Difféomorphismes

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque. Pour toute courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, on définit sa longueur par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

a) Montrer que cela définit bien une notion de longueur :
- $\ell(\gamma) \geq 0$ et $\ell(\gamma) = 0$ si et seulement si γ est une courbe constante ;
- la longueur est additive pour l'opération de concaténation (lorsque celle-ci est définie dans la classe des applications C^1) ;
- la longueur est invariante par changement de paramétrisation, c'est-à-dire que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sont deux courbes C^1, telles qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ satisfaisant $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, alors

$$\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma}).$$

b) Montrer que le plus court chemin entre deux points est réalisé par le segment de droite les reliant.

Exercice 2. a) Montrer que la projection stéréographique

$$p_N : S^{n-1} \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$$

est un homéomorphisme dont l'application réciproque est différentiable. Quel est le rang de sa différentielle ?

b) Calculer la composition $p_S \circ p_N^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ et montrer que c'est un difféomorphisme. Ici, p_S désigne la projection stéréographique relativement au pôle sud.

c) Montrer que S^3 est la suspension de S^2.

Exercice 3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$$

est un difféomorphisme local au voisinage de tout point, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 4. Nous allons démontrer le théorème du point fixe :

Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $T : F \to F$ une application telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in F$ on ait

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \cdot \|x - y\|.$$

Alors il existe un unique point $x_0 \in F$ tel que $T(x_0) = x_0$.

a) Montrer qu'un point fixe, s'il existe, est nécessairement unique.

b) Choisissons $y_0 \in F$ un point quelconque. Montrer que la suite $\{T^n(y_0)\}_n$ est de Cauchy et donc convergente vers un point $x_0 \in F$.

c) Montrer que $T(x_0) = x_0$.

Exercice 5. Montrer que f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si f est injective, de classe C^1 et df_x est inversible pour tout $x \in U$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) Démontrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé.

b) Démontrer que df_x est inversible en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

c) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Montrer le théorème des fonctions implicites à l'aide du théorème d'inversion locale : étant donnée une application $f : U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et un point $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ tels que $f(x_0, y_0) = 0$ et la matrice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(z_0) \ldots \frac{\partial f}{\partial y_n}(z_0)\right)$$

soit inversible, alors il existe un voisinage U' ouvert de z_0 dans U de la forme $U' = V_1' \times V_2' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ et une application $\varphi : V_1' \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que

$$z = (x, y) \in U' \text{ avec } f(z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Exercice 8. a) Démontrer que si $\{L_t\}_{t \in [0,1]}$ est une déformation par des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ d'une application L_0 injective (respectivement surjective), alors, pour t suffisamment petit, l'application linéaire L_t est aussi injective (respectivement surjective).

b) Prouver que lorsque $r < \min\{p, n\}$, la propriété pour une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ d'être de rang r n'est pas stable par perturbation.

Exercice 9. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, qui soit une submersion en $x_0 \in U$. Montrer qu'il existe des voisinages ouverts U' de x_0, ainsi qu'un difféomorphisme $\phi : U' \to \phi(U')$ tel que

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $x \in U'$.