Intégrales premières

Exercice 1. Soit $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

Montrer que ce champ de vecteurs correspondant est à divergence nulle et que H est une intégrale première.

Exercice 2. On s'intéresse au système proie-prédateur modélisé par l'équation différentielle de Lotka-Volterra associée au champ de vecteurs du plan défini par

$$f(x, y) = (ax - bxy, dxy - cy)$$

où $a, b, c, d > 0$. On s'intéresse aux solutions dont les coordonnées sont positives et on note donc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$.

1) Montrer que si $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$, alors la courbe intégrale issue de ce point demeure dans $\overset{\circ}{D}$.

2) Dresser l'allure du champ de vecteurs et déterminer ses points d'équilibre.

3) Montrer que la fonction

$$H(x, y) = by + dx - a \ln y - c \ln x$$

est une intégrale première.

4) En déduire ques le champ de vecteurs $f : D \to \mathbb{R}^2$ est complet.

5) La fonction H est-elle une fonction de Liapounov pour le point d'équilibre $(d/c, a/b)$. Que peut-on conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre ?

6) Montrer que toutes les courbes intégrales dans $\overset{\circ}{D}$ sont périodiques. Dessiner le portrait de phase.

7) Notons T la période d'une orbite périodique $\mathcal{O}_{(x_0,y_0)}$. Calculer les moyennes

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad \overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt.$$

En déduire que l'introduction d'un prédateur commun aux deux espèces proie-prédateur du précédent système est favorable aux proies.

Théorème de Poincaré-Bendixson et fonctions de Liapounov

Exercice 3. On considère le champ de vecteurs $f(x, y) = (ax - y - x(x^2 + y^2), x + ay - y(x^2 + y^2))$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Liapounov pour f en l'origine si $a \leq 0$.

2) Si $a > 0$, montrer l'existence d'un cycle limite. On pourra pour cela passer en coordonnées polaires.

Exercice 4. Soit

$$f_1(x, y) = (-y + x(1 - (x^2 + y^2)), x + y(1 - (x^2 + y^2)))$$

et

$$f_2(x, y) = (-y + x(-1 + (x^2 + y^2)), x + y(-1 + (x^2 + y^2)))$$

Montrer qu les deux champs de vecteurs admettent des cycles limites, dont l'un est stable et l'autre instable. Déterminer la stabilité de l'origine comme point d'équilibre de ces champs.

Exercice 5. On considère le champ de vecteurs suivant :

$$f(x, y) = (y, -x + y(1 - x^2 - 2y^2)).$$

1) Trouver les points fixes du flot.

2) Soit $V(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Calculer la dérivée $v(t) = V(\phi_t(x, y))$.

3) Déterminer le signe de $v(t)$ pour un point (x, y) avec $x^2 + y^2 \leq 1/2$. En déduire la nature de l'origine en tant que point d'équilibre.

4) Déterminer le signe de $v(t)$ pour un point (x, y) tel que $x^2 + y^2 \geq 1$. Conclure que l'anneau $\{1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ contient une orbite périodique.

Exercice 6. Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{array}$$

un champ de vecteurs de classe C^1.

1) Montrer, en utilisant le théorème de Green-Riemann, que si pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \neq 0,$$

alors aucune courbe intégrale de f n'est périodique.

Rappel (Théorème de Green-Riemann). Si D est un compact du plan homéomorphe à un disque dont le bord est paramétré par une courbe C positivement orientée et de classe C^1, alors

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

pour toutes fonctions P et Q de classe C^1 définies sur un voisinage ouvert de D.

2) En déduire que le champ de vecteurs suivant

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x+y^2, -y^3+x^2) \end{array}$$

n'a pas de courbe intégrale périodique.

Exercice 7. Soit $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert Ω. On considère le champ de vecteurs de classe C^1 défini comme l'opposé du gradient de cette fonction :

$$f(x) = -\mathrm{grad}\, V(x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\right).$$

1) Décrire en fonction de V les points fixes du flot associé au champ de vecteurs f.

2) Montrer que pour toute courbe intégrale γ de f on a

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t)) = -\|\mathrm{grad}\, V(\gamma(t))\|^2.$$

3) Montrer que si x_0 est un minimum local strict de V et que V n'admet pas d'autres points critiques au voisinage de x_0, alors x_0 est un point fixe asymptotiquement stable de f.

Problèmes

Exercice 8. Nous allons démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème du point fixe de Brouwer.
Soit $\overline{D} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ et $g : \overline{D} \to \overline{D}$ une application de classe C^1. Alors g admet un point fixe : $\exists\, x_0 \in \overline{D}$ tel que $g(x_0) = x_0$.

On considère pour cela le champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{D}$ défini par

$$f(x) = g(x) - x,$$

et on note ϕ_t son flot.

1) Soit x un point du bord de $\overline{D}$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\langle f(x), x \rangle \leq 0$$

avec égalité si et seulement si $f(x) = 0$.

On suppose dorénavant que g n'admet pas de point fixe, ce qui équivaut à supposer que f n'admet pas de zéro sur $\overline{D}$.

2) En déduire qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $x \in \partial\overline{D}$

$$\langle f(x), x\rangle \leq -a < 0.$$

3) On pose $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Montrer que pour tout $x \in \partial\overline{D}$

$$dV_x(f(x)) \leq -2a < 0.$$

4) En déduire qu'il existe un compact $K \subset D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ tel que le flot du champ de vecteurs $f_{|K}$ soit défini pour tout temps $t \geq 0$ et vérifie

$$\phi_t(K) \subset K.$$

5) Énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson.

6) Montrer qu'il existe une orbite de f dans D qui soit périodique.

On note $S = \{\gamma \mid \gamma \text{ est une orbite périodique de } f \text{ dans } D\}$. Cette ensemble peut être ordonné partiellement de la manière suivante : deux éléments γ_1 et γ_2 de S vérifient $\gamma_1 \gtrsim \gamma_2$ si le disque délimité par γ_1 contient γ_2. L'ensemble $(S, \gtrsim)$ est alors un ensemble partiellement ordonné.

En appliquant le lemme de Zorn, nous obtenons ainsi l'existence d'un élément minimal γ_0 dans le sens où la partie intérieure délimitée par l'orbite périodique ne contient aucune autre orbite périodique. On fixe alors un point x contenu dans l'intérieur du disque délimité par γ_0.

8) Qu'implique le théorème de Poincaré-Bendixson sur l'ensemble limite $\omega_f(x)$?

9) Montrer que $\alpha_f(x) = \omega_{-f}(x)$. Qu'implique le théorème de Poincaré-Bendixson sur l'ensemble limite $\alpha_f(x)$?

10) Enoncer le théorème du redressement du flot d'un champ de vecteurs non-nul en un point. En l'appliquant en un point de γ_0, en déduire une contradiction.

Exercice 9. On considère le système différentiel dans le plan dit de Van der Pol et associé au champ de vecteurs

$$f(x, y) = (y - \epsilon(x - x^3), -x)$$

où $\epsilon = \pm 1$. Ce système modélise un circuit RLC.

On suppose tout d'abord que $\epsilon = +1$.

1) Déterminer les zéros de f.

2) Décrire le portrait de phase du champ linéarisé associé à f en $(0, 0)$ donné par la fonction $(x, y) \mapsto df_{(0,0)}(x, y)$. Qu'en déduire *a priori* sur la nature de ce point fixe du flot associé à

f (stable, asymptotiquement stable, instable ?).

3) Montrer que la fonction $V(x,y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Liapounov sur le voisinage de l'origine formé par le disque ouvert $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$. En conclure la nature de ce point fixe du flot.

On suppose maintenant que $\epsilon = -1$.

4) Tracer le lieu des points du plan pour lesquels le champ est horizontal, et le lieu des points où le champ est vertical. En déduire un découpage du plan en quatre régions permettant d'esquisser l'allure de f.

5) Montrer que la courbe intégrale $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ issue d'un point $(0, y_0)$ avec $y_0 > 0$ vérifie $y(t) \le y_0$ tant que la courbe est contenue dans la première région

$$\mathcal{R}_1 = \{x \ge 0\} \cap \{y \ge x^3 - x\}.$$

En déduire que la courbe intégrale issue de (x_0, y_0) sort de ce domaine, et ce nécessairement en rentrant dans la région suivante définie comme

$$\{x \ge 0\} \cap \{y \le x^3 - x\}.$$

On peut de même prouver (mais cela n'est pas demandé) que toute courbe intégrale rencontre les 4 régions de la question 4) successivement.

On considère l'application $\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie pour tout $y_0 > 0$ comme l'unique $\alpha(y_0) > 0$ tel que la courbe intégrale issue de $(0, y_0)$ rencontre pour la première fois la demi-droite $\{0\} \times \mathbb{R}_-^*$ en le point $(0, -\alpha(y_0))$ (faire un dessin). C'est une application continue et on considère la fonction

$$\delta(y_0) = \alpha(y_0)^2 - y_0^2.$$

6) Montrer que si $t \in [0,T] \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ désigne la courbe intégrale issue de $(0, y_0)$ et arrivant en $(0, -\alpha(y_0))$ au temps T, alors

$$\delta(y_0) = 2 \int_0^T x^2(t)(1 - x^2(t))dt = 2 \int_\gamma x^2(1 - x^2).$$

On découpe γ en trois chemins γ_1, γ_2 et γ_3 de la manière suivante : il existe $T_1 < T_2 \in]0, T[$ tels que $x(T_1) = x(T_2) = 1$. On note $\gamma_1 = \gamma_{|[0,T_1]}$, $\gamma_2 = \gamma_{|[T_1,T_2]}$ et $\gamma_3 = \gamma_{|[T_2,T]}$.

7) Faire un dessin des trois portions de la courbe γ. Montrer, en utilisant que le long de γ on a la relation $dx = (y - (x^3 - x))dt$, que

$$\delta_1(y_0) := 2 \int_{\gamma_1} x^2(1 - x^2) = \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)}{y - x^3 + x} dx.$$

En déduire que $\delta_1(y_0)$ est décroissante en y_0.

On montre de même que $\delta_3(y_0) := 2 \int_{\gamma_3} x^2(1 - x^2)$ est décroissante en y_0.

8) Montrer, en utilisant que le long de γ on a la relation $dy = -xdt$, que

$$\delta_2(y_0) := 2 \int_{\gamma_2} x^2(1-x^2) = 2 \int_{y_2}^{y_1} x(y)(1-x(y)^2)dy < 0$$

où $y_1 = y(T_1)$ et $y_2 = y(T_2)$. En déduire que $\delta_2(y_0) \to -\infty$ lorsque $y_0 \to \infty$.

9) En déduire un compact K tel que $\phi_t(K) \subset K$ pour $t \geq 0$. Conclure à l'existence d'une orbite périodique en remarquant que l'origine n'est pas un point fixe stable et que $\dot{V} > 0$ sur D.