline{B}}; \quad (vi) \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}; \quad (ix) \quad \partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A) \subset \partial A;$$

i comproveu que aquests són els millors resultats possibles.

★8.- Sigui E un subconjunt dens d'un espai topològic X . Demostreu que donat qualsevol obert $\mathcal{U}$ de X , es compleix $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U} \cap E}$.

★9.- Sigui X un conjunt no numerable, i fixem un punt $x_0 \in X$. Considerem la família de subconjunts $\tau = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} = \emptyset \text{ o bé } x_0 \in \mathcal{U}\}$. Demostreu que:

- (a) (X, τ) és un espai topològic.
- (b) Si $\mathcal{U}$ és un obert diferent del buit, aleshores $\bar{\mathcal{U}} = X$.
- (c) Si C és un tancat diferent de X , aleshores $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.
- (d) X és separable, però no té cap base numerable d'oberts. (Recordeu que X és separable si i només si X conté un subconjunt dens i numerable.)

10.-

- (a) Sigui X un espai topològic amb una base numerable d'oberts. Demostreu que existeix un subconjunt C de X dens i numerable.
- (b) El recíproc no és cert; doneu-ne un contraexemple.

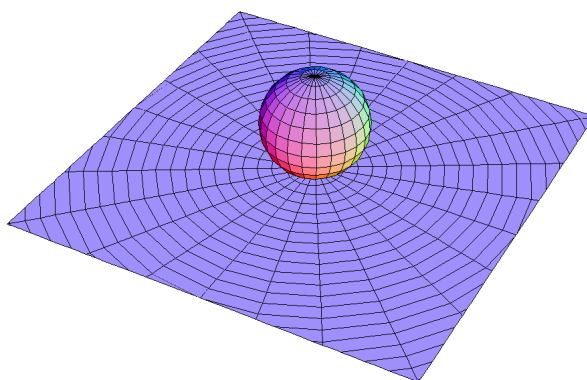
★11.- Sigui $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una base de la topologia usal de $\mathbb{R}$. Proveu que eliminant qualsevol dels B_λ d'aquesta col·lecció també obtenim una base de la topologia usual. Deduïu que es pot eliminar qualsevulla subcol·lecció finita.

Construccions d'espais topològics

12.- Sigui $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació injectiva i contínua, on $I = [0, 1]$. Demostreu que f és un homeomorfisme entre I i $f(I)$.

13.- Demostreu que si $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és una corba al pla Oyz de $\mathbb{R}^3$ sense singularitats (f injectiva) i tal que la imatge no talla l'eix Oz , aleshores la superfície de revolució obtinguda en girar aquesta corba al voltant de Oz és homeomorfa a la superfície lateral d'un cilindre (incloses les circumferències de dalt i de baix).

★14.- Demostreu que $S^n - \{\text{pol nord}\}$ és homeomorf a $\mathbb{R}^n$ amb la topologia usual. (Indicació: utilitzeu la projecció estereogràfica.)



***15.-** Sigui $\mathcal{A}$ un revestiment de X . Demostreu que en cadascun dels casos següents una aplicació $f: X \rightarrow Y$ és contínua si i només si ho és restringida a cada $A \in \mathcal{A}$:

- (a) $\mathcal{A}$ és un revestiment per oberts.
- (b) $\mathcal{A}$ és un revestiment per tancats finit.
- (c) $\mathcal{A}$ és un revestiment per tancats localment finit (tot punt de X té un entorn que talla un nombre finit d'elements de $\mathcal{A}$).

16.- Considerant intervals de $\mathbb{R}$, demostreu que pot passar que T_1 sigui homeomorf a un subespai de T_2 i T_2 sigui homeomorf a un subespai de T_1 , sense que T_1 i T_2 siguin homeomorfs entre ells.

17.- Demostreu que tots els polígons regulars de $\mathbb{R}^2$ plens amb la topologia usual són homeomorfs al disc unitat de $\mathbb{R}^2$ amb la topologia usual.

***18.-** Demostreu que els dos subconjunts següents del pla $\mathbb{R}^2$ (amb les topologies usuals) no són homeomorfs:

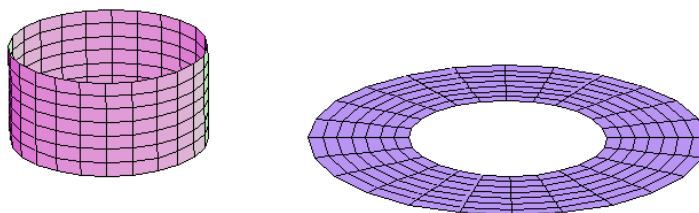
$$X = \{x \mid d(x, p_0) = 1 \text{ o bé } d(x, p_1) = 1, \text{ on } p_0 = (0, -1) \text{ i } p_1 = (0, 1)\}$$

$$Y = \{x \mid d(x, p) = 1, \text{ on } p = (0, 5)\}.$$

***19.-** Direm que un subespai $X \subset Y$ és un retracte de Y si i només si existeix una aplicació $r: Y \rightarrow X$ contínua tal que $r \circ \iota = \text{id}$, on ι denota la inclusió. Demostreu que:

- (a) $[0, 1]$ és un retracte de $\mathbb{R}$.
- (b) D^n és un retracte de $\mathbb{R}^n$.
- (c) S^{n-1} és un retracte de $\mathbb{R}^n - \{\text{origen}\}$.
- (d) S^1 és un retracte de la banda de Möbius.

20.- Demostreu que l'anell tancat $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ és homeomorf al cilindre $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$.



21.- Demostreu que $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$. (D^n és el disc unitat de $\mathbb{R}^n$.)

22.-

- (a) Sigui $A_n \subset S^1$ el conjunt format per les solucions complexes de l'equació $z^n = 1$, on $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Calculeu S^1/A_n .
- (b) Sigui A la unió dels conjunts A_n per a $n \geq 2$. Demostreu que tots els oberts no buits de S^1/A tenen un punt comú.

★23.- Recordem que $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, on $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $x_i = \lambda y_i$ per a $i = 0, \dots, n$. Demostreu que:

(a) $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, on $x \sim \pm x$.

(b) $\mathbb{R}P^n \cong D^n/\sim$, on $x \sim y$ si i només si $x = y$ o bé x i y són punts antipodals de $S^{n-1} = \partial D^n$.

(c) $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

24.- Demostreu que l'aplicació $f: \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que envia cada punt $\{x, -x\}$ al punt $(x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$ és contínua i injectiva.

★25.- Demostreu que els espais $X = \mathbb{R}/(0, 1)$ i $Y = \mathbb{R}/[0, 1]$ no són homeomorfs. (Indicació: Demostreu que $Y \cong \mathbb{R}$.)

26.- Considerem l'acció $\mu: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $\mu(n, x) = n + x$. Demostreu que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

★27.- Considerem l'acció $\mu: (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

$$\mu((m, n), (x, y)) = (m + x, n + y).$$

Demostreu que $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ és homomorf al tor.

28.- Sigui X la banda infinita $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ de $\mathbb{R}^2$, sobre la qual actua $\mathbb{Z}$ com $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$. Demostreu que $X/\mathbb{Z}$ és homeomorf a la banda de Möbius.

29.- Donat un espai topològic X , definim el cilindre de X com $ZX = X \times I$ i el con de X com $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$. Demostreu que $C(S^{n-1}) \cong D^n$.

★30.- Donada $f: X \longrightarrow Y$ contínua, definim el cilindre de f com

$$Z_f = (ZX \cup Y)/\sim \quad \text{on } (x, 0) \sim y \iff f(x) = y,$$

i definim el con de f com

$$C_f = (CX \cup Y)/\sim \quad \text{on } \{x, 0\} \sim y \iff f(x) = y.$$

Sigui $f: S^1 \longrightarrow S^1$ definida per $f(z) = z^2$. Demostreu que $C_f \cong \mathbb{R}P^2$.

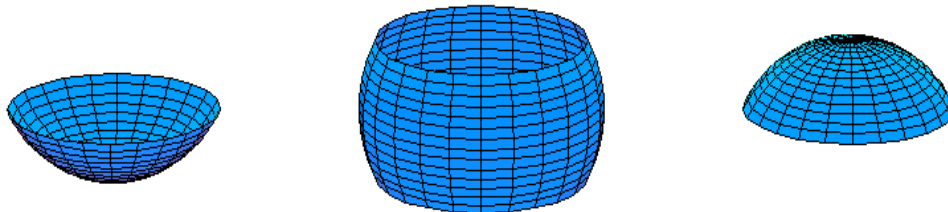
★31.- Doneu exemples d'espais topològics X i Y sobre els quals operi un grup G de manera que $X/G \cong Y/G$, però tals que X i Y no siguin homeomorfs.

★32.- Demostreu que qualsevol projecció $X \longrightarrow X/G$ és oberta, i que és tancada si el grup G és finit.

33.- Sigui X un G -espai i H un subgrup normal de G . Demostreu que X/H és un (G/H) -espai i que $(X/H)/(G/H) \cong X/G$.

34.- Representem S^2 com $D^+ \cup C \cup D^-$, on

$$\begin{aligned} D^+ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\} \\ D^- &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leq -1/2\} \\ C &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid -1/2 \leq z \leq 1/2\} \end{aligned}$$



i considerem la projecció $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Demostreu que C és homeomorf a $S^1 \times I$ i que $p(C)$ és homeomorf a la banda de Möbius.

***35.-** La gràfica d'una aplicació $f: X \rightarrow Y$ és el conjunt de punts de $X \times Y$ de la forma $(x, f(x))$ amb $x \in X$. Demostreu que si f és una aplicació contínua entre espais topològics, llavors la gràfica de f és homeomorfa a X .

36.-

- (a) Demostreu que $\mathbb{R}^2 - \{0\} \cong \mathbb{R} \times S^1$.
- (b) Demostreu que, en general, $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$.

37.-

- (a) Sigui $X = \mathbb{C} - \{0\}$ i considerem l'acció de $\mathbb{Z}$ donada per $n \cdot z = 2^n z$. Demostreu que $(\mathbb{C} - \{0\})/\mathbb{Z} \cong S^1 \times S^1$.
- (b) Considerem ara l'acció de $\mathbb{Z}$ donada per $n \cdot z = (2\omega)^n z$, on $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. A què és homeomorf l'espai $(\mathbb{C} - \{0\})/\mathbb{Z}$?

38.- Sigui G el grup d'homeomorfismes $\{T^i, i \in \mathbb{Z}\}$ on $T: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ es defineix com $T(x) = 2x$. Demostreu que $(\mathbb{R}^n - \{0\})/G \cong S^{n-1} \times S^1$.

39.- Trobeu un espai X no buit tal que $X \cong X \times X$.

40.- Siguin X, Y i Z espais topològics tal que $X \times Y \cong X \times Z$. Implica això que $Y \cong Z$?

***41.-** Considerem les projeccions

$$\begin{array}{ccc} p_1: & X_1 \times X_2 & \longrightarrow X_1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto x_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p_2: & X_1 \times X_2 & \longrightarrow X_2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto x_2 \end{array}$$

Demostreu que són obertes, i comproveu que en general no són tancades.

42.- El grup additiu de $\mathbb{Q}$ opera sobre la recta real com $q \cdot x = q + x$. Demostreu que la projecció $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és tancada.

43.- Demostreu que $\prod_i A_i$ és dens a $\prod_i X_i$ si i només si ho és cada $A_i \subset X_i$.

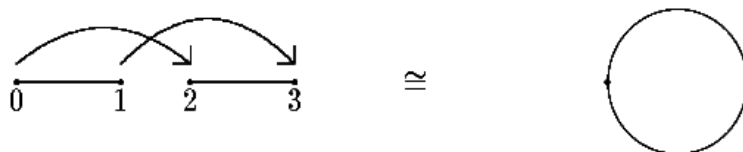
***44.-** Demostreu que si A és obert o tancat a X , aleshores $X - A \cong X/A - \{A\}$. Comproveu que això no és necessàriament cert per a un conjunt A qualsevol.

***45.-** Definim la suspensió de X com $SX = (X \times [-1, 1]) / \sim$, on $(x, 1) \sim (x', 1)$ i $(x, -1) \sim (x', -1)$ per a $x, x' \in X$. Demostreu que $SS^{n-1} \cong S^n$.

46.- Siguin X i Y espais topològics, $A \subset X$ tancat i $f: A \rightarrow Y$ contínua. Considerem l'espai adjunció

$$X \cup_f Y = (X \cup Y) / \sim, \quad \text{on } x \sim f(x) \text{ per a tot } x \in A.$$

Si $X = [0, 1]$, $Y = [2, 3]$, $A = \{0, 1\}$ i $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, demostreu que $X \cup_f Y \cong S^1$.



Compacitat

***47.-** Demostreu que la gràfica d'una funció $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ és compacta si i només si f és contínua. Doneu un exemple d'una funció discontinua $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ amb gràfica tancada però no compacta.

48.- Demostreu que la imatge per una aplicació contínua d'un espai localment compacte no és sempre localment compacte, però que sí que ho és si l'aplicació és oberta.

***49.-** Demostreu que la compactificació d'Alexandrov $(\mathbb{R}^n)^\infty$ és homeomorfa a l'esfera S^n .

50.- Sigui $X = (0, 1) \cup (2, 3)$. Comproveu que $X^\infty \cong S^1 \vee S^1$.

***51.-** Demostreu que la intersecció de dos compactes pot no ser compacta, però que tota intersecció de compactes tancats és compacta i tancada.

52.- Siguin X_1 i X_2 dos espais topològics i siguin $K_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, subespais compactes. Demostreu que tot entorn de $K_1 \times K_2$ a $X_1 \times X_2$ conté un entorn de la forma $U_1 \times U_2$ amb $K_i \subset U_i$ obert per a $i = 1, 2$.

Propietats de separació

53.- Sigui X un espai Hausdorff i x un punt de X . Demostreu que la intersecció de tots els oberts que contenen a x és $\{x\}$. Doneu un contraexemple si X no és Hausdorff.

***54.-** Sigui X compacte i Hausdorff. Demostreu que X és regular i normal.

***55.-** Sigui $f: X \rightarrow Y$ contínua i exhaustiva, amb X compacte i Y Hausdorff. Demostreu que Y té la topologia quotient determinada per f , és a dir,

$$\mathcal{U} \subset Y \text{ és obert} \iff f^{-1}(\mathcal{U}) \text{ és obert}.$$

- 56.-** Demostreu que Y és Hausdorff si i només si $\Delta_Y = \{(y, y) \in Y \times Y\}$ és un tancat de $Y \times Y$.
- *57.-** Sigui $f: X \longrightarrow Y$ contínua. Demostreu que si Y és Hausdorff, aleshores $\Delta_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ és un tancat de $X \times X$.
- 58.-** Sigui X compacte i Hausdorff, i sigui Y l'espai quocient determinat per una certa aplicació $f: X \longrightarrow Y$. Demostreu que:
- (a) Y és Hausdorff si i només si f és tancada.
 - (b) Y és Hausdorff si i només si Δ_f és tancat.
- 59.-** Sigui Y l'espai quocient determinat per una aplicació $f: X \longrightarrow Y$, on X és Hausdorff, f és tancada i $f^{-1}(y)$ és compacte per a tot y . Demostreu que Y és Hausdorff.
- *60.-** Sigui X un espai Hausdorff. Demostreu que X és localment compacte si i només si tot $x \in X$ té un entorn compacte.
- 61.-** Demostreu que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és Hausdorff.
- *62.-** Sigui $\mathcal{U}$ un obert propi de X . Demostreu que si X és compacte i Hausdorff, aleshores $\mathcal{U}^\infty \cong X/(X - \mathcal{U})$. Deduïu que si $x \in X$, llavors $(X - \{x\})^\infty \cong X$.
- 63.-**
- (a) Demostreu que el fet que X sigui Hausdorff no implica que X^∞ sigui Hausdorff.
 - (b) Demostreu que X^∞ és Hausdorff si i només si X és localment compacte i Hausdorff.
- 64.-** Demostreu que tot subespai dens i localment compacte d'un espai Hausdorff és obert.
- 65.-**
- (a) Demostreu que tot subespai localment compacte d'un espai Hausdorff és de la forma $\mathcal{U} \cap \mathcal{A}$ on $\mathcal{U}$ és obert i $\mathcal{A}$ és tancat.
 - (b) Demostreu que tot subconjunt de la forma $\mathcal{U} \cap \mathcal{A}$ on $\mathcal{U}$ és obert i $\mathcal{A}$ és tancat d'un espai localment compacte i Hausdorff, és localment compacte.
- *66.-** Demostreu que tot retracte d'un espai Hausdorff és tancat.

Connexió

- *67.-** Demostreu que un subconjunt de $\mathbb{R}$ és connex si i només si és un interval o un punt. (Un subconjunt A de $\mathbb{R}$ direm que és un interval si conté almenys dos punts diferents, i si donats $a, b \in A$ amb $a < b$ i un punt x tal que $a < x < b$, es compleix $x \in A$.)
- 68.-** Demostreu que si $n \geq 1$, llavors $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ és connex. Deduïu que S^n i $\mathbb{R}P^n$ són connexos per a tot $n \geq 1$.

69.- Demostreu que, per a cadascun dels parells A i B de subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents, l'espai $A \cup B$ és connex:

- (i) $A = \{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$
 $B = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(\pi/x)\}.$
- (ii) $A = \{(x, y) \mid 1/2 \leq x \leq 1, y = 0\},$
 $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{Z}\}.$

★70.-

- (a) Siguin $\{C_n\}$ subconjunts connexos i compactes d'un espai Hausdorff tals que $C_{n+1} \subset C_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostreu que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ és connex.
- (b) Doneu un exemple d'una família de subconjunts connexos tancats $C_n \subset \mathbb{R}^2$ tals que $C_{n+1} \subset C_n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, però on $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ no sigui connex.

71.- Siguin p i q dos punts d'un espai X . Direm que els subconjunts $A_1, \dots, A_n$ de X formen una cadena simple que uneix p amb q si A_1 (i només A_1) conté p , A_n (i només A_n) conté q , i es compleix $A_i \cap A_j = \emptyset$ si i només si $|i - j| > 1$. Demostreu que si X és connex i $\mathcal{A}$ és un revestiment obert de X , aleshores tot parell de punts de X es poden unir per una cadena simple de membres de $\mathcal{A}$.

72.- Sigui X un espai topològic i C un subespai connex de X . Demostreu que si per a un subespai E de X es compleix $C \cap E \neq \emptyset$ i $C \cap (X - E) \neq \emptyset$, llavors $C \cap \partial E \neq \emptyset$.

73.- Demostreu que, per a cadascun dels parells A i B de subconjunts de $\mathbb{R}^2$ següents, l'espai $A \cup B$ no és arc-connex:

- (i) $A = \{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$
 $B = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(\pi/x)\}.$
- (ii) $A = \{(x, y) \mid 1/2 \leq x \leq 1, y = 0\},$
 $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbb{Z}\}.$

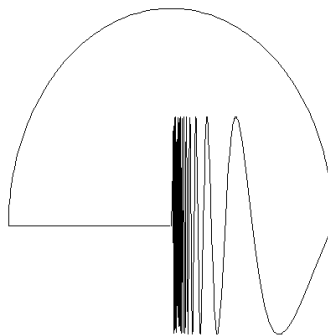
★74.- Demostreu que S^n és arc-connex per a tot $n > 0$.

★75.- Demostreu que $\mathbb{R}^n$ és localment arc-connex.

76.-

- (a) Demostreu que l'espai $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ donat per $Y = A \cup B \cup C$, on

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \\ B &= \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\} \\ C &= \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin(\pi/x)\} \end{aligned}$$



és arc-connex però no localment arc-connex.

- (b) Sigui $Z = Y \cup D \subset \mathbb{R}^2$, on Y és com a l'exercici anterior i D és la circumferència $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$. Demostreu que Z és localment arc-connex.

77.- Decidiu si són certes o falses les afirmacions següents:

- (a) Sigui A un subespai connex de X i suposem que $A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$. Llavors Y és connex (en particular $\bar{A}$ és connex).
- (b) Si A és un subconjunt arc-connex de X , aleshores $\bar{A}$ és arc-connex.
- (c) Si A i B són subconjunts arc-connexos de X tals que $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, aleshores $A \cup B$ és arc-connex.

78.- Siguin X un espai topològic, $A \subset X$, $x \in A$, $y \notin A$. Demostreu que tot camí que uneix x amb y talla la frontera de A .

Superfícies compactes

79.- Demostreu que $P^2 \# P^2 \# P^2 \cong P^2 \# T \cong P^2 \# K$, on T denota el tor i K l'ampolla de Klein.

***80.-** Demostreu que tota superfície (compacta, connexa i sense vora) és homeomorfa a una de les següents: $S^2 \# nT$, $P^2 \# nT$ o bé $K \# nT$, on $n > 0$.

81.- Si $S = nT \# mP^2$, a quina superfície estàndard és homeomorfa S ?

***82.-** Quina és la superfície representada per un decàgon regular amb les arestes identificades a parells tal com indica el símbol $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$?

83.- Quina és la superfície representada per un polígon de $2n$ costats amb les arestes identificades a parells segons el símbol

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n?$$

84.- Feu el mateix si les arestes estan identificades segons el símbol

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}.$$

85.- Classifiqueu les superfícies següents:

- (a) $abcdca^{-1}bd^{-1}$.
- (b) $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}$.
- (c) $abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}$.

***86.-** Demostreu que, per a tota triangulació d'una superfície compacta, es compleix:

$$\begin{aligned} 3c &= 2a \\ a &= 3(v - \chi) \\ v &\geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi}). \end{aligned}$$

87.- Demostreu que no és possible subdividir la superfície d'una esfera en regions de manera que cada regió tingui sis costats i cada parell de regions diferents tinguin com a molt un costat en comú.

88.- Demostreu que els únics poliedres regulars són el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre. (Un poliedre és regular si és homeomorf a S^2 , totes les cares tenen el mateix nombre de costats i a cada vèrtex hi ha el mateix nombre d'arestes.)

89.- Demostreu que la característica d'Euler d'una superfície compacta amb vora que tingui k components a la vora satisfà $\chi \leq 2 - k$.

90.- Demostreu que tota n -varietat és localment arc-connexa. (En particular, tota n -varietat connexa és arc-connexa.)

***91.-** Sigui

124	235	346	457	561	672	713
134	245	356	467	571	612	723

la triangulació d'una superfície. De quina superfície es tracta?

92.-

- (a) Identifiquem a parells els costats d'un octògon regular de manera que s'obtingui una superfície compacta. Demostreu que la característica d'Euler d'aquesta superfície és més gran o igual que -2 .
- (b) Demostreu que tota superfície compacta (orientable o no) amb característica d'Euler més gran o igual que -2 es pot obtenir identificant a parells els costats d'un octògon regular.

93.- Demostreu que la suma connexa d'una banda de Möbius amb vora i un tor és homeomorfa a la suma connexa d'una banda de Möbius amb vora i una ampolla de Klein.

***94.-** Demostreu que la superfície de la figura és homeomorfa a una ampolla de Klein amb un forat, però que no ho és a una banda de Möbius.

