Courbes intégrales de champs de vecteurs

Exercice 1.

On considère sur $\mathbb{R}$ le champ de vecteurs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x^n$ où n est un entier. Déterminer toutes les courbes intégrales, ainsi que leur intervalle maximal de définition.

Exercice 2.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère le champ de vecteurs

$$f(x,y) = (-y + x(x^2 + y^2 - 1), x + y(x^2 + y^2 - 1)).$$

a) Décrire le champ de vecteurs sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, et en déduire les courbes intégrales de f pour des conditions initiales sur S^1.

b) Montrer que toutes les courbes intégrales de f démarrant à l'intérieur de S^1 sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et γ_{x_0} la courbe intégrale maximale passant par un point $x_0 \in U$. Déterminer pour $t_1 \in J(x_0)$ la courbe intégrale maximale passant par $\gamma_{x_0}(t_1)$.

Exercice 4. (Théorème de Peano)

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^0. Nous allons montrer que ce champ de vecteurs admet au moins une courbe intégrale passant par chaque point x_0 de U.

Pour cela, étant donné $x_0 \in U$, on fixe $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset U$ et on choisit une suite $(f_n)_n$ de fonctions de classe C^1 convergeant uniformément vers f sur $\overline{B}(x_0, r)$.

a) Montrer que les courbes intégrales γ_n de f_n démarrant en x_0 sont définies sur un intervalle commun non vide sur lequel elles forment une famille équicontinue.

b) En déduire qu'on peut extraire de la suite γ_n une suite de fonctions qui converge uniformément vers une courbe intégrale de f.

c) En considérant l'équation différentielle $x' = x^{2/3}$, montrer que la solution n'est alors plus nécessairement unique.

Exercice 5. (Champs de vecteurs complets)

On dit qu'un champ de vecteurs $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est *complet* si pour tout $x \in U$ l'intervalle maximal sur lequel la courbe intégrale passant par x en $t = 0$ est $\mathbb{R}$.

a) Montrer que le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = (1,0)$ n'est pas complet.

b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs tel que, pour un certain choix de $a, b > 0$, on ait

$$\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est complet.

c) Le champ de vecteurs

$$f(x,y) = (-(x^2+y^2)y, (x^2+y^2)x)$$

est-il complet sur $\mathbb{R}^2$?

d) Soit f un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que l'on peut le rendre complet en le multipliant par une fonction positive.

1) Etant donnée une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*_+$ de classe C^1, montrer que les courbes intégrales de f et du champ de vecteurs défini comme $\tilde{f}(x) = f(x) \cdot g(x)$ ont même image.

2) Montrer que le champ de vecteurs

$$F(x) = e^{-[x_1 f_1(x) + \ldots + x_n f_n(x)]^2} \cdot f(x)$$

est complet.

Exercice 6.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs suivant

$$f(x,y) = (-y + x(x^2+y^2), x + y(x^2+y^2)).$$

Soit $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, et notons $J(x_0,y_0) =]t_-, t_+[$ l'intervalle de définition de la courbe intégrale maximale $\gamma := \gamma_{(x_0,y_0)}$. Posons $h(t) = \|\gamma(t)\|^2$.

a) Calculer h' en fonction de γ, et en déduire que $t_- = -\infty$.

b) Montrer que h est un difféomorphisme

$$h :]t_-, t_+[\to]u_-, u_+[.$$

Calculer son application réciproque, et montrer que $u_- = 0$.

c) Montrer que t_+ est fini. En déduire que $u_+ = +\infty$. Donner l'allure des courbes intégrales.

Exercice 7. Résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

à l'aide des champs linéaires deux dimensionnels dans le cas où $a \neq 0$.

Exercice 8. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et f un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les courbes intégrales de f démarrant dans F sont contenues dans F si et seulement si $f(x) \in F$ pour tout $x \in F$.

Exercice 9. Montrer (sans passer par une résolution explicite) que si un champ de vecteurs linéaire de dimension 2 a une orbite périodique de période T_0, alors toutes ses orbites sont périodiques de période T_0.

Exercice 10. Soit $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le flot de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $x' = Ax$. Montrer que

a) φ_t est une application linéaire ;

b) φ_t préserve les aires si et seulement si $\operatorname{Tr} A = 0$.

Exercice 11. Nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème d'Hadamard. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et telle qu'en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ la différentielle de f soit inversible et vérifie l'inégalité*

$$\|(df_x)^{-1}\| \leq A\|x\| + B,$$

A et B étant deux constantes fixées. Alors f est un difféomorphisme.

a) On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on cherche un chemin $c_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in [0,1]$

$$f(c_x(t)) = tx.$$

Montrer que ce chemin s'il existe doit être la courbe intégrale d'un champ de vecteurs noté F que l'on précisera.

b) Montrer que la courbe intégrale de F issue de 0 est bien définie sur l'intervalle $[0,1]$.

c) Définir une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En particulier g est injective.

d) Montrer que $\operatorname{Im} g$ est ouverte.

e) Montrer que pour tout point $y \in \mathbb{R}^n$ on a $y \in \operatorname{Im} g \Leftrightarrow g(f(y)) = y$. En déduire que $\operatorname{Im} g$ est fermée.

f) Justifier alors que g est surjective et conclure.

Exercice 12. (*Sur la C^1-conjuguaison des flots*)
Considérons deux champs de vecteurs f et g de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et notons φ_t et ψ_t leur flot respectif. Nous supposerons que les champs de vecteurs sont complets.

Les flots φ_t et ψ_t sont dits C^1-conjugués s'il existe un C^1-difféomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si les flots φ_t et ψ_t sont C^1-conjugués, alors

$$dh_x(f(x)) = g(h(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Réciproquement, montrer que s'il existe un C^1-difféomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$dh_x(f(x)) = g(h(x))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors les flots φ_t et ψ_t sont C^1-conjugués.

3) On considère les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$f(x,y) = (-x, y + x^2) \text{ et } g(x,y) = (-x, y)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Trouver l'expression du flot ψ_t de g.

b) Montrer que le flot φ_t de f s'écrit

$$\varphi_t(x,y) = (x\,e^{-t}, ye^t + \frac{1}{3}x^2(e^t - e^{-2t}))$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) En déduire une application h telle que $h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$. Montrer que cette application est un C^1-difféomorphisme et que les flots de f et g sont ainsi C^1-conjugués.

d) Quelle est l'image par h^{-1} des orbites suivantes de g : $\mathcal{O}^g_{(x,0)}$ pour $x \neq 0$ et $\mathcal{O}^g_{(0,y)}$ pour $y \neq 0$. En déduire le portrait de phase de f.

Considérons deux champs de vecteurs f et g sur $\mathbb{R}^n$ tels que leurs flots associés φ_t et ψ_t soient C^1-conjugués via un difféomorphisme h. Supposons que $f(0) = g(0) = 0$ et que $h(0) = 0$.

4) Montrer que les applications df_0 et dg_0 sont semblables (c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire inversible u telle que $u \circ df_0 = dg_0 \circ u$).

Supposons que les champs de vecteurs f et g sont linéaires : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) = Ax$ et $g(x) = Bx$ où A et B sont deux matrices de taille $n \times n$.

5) Montrer que les flots de f et g sont C^1-conjugués si et seulement si les matrices A et B sont semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible H telle que $HA = BH$).

6) En déduire que les champs de vecteurs linéaires associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ne sont pas C^1-conjugués.