Calcul différentiel

Exercice 1. En utilisant la définition, montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2$$

est différentiable en tout point du plan et expliciter sa différentielle.

Exercice 2. (*Dérivée de Gâteaux.*)

a) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application, et supposons qu'il existe $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tels que $f'(x, h)$ soit définie. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x, \lambda h) = \lambda f'(x, h).$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ par

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

et prolongée par 0 en $(0, 0)$. Montrer que l'application $h \mapsto f'(0, h)$ est bien définie, mais n'est pas linéaire.

Exercice 3. Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une application différentiable en x, montrer que pour toute courbe C^1

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to U \subset \mathbb{R}^p$$

telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = h$, on a

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(\gamma(t)) = df_x(h).$$

Exercice 4. Soient $L, L' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ deux applications linéaires telles que

$$L(h) = L'(h) + o(\|h\|).$$

Montrer que $L = L'$.

En déduire que la différentielle d'une application, si elle existe, est unique.

Exercice 5. Prouver les règles de différentiation suivantes.

a) $d(f + \lambda g)_x = df_x + \lambda dg_x$,

b) $d(f \circ g)_x = df_{g(x)} \circ dg_x$.

Reprendre la preuve de l'exercice précédent en utilisant la règle de différentiation du point b).

Exercice 6. Soit $f : [-1,1]^p \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable en 0 telle que $f(0) = 0$. Définissons pour tout entier k non nul la fonction

$$\begin{array}{rcl} f_k : [-1,1]^p & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & 2^k \cdot f\left(\dfrac{x}{2^k}\right). \end{array}$$

Montrer que cette suite de fonctions converge vers une fonction f_∞ que l'on précisera.

Exercice 7. Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto M^2$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 8. Soit $\varphi : M \in Gl_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$.

a) Montrer que φ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.

b) Même question en $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 9.

a) Montrer que toute application bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable, et calculer sa différentielle.

b) En déduire la différentielle de l'application $N : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, x\rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

c) En déduire que l'application norme $x \mapsto N(x)^{1/2}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. L'est-elle en 0 ?

Exercice 10. On considère l'application $det : M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'elle est différentiable en l'identité et calculer sa différentielle.

b) En déduire sa différentielle en $A \in Gl_n(\mathbb{R})$.

c) Prouver que les matrices inversibles forment un ouvert dense de l'espace des matrices.

d) En déduire la différentielle du déterminant en une matrice A quelconque.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B^n la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S^{n-1}.

Démontrer l'existence de $x \in B^n$ tel que $df_x = 0$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Démontrer que f est linéaire.