Problemes d'Exàmen

EXERCISE 1. Considereu els vectors següents a $\mathbb{R}^3$:

$$u = (3, 0, 1)\,, \qquad v = (0, 4, 1)\,, \qquad w = (4, 1, 2)\,.$$

Doneu:

a) un vector a que sigui perpendicular a u i v;

b) la longitud o norma de a;

c) l'àrea del triangle format per u, v i l'origen;

d) l'equació cartesiana del pla que conté aquest triangle;

e) el volum del sòlid definit pels 8 vèrtexs u, v, w, $u + v$, $v + w$, $w + u$, $u + v + w$ i l'origen.

Exercise 2. Trobeu el volum màxim dels paral.lelepípeds rectangulars amb cares paral.leles als plans coordenats que es poden inscriure en un el.lipsoide d'equació $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

Exercise 3.

a) Calculeu la divergència del camp $X = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ si $\mathbf{a}$ és un camp constant i $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és el camp radial.

b) Trobeu el flux del camp radial $\mathbf{r}$ a través d'una esfera.

c) Calculeu la circulació del camp $X = (x \log(1 + y^2), \frac{x^2 y}{1+y^2})$ sobre la corba d'equació $x^2 + y^2 = 2x$.

Exercise 4. Sigui f una funció continua a $\mathbb{R}^2$ tal que per a tot parell de funcions $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ compleix:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy = x\beta(x) - 2\alpha(x).$$

Calculeu

$$\int_0^{e-1} \left(\int_{\ln(y+1)}^{-y+e} f(x,y)dx \right) dy$$

Exercise 5.

a) Enunicieu el teorema de Stokes.

b) Comproveu el teorema d'Stokes per al camp $F(x,y,z) = (2y, -2x, x^2+y^2)$ i la superfície

$$S = \left\{ (x,y,z)\,; 2z = x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 3 \right\}.$$

Solutions to Exercises

Exercise 1.

a) Prenem per exemple $a = u \times v = (-4, -3, 12)$

b) $||a||^2 = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$

c) L'àrea d'aquest triangle és $\frac{1}{2}||u \times v|| = \frac{13}{2}$.

d) $4x + 3y - 12z = 0$

e) És el parał.lepípede generat pels vectors u, v, w. Llavors el seu volum és $\det(u, v, w) = (u \times v) \cdot w = 5$.

Exercise 1

Exercise 2. El parał.lepípede que cerquem tindrà vertex de coordenades $(\pm x, \pm y, \pm z)$. En total 8 vertex. El seu volum és $V = 8xyz$. Hem de trobar el màxim d'aquesta funció subjecte a la condició $F(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$. Primer trobem punts (x, y, z) solució de les equacions

$$\nabla V = \lambda \nabla F, \qquad F = 0.$$

De la primera equació obtenim $8(yz, xz, xy) = \lambda(32x, 8y, 18z)$ i aïllant λ tenim

$$y^2 = 4x^2, \quad 9z^2 = 4y^2, \quad 9z^2 = 16x^2.$$

Substituint a $F = 0$ tenim que la única solució a l'octant positiu és $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4/\sqrt{3})$.

Com que el volúm mínim és zero i (x, y, z) varia sobre un compacte, la solució obtinguda correspón a un màxim. El volum màxim és llavors $64\sqrt{3}$. Exercise 2

Exercise 3.

a) La divergència de X és clarament nuł.la. En efecte, si $\mathbf{a} = (a, b, c)$ tenim

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$$

i $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$.

b) Tenim que $\nabla \cdot \mathbf{r}$ val 3. Pel teorema de la divergència

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_B 3dV = 4\pi r^3$$

on r és el radi de l'esfera S i B és la bola amb frontera S.

c) Apliquem el teorema de Green a la regió donada pel camp X i obtenim una circulació nuł.la.

Exercise 3

Exercise 4. Pel Teorema de Fubini tenim:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{e-1}\left(\int_{\ln(y+1)}^{-y+e} f(x,y)dx\right)dy &= \int_0^1\left(\int_0^{e^x-1} f(x,y)dy\right)dx + \int_1^{e} \\
&= \int_0^1 x(e^x-1)dx + \int_1^e x(e-x)dx \\
&= \frac{5}{6} + \frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} \simeq 2'8216.
\end{aligned}
$$

Exercise 4

Exercise 5. La corba C en la que volem treballar vindrà donada per

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2+y^2= & 2z \\ x^2+y^2= & 3-z^2. \end{array}\right.$$

D'aquí treiem que $2z=3-z^2$, és a dir, $z^2+2z-3=0$, per tant

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\left\{\begin{array}{l} -3 \\ 1 \end{array}\right. .$$

La solució -3 queda descartada, doncs el fet que $x^2+y^2=2z$ implica que z és positiva. L'equació cartesiana per a la corba C és doncs

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2+y^2= & 2 \\ z=1. & \end{array}\right.$$

Parametritzem ara aquesta corba. És evident que convé fer un 'canvi' a cił.líndriques:

$$x = \sqrt{2}\cos\alpha,\ y = \sqrt{2}\sin\alpha,\ z = 1,\ \alpha \in [0, 2\pi]$$

Calculem ara la integral de línia de F al llarg de C

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \left(F_1 \frac{dx}{d\alpha} + F_2 \frac{dy}{d\alpha} + F_3 \frac{dz}{d\alpha} \right) d\alpha \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha \right) d\alpha \\
&= -2 \int_0^{2\pi} d\alpha = -4\pi.
\end{aligned}$$

Ara calculem la integral $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\mathbf{S}$. Calculem primer $\nabla \times F$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -2x & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \\
&= (2y, -2x, -2-2)\,.
\end{aligned}$$

La nostra superfície es del tipus

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \frac{x^2+y^2}{2}, \end{cases}$$

per a x, y en el cercle unitat (D). Aleshores

$$\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times F) \cdot dS &= \int_D \left[(\nabla \times F)_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + (\nabla \times F)_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \right. \\
&= \int_D (-2xy + 2xy - 4)\, dxdy \\
&= -4 \int_D dxdy = -4\pi.
\end{aligned}$$

Amb això hem comprovat el teorema de Stokes en la superfície donada.

Cal fer notar que les orientacions agafades a la corba i la superfície són coherents entre elles. Agafant orientacions diferents el signe canviarà. Exercise 5