Universitat Autònoma de Barcelona

Grau en Matemàtiques
Treball de fi de grau

La funció zeta de Carlitz-Goss: un anàleg de la funció zeta en característica positiva

Autor: David Bachiller Pérez
Tutor: Dr. Francesc Bars Cortina

Bellaterra, 4 de juliol de 2012

Índex

1 Introducció

L'anell de polinomis $\mathbb{F}_q[T]$ té propietats aritmètiques molt semblants a $\mathbb{Z}$: és un domini euclidià, hi ha una quantitat finita d'unitats, el conjunt de primers és infinit, l'anell de classes de residus respecte de qualsevol ideal diferent de zero és finit, etc. Això fa que molts resultats de teoria de nombres clàssica tinguin el seu reflex en teoremes a $\mathbb{F}_q[T]$. S'anomena aritmètica de cossos de funcions en un variable sobre cossos finits a l'àrea de les matemàtiques que estudia $\mathbb{F}_q[T]$ en la línia de la teoria de nombres (o aritmètica de cossos de nombres) a $\mathbb{Z}$.

Des que Euler i Riemann van començar a treballar-hi als segles XVIII i XIX, la funció zeta de Riemann, que es denota per ζ i que es defineix com

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1,$$

sempre ha sigut un tema d'estudi central en la teoria de nombres. En teoria analítica, la distribució de les seves arrels guarda relació amb la distribució dels primers a $\mathbb{Z}$; la hipòtesi de Riemann, que és un dels problemes del mileni de l'institut Clay, és precisament una conjectura sobre la distribució d'aquests zeros. En teoria algebraica de números, els valors enters $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, es poden interpretar de forma aritmètica. Per exemple, els valors enters negatius guarden relació amb els números de Bernoulli i Kummer va provar un criteri que involucra la descomposició en primers del numerador d'aquests números per a resoldre alguns casos particulars de l'últim teorema de Fermat.

Leonard Carlitz (1907-1999) va ser un matemàtic americà que va dedicar part de la seva carrera a treballar en el camp de l'artimètica de cossos de funcions. Una de les seves contribucions va ser construir i estudiar un anàleg de la funció zeta de Riemann a $\mathbb{F}_q[T]$. En principi, aquesta construcció era només vàlida als enters positius. Als anys setanta, David Goss la va extendre a un conjunt analític que conté els enters (fins i tot els negatius) i va continuar la feina començada per Carlitz. En honor al treball fet per tots dos, avui en dia aquesta funció rep el nom de funció zeta de Carlitz-Goss.

L'objectiu d'aquest treball és presentar la funció zeta de Carlitz-Goss, fer una recopilació de les seves principals propietats demostrades i discutir algun problema obert.

Començarem als capítols 3 i 4 repassant alguns coneixements previs que ens calen abans de començar a treballar amb aquesta funció. En concret, dediquem tot el capítol 4 a presentar l'exponencial de Carlitz, que és una altra de les aportacions de Carlitz a les analogies entre $\mathbb{F}_q[T]$ i $\mathbb{Z}$; en aquest cas, es tracta d'una funció definida de manera que comparteixi certes propietats amb l'exponencial complexa.

Un cop enunciats aquests coneixements base, passarem a definir la funció zeta de Carlitz-Goss al capítol 5, tant als enters com al conjunt analític construït per Goss. La segona meitat del capítol estarà dedicada a diverses propietats, algunes molt anàlogues a les propietats de la funció ζ, centrant-nos sobretot en els valors enters.

Al capítol final discutim dues propietats de la funció ζ que encara no queden reflexades en propietats en el cas de característica $p > 0$: l'equació funcional i les congruències de Kummer. En el primer cas, analitzem un article de Goss en què es presenta un candidat a relacionar els valors de la funció zeta de Carlitz-Goss igual que ho fa l'equació funcional per a ζ. En el segon, presentem uns petits càlculs que podrien ser un indici d'algun resultat tipus congruències de Kummer.

2 Notacions

Presentem les notacions bàsiques que farem servir al llarg del treball:

k	denota sempre un nombre enter positiu, $k \geq 0$
n	denota sempre un nombre enter
p	denota sempre un primer de $\mathbb{Z}$ fixat
$q = p^l$	denota sempre una potència positiva fixada de p
A	anell $\mathbb{F}_q[T]$ de polinomis en la variable T i amb coeficients a $\mathbb{F}_q$
$\deg(a)$	grau del polinomi en T, per $a \in A$
A^+	conjunt de polinomis mònics d'A
$A(d)$	conjunt de polinomis de grau estrictament menor que d
$A(d)^+$	conjunt de polinomis mònics de grau estrictament menor que d
A_d^+	conjunt de polinomis mònics de grau exactament d
K	cos de fraccions d'A; és a dir, el cos $\mathbb{F}_q(T)$ de fraccions de polinomis en la variable T i coeficients a $\mathbb{F}_q$
v_∞	valoració en $1/T$ sobre K
$\lvert\cdot\rvert_\infty$	valor absolut associat a v_∞, $\lvert x\rvert_\infty = q^{-v_\infty(x)}$
K_∞	completació de K respecte el valor absolut $\lvert\cdot\rvert_\infty$
$\overline{K_\infty}$	clausura algebraica fixada de K
$\mathbb{C}_\infty$	completació de $\overline{K_\infty}$ respecte el valor absolut $\lvert\cdot\rvert_\infty$
$\mathbb{Z}_p$	anell d'enters p-àdics
v_p	valoració p-àdica sobre $\mathbb{Q}$
$\lvert\cdot\rvert_p$	valor absolut p-àdic associat a v_p, $\lvert x\rvert_p = p^{-v_p(x)}$
$l_q(k)$	suma de les xifres de k en base q
$S_\infty =$	$\mathbb{C}_\infty^* \times \mathbb{Z}_p$
$\zeta_q(n) =$	$\sum_{d\geq 0}\left(\sum_{a\in A_d^+} a^{-n}\right)$
$\langle a\rangle =$	$aT^{-\deg a}$, per $a \in A$
$a^z =$	$x^{\deg a}\langle a\rangle^y$, per $a \in A$ i $z = (x, y) \in S_\infty$
$\zeta_q(x, y) =$	$\sum_{d\geq 0} x^{-d}\left(\sum_{a\in A_d^+}\langle a\rangle^{-y}\right)$, $(x, y) \in S_\infty$
$\Pi(k)$	factorial de Carlitz
BC_k	k-èssim nombre de Bernoulli-Carlitz
$S_d(k) =$	$\sum_{a\in A_d^+} a^k$
$\widetilde{S}_d(k) =$	$\sum_{a\in A_d^+}\langle a\rangle^k$
$z_q(x, -k) =$	$\sum_{d\geq 0} x^{-d}\left(\sum_{a\in A_d^+} a^k\right) = \sum_{d\geq 0} x^{-d} S_d(k)$

3 Preliminars

3.1 Valoracions

Definició 3.1. Sigui F un cos. Una valoració amb valors reals és una aplicació v de F a $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que

1. $v(x) = +\infty$ si i només si $x = 0$.
2. $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$, $\forall x, y \in F$,
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, $\forall x, y \in F$.

Hem de pensar $+\infty$ com un element que compleix:

$$\begin{aligned} +\infty + (+\infty) &= +\infty, \\ r + (+\infty) &= +\infty, \\ +\infty &\geq r, \quad \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

i, d'aquesta manera, les propietats de valoració i de $+\infty$ seran compatibles.

És fàcil deduir que, per a tot $x, y \in F$, $y \neq 0$, les valoracions compleixen les següents propietats:

(i) $v(1) = 0$

(ii) $v(1/y) = -v(y)$

(iii) $v(x^n) = n \cdot v(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

(iv) $v(x/y) = v(x) - v(y)$

Exemple 3.2. En qualsevol cos, podem definir una valoració com $v(x) = 0$ per a tot $x \neq 0$ i $v(0) = +\infty$; s'anomena valoració trivial i és clar que compleix les tres propietats de la definició.

Exemple 3.3. Considerem $F = \mathbb{Q}$. Fixant un primer p, cada $x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es pot escriure unívocament com $x = p^n y$, on $n \in \mathbb{Z}$ i y és un racional amb numerador i denominador coprimers amb p. Aleshores, definim $v_p(x) = n$ per $x \in \mathbb{Q}^*$ i $v_p(0) = +\infty$; es fàcil comprovar que v_p, que s'anomena valoració p-àdica, compleix les tres propietats.

Exemple 3.4. En aquest cas, $K = \mathbb{F}_q(T)$ és el cos de fraccions de polinomis amb coeficients al cos finit de $q = p^l$ elements (on p és un primer i l un natural fixats). Donat $f/g \in \mathbb{F}_q(T)$ amb $f, g \in \mathbb{F}_q[T]$, $(f, g) = 1$ i $g \neq 0$, definim $v_\infty(f/g) = -(\deg(f) - \deg(g))$ si $f/g \neq 0$ i $v_\infty(0) = +\infty$.

A partir del capítol 4, sempre treballarem a $\mathbb{F}_q(T)$ amb la valoració v_∞.

3.2 Valors absoluts

Definició 3.5. Sigui F un cos qualsevol. Un valor absolut en F és una aplicació $|\cdot| : F \to \mathbb{R}$ tal que, per a tot $x, y \in F$, tenim:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ si i només si $x = 0$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. Desigualtat triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Si en comptes de 4, es satisfà la propietat

4'. Desigualtat ultramètrica: $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

parlem d'un valor absolut no arquimedià o ultramètric; en cas contrari, el valor absolut s'anomena arquimedià o no ultramètric. Com que la propietat 4' implica la 4, tot valor absolut no arquimedià és en particular arquimedià.

Una manera de diferenciar valors absoluts arquimedians i no arquimedians és la següent:

Lema 3.6. *El valor absolut d'un cos és no arquimedià si i només si el conjunt format pels valors absoluts* $|k| = |1 + \overset{(k}{\cdots} + 1|$, $k \in \mathbb{N}$, *és fitat.*

Observem que tot valor absolut $|\ |$ d'un cos F ens permet definir una distància $d(x, y) := |y - x|$ i, per tant, F està dotat de la topologia associada a aquesta mètrica. Així, podem definir els conceptes de successió convergent i de successió de Cauchy de la manera habitual i provar que tota successió convergent és de Cauchy. El recíproc, en canvi, no serà en general cert; els cossos amb valor absolut que compleixin que tota successió de Cauchy és convergent s'anomenaran *cossos complets*. En la següent secció, veurem que sempre és possible extendre un cos amb valor absolut a un cos complet respecte la topologia donada per aquest valor absolut.

Finalment, enllaçant amb la secció anterior, a partir d'una valoració a valors reals, podem obtenir un valor absolut no arquimedià.

Lema 3.7. *Sigui F un cos i $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una valoració de F. Llavors, per a qualsevol número real $c > 1$, l'aplicació $|\cdot|_v : F \to \mathbb{R}^+$ definida per $|x|_v := c^{-v(x)}$ és un valor absolut no arquimedià.*

Demostració. S'han d'utilitzar les tres propietats de les valoracions. És clar que $|\cdot|_v$ és definit positiu. A més,

$$|xy|_v = c^{-v(xy)} = c^{-(v(x)+v(y))} = c^{-v(x)}c^{-v(y)} = |x|_v \cdot |y|_v.$$

Finalment, també satisfà la propietat ultramètrica:

$$|x+y|_v = c^{-v(x+y)} \le c^{-\min\{v(x),v(y)\}} = \max\{c^{-v(x)}, c^{-v(y)}\} = \max\{|x|_v, |y|_v\}.$$

□

Observació 3.8. A partir dels dos exemples de la secció anterior, podem construir valors absoluts a $\mathbb{Q}$ i a $\mathbb{F}_q(T)$. A més, es pot demostrar que els valors absoluts asssociats a una mateixa valoració però amb diferents c's defineixen la mateixa topologia. Per tant, per als propòsits d'aquest treball, serà indiferent triar una c o una altra.

Per a la valoració p-àdica de $\mathbb{Q}$ del primer exemple de la secció anterior, agafem $c = p$; el valor absolut $|x|_p := p^{-v_p(x)}$ s'anomena valor absolut p-àdic normalitzat.

Per a la valoració v_∞ del segon exemple, triem $c = q$ i, aleshores, el valor absolut que utilitzarem serà $|x|_\infty := q^{-v_\infty(x)}$. D'aquesta manera, per exemple, $|T|_\infty = q$ i $\left|\dfrac{T^2+1}{T^3+T}\right|_\infty = q^{2-3} = q^{-1}$.

3.3 Completacions

Com ja hem dit, un cos complet és aquell en què totes les successions de Cauchy són convergents. L'exemple típic de cos complet és el conjunt dels nombres reals. En la seva construcció, partim del nombres enters i definim els nombres racionals a través de classes d'equivalència. Un cop fet això, hi ha diverses alternatives; una d'elles, presentada per Cantor l'any 1872, és utilitzar sèries de Cauchy a $\mathbb{Q}$ per obtenir $\mathbb{R}$. Aquest argument té l'avantatge que es pot generalitzar per obtenir cossos complets a partir de qualsevol cos dotat de valor absolut.

El principal resultat d'aquesta secció ve enunciat en el següent teorema.

Teorema 3.9. *Sigui F un cos dotat d'un valor absolut $|\ |_F$. Existeix un cos $\widehat{F}$ i un valor absolut $|\ |$ en $\widehat{F}$ tals que:*

(i) $\widehat{F}$ és un cos complet pel valor absolut $|\ |$.

(ii) $\widehat{F}$ conté F com a subcòs i, per a tot $x \in F$, $|x| = |x|_F$.

(iii) F és dens en $\widehat{F}$.

(iv) *Si* $(\widehat{F_1}, |\ |_1)$ *i* $(\widehat{F_2}, |\ |_2)$ *són dos cossos que satisfan (i), (ii) i (iii), aleshores existeix un únic isomorfisme de cossos* $\phi : \widehat{F_1} \to \widehat{F_2}$ *que és la identitat sobre* F *i que és compatible amb l'estructura d'espai mètric; és a dir, tal que* $|\phi(x)|_2 = |x|_1$.

Presentem ara les idees bàsiques per demostrar els apartats (*i*) i (*ii*). Considerem l'anell $C(F)$ de les successions de Cauchy d'elements de F; l'ideal $I_0(F)$ format per les successions que tenen límit zero és un ideal maximal d'aquest anell i podem identificar F amb un subcós de $C(F)$ enviant cada element $x \in F$ a la successió constant de valor x. L'anell quocient $\widehat{F} := C(F)/I_0(F)$ és, doncs, un cos que conté de manera natural F com a subcós.

Si $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}_n$ són dos elements de $C(F)$ que difereixen en un element de $I_0(F)$, aleshores els límits $\lim |a_n|_F$ i $\lim |b_n|_F$ existeixen i coincideixen a $\mathbb{R}$, de manera que podem definir un valor absolut en $\widehat{F}$ per la fórmula $|\{a_n\}_n| := \lim |a_n|_F$. Això defineix un valor absolut en $\widehat{F}$ que estén el de F i que satisfà les propietats requerides. Els detalls que falten i la demostració de (*iii*) i (*iv*) es poden consultar a [2, teorema 1.1.4].

Definició 3.10. Una parella $(\widehat{F}, |\ |)$ que satisfà les condicions de la proposició anterior s'anomena una completació de $(F, |\ |_F)$. Acabem de veure que és única llevat d'un únic isomorfisme de cossos que respecta el valor absolut; és a dir, llevat d'una isometria de cossos.

Exemple 3.11. Agafant $F = \mathbb{Q}$ amb el valor absolut p-àdic $|\ |_p$, la completació és el que s'anomena el cos de nombres p-àdics

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \ :\ a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Aquest cos conté un subanell $\mathbb{Z}_p$, topològic amb $|\ |_p$, anomenat anell d'enters p-àdics, que serà molt important a la part final d'aquest treball:

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i :\ a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

Aquí només enunciem algunes propietats que farem servir; per a un estudi més detallat, veieu [8]. Sabem que tot enter positiu m es pot escriure en base p com $m = \sum_{i=0}^{M} m_i p^i$, on $M \geq 0$ i $m_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. D'aquesta manera, els enters positius estan continguts dins de $\mathbb{Z}_p$ i, per això, a l'expressió de m en base p també se l'anomena expansió p-àdica de m, i als m_i, xifres p-àdiques de m. Com que $\mathbb{Z}_p$ és un anell, també inclou els enters negatius. Per trobar l'expansió p-àdica de $-m$, agafem $j \geq 0$ de manera que $p^j - m$ sigui positiu;

pel que hem fet abans, $p^j - m$ tindrà expansió p-àdica $p^j - m = \sum_{i=0}^{j-1} m_i p^i$. Aleshores,

$$-m = (p^j - m) - p^j = \sum_{i=0}^{j-1} m_i p^i + (p-1)p^j + (p-1)p^{j+1} + (p-1)p^{j+2} \cdots$$

ja que $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots$ a $\mathbb{Z}_p$. Això caracteritza els enters com els elements de $\mathbb{Z}_p$ que a partir d'un moment tenen totes les xifres iguals a 0 o iguals a $p-1$. D'altra banda, si $q = p^l$ és una potència positiva de p, cada element de $\mathbb{Z}_p$ té una expressió en xifres en base q unint termes:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots = (a_0 + a_1 p + \cdots + a_{l-1} p^{l-1}) + \\ +(a_l + a_{l+1} p + \cdots + a_{2l-1} p^{l-1}) p^l + \\ +(a_{2l} + a_{2l+1} p + \cdots + a_{3l-1} p^{l-1})(p^l)^2 + \cdots = \\ = a'_0 + a'_1 q + a'_2 q^2 + \cdots \end{aligned}$$

on $a'_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Finalment, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ i $\mathbb{Z}$ són subconjunts densos de $\mathbb{Z}_p$ i, per tant, les aplicacions $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es poden extendre a aplicacions $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$.

Exemple 3.12. En el cas $K = \mathbb{F}_q(T)$ amb el valor absolut $|\ |_\infty$, la completació és el conjunt de sèries de Laurent sobre $\mathbb{F}_q$ en la variable $1/T$

$$K_\infty := \widehat{K} = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n} a_i T^i \ :\ n \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

De moment, ja disposem d'una eina per a construir cossos complets i l'hem aplicat al nostre exemple base per a construir un cos K_∞ a partir de $\mathbb{F}_q(T)$ amb propietats semblants a $\mathbb{R}$. Ara, ens agradaria disposar d'un cos amb propietats anàlogues a $\mathbb{C}$; és a dir, un cos complet i algebraicament tancat.

K_∞ és complet, però no algebraicament tancat. D'altra banda, si considerem una clausura algebraica $\overline{K_\infty}$ de K_∞, el problema és que, en el cas no arquimedià, pot ser que la clausura algebraica d'un cos complet no sigui completa. Per solucionar-ho, considerem la completació de $\overline{K_\infty}$. Aquest nou cos serà complet; però, serà algebraicament tancat? La següent proposició dóna una resposta afirmativa.

Proposició 3.13. *Sigui F un cos complet amb valoració v. Sigui $\overline{F}$ una clausura algebraica fixada de F juntament amb l'extensió canònica de v. Sigui $\widehat{\overline{F}}$ la seva completació respecte del valor absolut associat a v (veieu el lema 3.7). Aleshores, $\widehat{\overline{F}}$ és algebraicament tancat.*

Observació 3.14. Si L/F és una extensió algebraica i F és un cos complet respecte d'una valoració v, hi ha una valoració $\overline{v}$ en L tal que $\overline{v}(x) = v(x)$ per a tot $x \in F$, que és única llevat d'isomorfisme. Aquesta valoració s'anomena extensió canònica de v. Per a la seva construcció, podeu consultar el llibre [3, pàgina 36].

Demostració. Sigui $P(x) = \sum_{j=0}^{d} p_j x^j \in \widehat{\overline{F}}[x]$ amb $p_d = 1$ i hem de veure que P té una arrel a $\widehat{\overline{F}}$. Sigui L una extensió de $\widehat{\overline{F}}$ que conté una arrel α de P, i dotem L de valoració mitjançant l'extensió de v.

Donat $m \in \mathbb{N}$, triem $P_1(x) = \sum_{j=0}^{d} \widehat{p_j} x^j \in \overline{F}[x]$ de manera que $m < \min_j \{v(p_j - \widehat{p_j})\}$ ($\overline{F}$ és dens sobre $\widehat{\overline{F}}$, veieu el teorema 3.9). Tenim que $P_1(\alpha) = P_1(\alpha) - P(\alpha) = \sum_{j=0}^{d} (\widehat{p_j} - p_j)\alpha^j$.

Com que $\overline{F}$ és algebraicament tancat, el conjunt d'arrels $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ de P_1 és a $\overline{F}$, de manera que $P_1(x) = \prod(x - \alpha_j)$. En conclusió, $\prod(\alpha - \alpha_j) = P_1(\alpha) = \sum(\widehat{p_j} - p_j)\alpha^j$.

Sigui $\xi_\alpha = \min_j \{v(\alpha^j)\} = \min_j \{j \cdot v(\alpha)\}$; llavors

$$\sum v(\alpha - \alpha_j) = v\left(\prod(\alpha - \alpha_j)\right) = v\left(\sum(\widehat{p_j} - p_j)\alpha^j\right) \geq$$

$$\geq \min_j \{v((\widehat{p_j} - p_j)\alpha^j)\} = \min_j \{v(\widehat{p_j} - p_j) + v(\alpha^j)\} > m + \xi_\alpha.$$

En particular, per algun j_m, tenim que $v(\alpha - \alpha_{j_m}) > (m + \xi_\alpha)/d$. Amb aquests α_{j_m}, podem construir una successió de Cauchy a $\overline{F}$ convergent a α. Això implica que $\alpha \in \widehat{\overline{F}}$. $\square$

Per tant, disposem d'un cos algebraicament tancat i complet respecte la topologia de $|\ |_\infty$ en $\mathbb{F}_q(T)$ (recordeu la definició del valor absolut $|\ |_\infty$ a l'observació 3.8).

Per fixar notacions, els espais on treballem a partir d'ara seran:

$A := \mathbb{F}_q[T]$,

$A^+ :=$ polinomis mònics d'A,

$K := \mathbb{F}_q(T)$,

$K_\infty :=$ completació de K respecte la valoració v_∞,

$\overline{K_\infty} :=$ clausura algebraica fixada de K,

$\mathbb{C}_\infty :=$ completació de $\overline{K_\infty}$.

I no hem de perdre mai de vista la següent analogia: si pensem A com $\mathbb{Z}$ i K com $\mathbb{Q}$, A^+ s'hauria d'interpretar com $\mathbb{N}$, K_∞ com $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}_\infty$ com $\mathbb{C}$.

3.4 Anàlisi no arquimediana

Quan treballem amb resultats d'anàlisi real, usem fortament el fet de tenir un valor absolut. S'anomena anàlisi no arquimediana a l'anàlisi (convergència de successions, convergència de sèries, derivació, etc) que es fa a partir d'un cos dotat d'un valor absolut no arquimedià. Sabem que aquests valors absoluts satisfan totes les propietats d'un valor absolut arquimedià; per tant, alguns dels resultats seran iguals al cas clàssic. Però, usant la propietat ultramètrica, que és més restrictiva que la desigualtat triangular, podem demostrar algun resultat força diferent al cas real.

En aquesta secció, només presentem uns quants resultats que ens seran d'ajuda per entendre els capítols posteriors. Hem de pensar sempre que estem en un cos F complet respecte d'un valor absolut no arquimedià i no hem de perdre mai de vista el cas K_∞ i $\mathbb{C}_\infty$ en què estem interessats.

Proposició 3.15. *En anàlisi no arquimedià, la condició per ser successió de Cauchy només s'ha de comprovar per a termes consecutius; és a dir, $(a_j)_{j\geq 0}$ és una successió de Cauchy si i només si $d(a_j, a_{j+1}) \to 0$.*

Demostració. La implicació que parteix de la hipòtesi que la successió és de Cauchy és evident. D'altra banda, si $d(a_j, a_{j+1}) < \varepsilon$ per a tot $j \geq N$, també tenim $d(a_j, a_{j+m}) \leq \max\limits_{0\leq i<m} d(a_{j+i}, a_{j+i+1}) < \varepsilon$ per a tot $j \geq N$ i $m > 0$. $\square$

Sigui $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ una sèrie amb coeficients a F. Definim convergència de la sèrie igual que en la teoria classica (és a dir, com a convergència de la successió de sumes parcials).

Proposició 3.16. *Sigui F un cos complet respecte d'un valor absolut no arquimedià. La sèrie $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, amb $a_j \in F$, convergeix a un element de F si i només si $\lim\limits_{j\to+\infty} a_j = 0$.*

Demostració. La implicació cap a la dreta es fa igual que en anàlisi arquimedià. Per a l'altra, si $S_k = \sum_{j\leq k} a_j$ és la successió de sumes parcials, aleshores $S_{k+1} - S_k = a_k \to 0$ per hipòtesi; però, per la proposició 3.15, això implica que $(S_k)_k$ és de Cauchy i tenim que $(S_k)_k$ és convergent perquè estem en un cos complet. $\square$

Observació 3.17. Pensat en termes de valoracions, l'anterior proposició ens diu la sèrie és convergent si i només si $v(a_j) \to +\infty$ ja que $|a_j| = c^{-v(a_j)} \to 0$.

Ara, enunciem un resultat sobre reordenació de sèries que no demostrarem. Recordem que, en el cas real, si reordenem una sèrie absolutament convergent, no alterem el seu valor, però això no succeeix amb sèries convergents condicionalment (de fet, amb una reordenació adequada, podem obtenir qualsevol número real com a límit d'una d'aquestes sèries). En anàlisi no arquimediana, qualsevol sèrie convergent es pot reordenar sense alterar el seu valor.

Proposició 3.18. *Sigui F un cos complet respecte d'un valor absolut no arquimedià. Sigui $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successió a F. Suposem que $a_i \to 0$, de manera que $\sum a_i$ convergeix i sigui S la seva suma. Llavors,*

(a) Per a tota bijecció $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tenim $S = \sum_{i\geq 1} a_{\sigma(i)}$.

(b) Per a qualsevol partició $\mathbb{N} = \bigsqcup_j I_j$, tenim que $S = \sum_j \left(\sum_{i\in I_j} a_i\right)$.

Per a una demostració, podeu consultar [8, p.74].

Per acabar, enunciem un resultat sobre sèries de potències.

Definició 3.19. En un cos complet F no arquimedià, una sèrie de potències serà una funció del tipus $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, on $a_i \in F$ per a tot i. Direm que f és *entera* si la sèrie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ convergeix per a tot $x \in F$.

Per aquest tipus de funcions, hi ha un resultat semblant al teorema de factorització de Weierstrass en anàlisi complexa que diu que tota funció entera es pot representar per un producte que involucra els seus zeros.

Teorema 3.20. *Sigui F un cos complet no arquimedià i algebraicament tancat. Sigui $f(x)$ una funció entera i sigui $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_t, \ldots\}$ el conjunt de les seves arrels no nules a F. Aleshores,*

$$f(x) = cx^n \prod_{t=1}^{\infty}(1 - \frac{x}{\lambda_t}), \text{ on } n = \min\{i : a_i \neq 0\},$$

per un cert $c \in F$. Recíprocament, donats $c \in F$, $n \geq 0$ enter i $\{\lambda_t\}_t$ un conjunt d'elements no nuls de F, el producte anterior defineix una funció entera.

4 L'exponencial de Carlitz

Carlitz, al voltant de l'any 1930, busca un anàleg a $\mathbb{F}_q[T]$ de l'exponencial complexa $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Aquesta funció, anomenada exponencial de Carlitz, havia de complir una propietat anàloga a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

L'exponencial complexa juga un paper molt important en algunes propietats de la funció zeta de Riemann; per exemple, els valors als parells i als enters negatius de ζ s'expressen mitjançant els coeficients de la sèrie de potències de $t/(\exp(t) - 1)$ (consulteu la introducció de la secció 5.2). De la mateixa manera, l'exponencial de Carlitz serà important en certes propietats de l'anàleg de la funció zeta de Riemann a $\mathbb{F}_q[T]$. Per això, abans de començar a treballar amb aquesta funció zeta, presentem de forma abreviada la construcció de l'exponencial de Carlitz.

Primer de tot, definim tres elements de $\mathbb{F}_q[T]$ que juguen un paper molt important en l'aritmètica de $\mathbb{F}_q[T]$ i que aniran apareixent al llarg del treball.

Definició 4.1. Denotem:

(1) $[i] := T^{q^i} - T \in A$ per $i > 0$.

(2) $L_0 := 1$,
$L_i := [i][i-1] \cdots [1] = \prod_{j=1}^{i} (T^{q^j} - T)$ per $i > 0$.

(3) $D_0 := 1$,
$D_i := [i][i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}} = \prod_{j=0}^{i-1} (T^{q^i} - T^{q^j})$ per $i > 0$.

Notem que $\deg[i] = q^i$, $\deg L_i = q\frac{q^i-1}{q-1}$ i $\deg D_i = i \cdot q^i$ i que les seves valoracions són aquests números però en negatiu.

Carlitz va utilitzar D_i com si fós el factorial que apareix en $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ per definir la seva exponencial en forma de sèrie de potències.

Lema 4.2. *La sèrie de potències*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j} = 1 + \frac{x^q}{T^q - T} + \frac{x^{q^2}}{(T^{q^2} - T^q)(T^{q^2} - T)} + \cdots$$

convergeix a un element de $\mathbb{C}_\infty$ per a tot $x \in \mathbb{C}_\infty$.

Demostració.

$$v_\infty\left(\frac{x^{q^j}}{D_j}\right) = v_\infty(x^{q^j}) - v_\infty(D_j) = q^j \cdot v_\infty(x) + \deg D_j = q^j \cdot (v_\infty(x) + j)$$

tendeix a $+\infty$ quan $j \to +\infty$, per a qualsevol x. □

Definició 4.3. L'exponencial de Carlitz, que denotem per e_C per no confondre-la amb l'exponencial complexa, es defineix com

$$e_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j}$$

per a tot $x \in \mathbb{C}_\infty$. Pel lema anterior, e_C està ben definida i és una funció entera $\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$.

Dedicarem el que queda de capítol a trobar una altra expressió de e_C com a producte infinit que ens caldrà més endavant. Aquesta expressió ve garantida pel teorema 3.20.

Comencem definint el que d'alguna manera seran els productes parcials de l'exponencial de Carlitz. Abans de començar, expliquem la notació que fem servir: per a $d \geq 0$, denotem $A(d) = \{a \in A \mid \deg(a) < d\}$; és a dir, $A(d)$ és el $\mathbb{F}_q$-espai vectorial de dimensió d format per tots els polinomis de grau menor estrictament que d. Clarament, $A(0) = \{0\}$ i $A = \bigcup_{d\geq 0} A(d)$. Quan calgui, també escriurem $A^+(d)$ pel conjunt de polinomis mònics de grau menor estrictament que d.

Definició 4.4. Definim $e_0(x) := x$ i, per $d > 0$, $e_d(x) := \prod_{a\in A(d)} (x - a) = \prod_{a\in A(d)} (x + a)$

A partir del números $[i]$, D_i i L_i i fent tot un seguit de càlculs que no fem explícitament (hi ha dues demostracions a [3, secció 3.1]), podem donar la següent expressió dels coeficients en x de $e_d(x)$

$$e_d(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} x^{q^i} \frac{D_d}{D_i L_{d-i}^{q^i}}.$$

Ara, volem passar aquesta igualtat al límit quan d tendeix a infinit per obtenir a una banda la sèrie de potències de e_C i a l'altra, l'expressió en forma de producte. A fi d'obtenir un producte infinit convergent, cal normalitzar, dividint pel coeficient en x de $e_d(x)$:

$$\prod_{\alpha \in A(d)\setminus\{0\}} \alpha = (-1)^d \frac{D_d}{L_d}.$$

Fent això, obtenim

$$x \prod_{\alpha \in A(d)\setminus\{0\}} (1 + x/\alpha) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \frac{L_d}{L_{d-i}^{q^i}} \frac{x^{q^i}}{D_i}.$$

Denotant $\beta_i := [1]^{\frac{q^i-1}{q-1}}$ i $\xi_i := \beta_i / L_i$, podem reescriure l'expressió anterior com

$$x \prod_{\alpha \in A(d)\setminus\{0\}} (1 + x/\alpha) = \frac{1}{\xi_d} \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \beta_i \xi_{d-i}^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}.$$

Lema 4.5. *Es compleix:*

1. $\xi_d = \prod_{j=1}^{d-1} \left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right)$.
2. $\xi_* := \lim_{d\to\infty} \xi_d = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right)$ *convergeix a* K_∞.
3. *Per a tot* $x \in \mathbb{C}_\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}$ *convergeix a* $\mathbb{C}_\infty$.
4. $x \prod_{\alpha \in A\setminus\{0\}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}$

La demostració d'aquests quatre apartats es pot consultar a [3, secció 3.2].

Amb aquest lema, ja podem demostrar el resultat que era l'objectiu d'aquest capítol.

Teorema 4.6. *Sigui* $\xi := \lambda \xi_* \in \overline{K_\infty}$, *on* λ *és un element de* $\overline{K_\infty}$ *tal que* $\lambda^{q-1} = -[1] = T - T^q$.

Per a tot $x \in \mathbb{C}_\infty$, *tenim que* $e_C(x) = x \displaystyle\prod_{\alpha \in A\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{\xi \cdot \alpha}\right)$.

Demostració. Recordem que, per definició,

$$e_C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_i}$$

i que, per l'apartat 4 del lema anterior,

$$x \prod_{\alpha \in A \setminus \{0\}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}.$$

Ara, amb les λ i ξ de l'enunciat, podem escriure

$$\beta_i = [1]^{\frac{q^i-1}{q-1}} = \left(-\lambda^{q-1}\right)^{\frac{q^i-1}{q-1}} = (-1)^{\frac{q^i-1}{q-1}} \lambda^{q^i-1} = (-1)^i \lambda^{q^i-1}.$$

La igualtat $(-1)^{\frac{q^i-1}{q-1}} = (-1)^i$ és clara en característica $p = 2$ perquè tot és igual a 1. Quan $p > 2$, hem de pensar que $(-1)^{\frac{q^i-1}{q-1}} = (-1)^{q^{i-1}+\cdots+q+1}$, que hi ha i termes en la suma de l'exponent i que q és senar.

Multiplicant per $\xi_*^{q^i-1}$

$$(-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i-1} = \lambda^{q^i-1} \xi_*^{q^i-1} = \xi^{q^i-1}.$$

Així,

$$x \prod_{\alpha \in A \setminus \{0\}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^{q^i-1} \frac{x^{q^i}}{D_i} = \frac{1}{\xi} e_C(\xi x)$$

Canviant ξx per x, obtenim la igualtat del teorema. □

Observació 4.7.

1. Aquest teorema afirma que $e_C(x) - e_C(0) = e_C(x)$ s'anul·la a ξA. Recordem que, a $\mathbb{C}$, $\exp(x) - \exp(0) = \exp(x) - 1$ s'anul·la a $2\pi i \mathbb{Z}$. De fet, es pot provar que, igual que $2\pi i$ sobre $\mathbb{Q}$, ξ és transcendent sobre K (això es va demostrar per primer cop a [13]). Consulteu el teorema 5.17 per a més analogies entre ξ i $2\pi i$

2. La propietat anàloga a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ que comentàvem en començar el capítol és $e_C(ax) = C_a(e_C(x))$ per a tot $a \in A$, on C_a és el que s'anomena mòdul de Carlitz. Els details es poden consultar a la secció 3.3 de [3].

5 Funció zeta de Carlitz-Goss

Al segle XVIII, Euler estudiava les sèries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \text{ per a } k > 0 \text{ enter,}$$

que actualment pensem com els valors enters $\zeta(k)$ de la funció zeta de Riemann. Entre altres coses, Euler va aconseguir expressar aquesta suma en forma de producte infinit i va trobar una expressió per als enters positius parells. A més, malgrat que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k$ és divergent, Euler otorgava un valor a $\zeta(-k)$, encara que utilitzava algun argument no gaire justificat. Riemann ho va formalitzar mitjançant anàlisi complex: a través de l'exponencial complexa $n^s = e^{s\log(n)}$, va veure que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ està ben definida a tot el semiplà complex $\Re(s) > 1$ i va demostrar que hi ha una prolongació analítica de ζ a tot $\mathbb{C}$; és a dir, una funció meromorfa amb un pol simple a $s = 1$ que coincideix amb $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ al semiplà $\Re(s) > 1$. Amb aquesta prolongació, Riemann dóna un sentit formal a ζ per a qualsevol enter. Curiosament, els càlculs d'Euler, malgrat no estar del tot ben justificats, trobaven correctament el valor de $\zeta(-k)$ segons la formalització de Riemann.

En aquesta secció, ens proposem definir la funció zeta de Carlitz-Goss, una analogia de ζ sobre $\mathbb{F}_q[T]$. Si per definir ζ comencem sumant inversos de potències de tots els enters positius (és a dir, de tots els generadors dels ideals no nuls de $\mathbb{Z}$, triant-los tots positius), ara el sumatori serà d'inversos de potències de tots els polinomis mònics de $\mathbb{F}_q[T]$ (és a dir, de tots els generadors dels ideals no nuls de $\mathbb{F}_q[T]$, triant-los tots mònics).

5.1 Definició

Per a tot k enter estrictament positiu, la sèrie $\displaystyle\sum_{a\in A^+} \frac{1}{a^k}$ és convergent perquè

$$v_\infty(1/a^k) = -k \cdot v_\infty(a) = k \cdot \deg(a)$$

tendeix a $+\infty$ quan $\deg(a)$ tendeix a infinit. Per tant, $1/a^k \to 0$, que equival a ser convergent (veieu l'observació 3.17). Això justifica la següent definició.

Definició 5.1. La funció zeta de Carlitz-Goss per $\mathbb{F}_q[T]$, que denotarem per ζ_q, es defineix als enters positius com

$$\zeta_q(k) = \sum_{a\in A^+} \frac{1}{a^k}$$

per a tot $k > 0$ enter.

Igual que per a la funció ζ, tenim el resultat anàleg al d'Euler que ens permet escriure la sèrie com un producte.

Proposició 5.2. *Si k és un enter positiu,*

$$\zeta_q(k) = \prod_f (1 - f^{-k})^{-1}$$

on el producte es fa respecte tots els f primers mònics d'A.

La demostració només és una adaptació de la del cas clàssic, i aquesta última es pot consultar a [7, pàgina 419].

David Goss, cap a l'any 1970, va aprofitar que, per a tot k enter no negatiu, $\sum_{a\in A^+,\ \deg(a)=d} a^k$ s'anul·la per a d prou gran (ho demostrarem al corol·lari 5.5) per definir una funció a tots els enters que als positius coincideix amb la definició de ζ_q que acabem de fer.

Definició 5.3. La funció zeta de Carlitz-Goss per a $\mathbb{F}_q[T]$ es defineix als enters com

$$\zeta_q(n) := \sum_{d\geq 0}\left(\sum_{a\in A_d^+} \frac{1}{a^n}\right)$$

per a tot n enter, on $A_d^+ := \{a \in A^+ \mid \deg(a) = d\}$.

Com ja hem dit, si n és un enter negatiu, $\sum_{a\in A_d^+} a^{-n}$ és igual a zero a partir d'un d prou gran; així, el sumatori $\sum_{d\geq 0}\left(\sum_{a\in A_d^+} a^{-n}\right)$ té una quantitat finita de termes. Per tant, l'anterior definició té sentit per a n negatiu o zero i el seu valor és un element d'A.

Quan k és un enter positiu, com que la sèrie $\displaystyle\sum_{a\in A^+} \frac{1}{a^k}$ és convergent, per la proposició 3.18, podem reordenar-la sense modificar el seu valor. Si ordenem els termes segons el seu grau, tenim que

$$\sum_{a\in A^+} \frac{1}{a^k} = \sum_{d\geq 0}\left(\sum_{a\in A_d^+} \frac{1}{a^k}\right),$$

coincidint així aquesta nova definció amb la que ja havíem fet als enters positius.

Per provar el corol·lari 5.5 i veure que $\zeta_q(-k)$ està ben definit per $k \geq 0$, hem de demostrar un teorema previ. Abans d'això, definim $l_q(k)$ com la suma de les xifres en base q de k; és a dir, si $k = \sum_{t=0}^M k_t q^t$, llavors $l_q(k) = \sum_{t=0}^M k_t$.

Teorema 5.4. *Sigui k un enter, $k \geq 0$. Sigui W un $\mathbb{F}_q$-espai vectorial de dimensió d dins d'un cos F sobre $\mathbb{F}_q$ i agafem un $f \in F \setminus W$. Llavors, si $d > l_q(k)/(q-1)$, $\sum_{w \in W}(f+w)^k = 0$.*

Demostració. Ho fem en tres passos, provant que la suma $\sum_{w\in W}(f+w)^k$ s'anul·la quan $d > k$, quan $d > l_q(k)$ i quan $d > l_q(k)/(q-1)$; és a dir, millorant la cota en cada pas. Ho separem d'aquesta manera perquè el procediment és anar expandint el producte $(f+w)^k$ i fent-ho pas a pas s'entendrà millor.

Per començar, sigui $w_1, \ldots, w_d$ una $\mathbb{F}_q$-base de W. Aleshores, $(f+w)^k = (f+\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_d w_d)^k$ per certs $\lambda_i \in \mathbb{F}_q$. Fent servir el teorema multinomial,

$$\sum_{w\in W}(f+w)^k = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_d \in \mathbb{F}_q} (f+\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_d w_d)^k =$$

$$= \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_d \in \mathbb{F}_q} \sum_{i_0+\cdots+i_d=k} \binom{k}{i_0,\ldots,i_d} f^{i_0} \cdot \lambda_1^{i_1} \cdot w_1^{i_1} \cdots \lambda_d^{i_d} \cdot w_d^{i_d}$$

Per tant, la suma està formada per múltiples de $\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_d^{i_d}$. Però, si $d > k$, en cada terme sempre hi ha algun i_j igual a zero, perquè $i_1 + \cdots + i_d \leq k$. Per tant, quan apliquem la suma sobre λ_j, estarem sumant $q = p^n$ vegades el mateix terme i això, en característica p, és zero.

En el segon pas, observem que, en característica p, si l'expressió en base q de k és $k = \sum_{t=0}^M k_t q^t$, aleshores $(a+b)^k = \prod_{t=0}^M (a^{q^t} + b^{q^t})^{k_t}$. Aplicat al nostre cas,

$$(f+w)^k = (f+\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_d w_d)^k = \prod_{t=0}^{M} (f^{q^t} + \lambda_1^{q^t} w_1^{q^t} + \cdots + \lambda_d^{q^t} w_d^{q^t})^{k_t} =$$

$$= \prod_{t=0}^{M} (f^{q^t} + \lambda_1 w_1^{q^t} + \cdots + \lambda_d w_d^{q^t})^{k_t}.$$

Al producte $(f^{q^t} + \lambda_1 w_1^{q^t} + \cdots + \lambda_d w_d^{q^t})^{k_t}$, hi ha termes amb com a màxim una quantitat k_t de lambdes multiplicant i, per tant, al producte $(f+w)^k$ hi ha termes amb com a molt $\sum_{t=0}^M k_t = l_q(k)$ lambdes multiplicant. Si $d > l_q(k)$, pel mateix argument d'abans, $\sum_{w\in W}(f+w)^k$ ha de ser zero.

Finalment, si $d > l_q(k)/(q-1)$, recordem que $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i = 0$ si $q-1$ no divideix i. Expandint la suma

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_d \in \mathbb{F}_q} \prod_{t=0}^{M} (f^{q^t} + \lambda_1 w_1^{q^t} + \cdots + \lambda_d w_d^{q^t})^{k_t}$$

pel teorema multinomial, estem sumant termes que són múltiples de $\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_d^{i_d}$ amb $i_1 + \cdots + i_d \leq l_q(k)$, que, per hipòtesi, és menor que $d(q-1)$. Això vol dir que sempre hi ha un i_j no divisible per $q-1$ i, quan apliquem la suma sobre λ_j, aquest terme s'anul·larà. □

Corol·lari 5.5. *Amb la mateixa notació d'abans, si $d > l_q(k)/(q-1)$, aleshores $\sum_{a \in A_d^+} a^k = 0$.*

Demostració. Només cal agafar $F = \mathbb{F}_q(T)$, $W = A(d)$ l'espai vectorial de polinomis de $\mathbb{F}_q[T]$ amb grau $d-1$ o inferior (que té dimensió d) i $f = T^d \in F \setminus A(d)$ i aplicar el teorema anterior: $\sum_{a \in A_d^+} a^k = \sum_{w \in A(d)} (T^d + w)^k = 0$ quan $d > l_q(k)/(q-1)$. □

Exemple 5.6. Fem ara algun exemple de càlcul concret de $\zeta_q(-k)$ a partir del corol·lari 5.5.

En qualsevol $\mathbb{F}_q[T]$, tenim que $\zeta_q(0) = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots = 1 + 0 + \cdots = 1$ perquè hi ha p polinomis de grau 1, p^2 de grau 2, etc.

També podem calcular $\zeta_q(-1) = \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{a \in A_d^+} a \right)$: els termes $\sum_{a \in A_d^+} a$ amb $d > l_q(1)/(q-1) = 1/(q-1)$ són tots nuls. Per tant, $\zeta_q(-1) = 1$ si $q \neq 2$, ja que $1 > 1/(q-1)$. En canvi, quan $q = 2$, tenim que $\zeta_2(-1) = 1 + [T + (T+1)] = 0$.

Per acabar, calculem $\zeta_3(-5)$. L'expansió 3-àdica de 5 és $5 = 2 + 1 \cdot 3$. Per tant, $l_3(5)/(3-1) = 3/2$ i, pel corol·lari anterior, tots els termes $\sum_{a \in A_d^+} a^5$ per $d = 2, 3, \cdots > 3/2$ són zero. Així,

$$\zeta_3(-5) = 1 + [T^5 + (T+1)^5 + (T-1)^5] = 1 + T^5 + (T^3+1)(T^2 - T + 1) +$$

$$+ (T^3 - 1)(T^2 + T + 1) = 1 + T - T^3.$$

Per acabar, Goss va donar un sentit a $\zeta_q(z)$, on z pertany a un conjunt analític que conté els enters, igual que es fa amb ζ quan s'estén a tot $\mathbb{C}$. Pensem en la funció zeta de Riemann, que es defineix al semiplà $\Re(s) > 1$ donant un sentit a n^s, de manera que $n^{x+iy} = e^{x \log(n)} e^{iy \log(n)}$, on $|n^{x+iy}| = |e^{x \log(n)}|$ i $|e^{iy \log(n)}| = 1$. Nosaltres farem el mateix donant un sentit a a^z.

Per a un polinomi mònic a, sigui $\langle a \rangle := a T^{-\deg a}$; és a dir, si $a = T^d + a_{d-1} T^{d-1} + \cdots + a_1 T + a_0$, llavors $\langle a \rangle = 1 + a_{d-1} T^{-1} + \cdots + a_0 T^{-d}$. Observem que sempre tenim que $\langle a \rangle \equiv 1 \pmod{T^{-1}}$ i que $v_\infty(\langle a \rangle) = 0$.

Definició 5.7. Definim $S_\infty = \mathbb{C}_\infty^* \times \mathbb{Z}_p$. Aquest conjunt té estructura de grup amb l'operació (que denotarem additivament) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 +$

y_2) i, a més, és un grup topològic amb la topologia producte. Pensem $\mathbb{Z}$ dins de S_∞ mitjançant l'aplicació injectiva $\mathbb{Z} \hookrightarrow S_\infty$ definida per $n \mapsto (T^n, n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

S_∞ serà l'anàleg a $\mathbb{C}$ quan elevem polinomis mònics a una potència en aquest conjunt.

Definició 5.8. Donat un $z = (x, y) \in S_\infty$ i un polinomi mònic $a \in A^+$, definim elevar a a la potència z com $a^z = a^{(x,y)} := x^{\deg a} \langle a \rangle^y$. El terme $\langle a \rangle^y = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{y}{j} (\langle a \rangle - 1)^j$ està ben definit perquè $\langle a \rangle \equiv 1 \pmod{T^{-1}}$ (on $\binom{y}{j}$, $y \in \mathbb{Z}_p$, és l'extensió a $\mathbb{Z}_p$ de $\binom{k}{j}$, $k \in \mathbb{Z}$).

Observem que $|a^z|_\infty = |x^{\deg(a)}|_\infty$ i que $|\langle a \rangle^y|_\infty = 1$, semblant al cas complex.

Observació 5.9. La definició de a^z com $a = T^{\deg(a)} \langle a \rangle \mapsto x^{\deg(a)} \langle a \rangle^y = a^z$ resulta natural si es consideren els següents aspectes.

Tot morfisme de $T^{\mathbb{Z}} = \{\dots, T^{-1}, 1, T, T^2, \dots\}$ en $\mathbb{C}_\infty^*$ queda determinat per la imatge de T; si aquesta es denota per x, el morfisme és $T^{\deg(a)} \mapsto x^{\deg(a)}$.

Hi ha molts endomorfismes de les 1-unitats d'A (és a dir, un $a \in A$ amb $v_\infty(a) = 0$ i $v_\infty(1 - a) > 0$; en concret, $\langle a \rangle$ és una 1-unitat) i un d'ells és elevar a $y \in \mathbb{Z}_p$. A més, a l'article [6], es demostra que tot endomorfisme entre 1-unitats d'A que és localment analític és necessàriament elevar a $y \in \mathbb{Z}_p$; consulteu aquest article per la definció de localment analític i pels detalls específics.

La següent proposició mostra que aquesta definició d'elevar a la potència z presenta propietats semblants al cas complex.

Proposició 5.10. *1. Siguin a i b dos polinomis mònics d'A i $z = (x, y) \in S_\infty$. Aleshores, $(ab)^z = a^z b^z$.*

2. Siguin $z_1, z_2 \in S_\infty$ i $a \in A^+$. Aleshores, $a^{z_1+z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$

Demostració. Tenim que $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$ i també $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$. Així doncs, $(ab)^{(x,y)} = x^{\deg(ab)} \langle ab \rangle^y = x^{\deg(a)+\deg(b)} \langle a \rangle^y \langle b \rangle^y = a^{(x,y)} b^{(x,y)}$. L'apartat 2 es prova de la mateixa manera. $\square$

Definició 5.11. La funció zeta de Carlitz-Goss a $\mathbb{F}_q[T]$ es defineix com

$$\zeta_q(z) = \sum_{a \in A^+} a^{-z} = \sum_{a \in A^+} a^{(x^{-1}, -y)} = \sum_{a \in A^+} x^{-\deg a} \langle a \rangle^{-y}$$

per $z = (x, y)$ pertanyent al "semiplà" $\{(x, y) \in S_\infty : |x|_\infty > 1\}$.

La convergència de ζ_q a $\{(x,y) \in S_\infty : |x|_\infty > 1\}$ es pot comprovar de la mateixa manera que la convergència per als enters positius, veient que el valor absolut del terme general de la sèrie convergeix a zero:

$$|x^{-\deg a} \langle a \rangle^{-y}|_\infty = |x|_\infty^{-\deg a} \cdot |\langle a \rangle|_\infty^{-y} = |x|_\infty^{-\deg a} \xrightarrow[\deg(a)\to+\infty]{} 0.$$

Per extendre ζ_q a tot S_∞, Goss va reordenar la sèrie agrupant termes del mateix grau, aprofitant un altre cop el corol·lari 5.5 per veure que la suma $\sum_{a\in A_d^+} \langle a \rangle^{-y}$ s'anul·la per a d prou gran i que la sèrie de la següent definició, que serà la definitiva, té sentit per a tot S_∞.

Definició 5.12 (Funció zeta de Carlitz-Goss)**.** La funció zeta de Carlitz-Goss a $\mathbb{F}_q[T]$ es defineix com

$$\zeta_q(x,y) := \sum_{d\geq 0} x^{-d} \left(\sum_{a\in A_d^+} \langle a \rangle^{-y} \right).$$

on (x,y) es pren al "pla" S_∞.

Si calculem la imatge de $(T^n, n) \in S_\infty$ per ζ_q, on n és un enter, obtenim

$$\zeta_q(T^n, n) = \sum_{d\geq 0} (T^n)^{-d} \left(\sum_{a\in A_d^+} \langle a \rangle^{-n} \right) =$$

$$= \sum_{d\geq 0} \left(\sum_{a\in A_d^+} (T^d \langle a \rangle)^{-n} \right) = \sum_{d\geq 0} \left(\sum_{a\in A_d^+} a^{-n} \right),$$

Per tant, aquesta definició de ζ_q inclou els valors als enters que consideràvem en iniciar el capítol. Això també explica per què a la definició 5.7 hem pensat $\mathbb{Z}$ dins S_∞ mitjançant $n \mapsto (T^n, n)$. A partir d'ara, escriurem $\zeta_q(x,y)$ si fem un resultat general per a tots els (x,y) de S_∞, però moltes vegades només treballarem als enters i, per comoditat, escriurem $\zeta_q(n)$ en comptes de $\zeta_q(T^n, n)$.

Observació 5.13.

- Els valors enters negatius de ζ_q s'han definit mitjançant una reordenació concreta d'una sèrie divergent. Aquest ordre també és clau per a desenvolupar la teoria analítica de la funció zeta de Carlitz-Goss a tot S_∞. Evidentment, una altra reordenació als enters negatius podria comportar una altra teoria; no obstant això, els valors $\zeta_q(-k)$ tenen diverses propietats (algunes de les quals enunciarem al final de la secció 5.4) anàlogues a propietats del valors enters negatius de la funció zeta de Riemann que sustenten aquesta definició.

- Hi ha una teoria analítica per a funcions en el pla S_∞, desenvolupada per Goss al capítol 8.5 del llibre [3], inspirada en la definició de la funció zeta de Carlitz-Goss.

- En el cas real, hi ha una equació funcional per a ζ que relaciona valors a la dreta i a l'esquerra de la recta $\Re(s) = 1/2$; en particular, valors enters positius i negatius. En el cas de $\mathbb{F}_q[T]$, de moment aquests dos conjunts de valors són totalment independents i no s'ha trobat cap tipus de lligam entre ells. Tot i això, com veurem a partir d'ara, hi ha molts resultats semblants entre ζ i ζ_q i, com que ζ té la seva equació funcional, seria esperable trobar algun tipus de resultat similar per a ζ_q. El capítol 6 tracta algun intent en aquest sentit.

5.2 Valors als enters positius i números de Bernoulli-Carlitz

Els números de Bernoulli B_m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, són uns elements de $\mathbb{Q}$ que es defineixen a través de la sèrie de potències $\dfrac{t}{e^t - e^0} = \dfrac{t}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$.

Com ja hem comentat al capítol 4, en el cas real hi ha una forta relació entre els coeficients de la sèrie de potències anterior (els números de Bernoulli) i els valors enters de ζ; més concretament,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 2.$$

En el nostre cas, els valors enters positius divisibles per $q-1$ també es poden expressar mitjançant uns certs elements de $\mathbb{F}_q(T)$ anomenats números de Bernoulli-Carlitz. Aquests es defineixen d'una forma similar via la funció exponencial de Carlitz e_C i la sèrie de potències de $\dfrac{z}{e_C(z) - e_C(0)} = \dfrac{z}{e_C(z)}$. Fixem-nos, però, que a la sèrie en el cas real apareix un factorial. Per tant, hem de començar definint un anàlog en característica p al factorial.

Definició 5.14. Sigui $k \in \mathbb{N}$ amb expressió en base q $k = \sum_{j=0}^{M} k_j q^j$, $0 \leq k_j < q$. Llavors, definim el factorial de Carlitz $\Pi(k)$ com

$$\Pi(k) := \prod_{j=0}^{M} D_j^{k_j}.$$

Observeu que $\Pi(q^j) = D_j$, $\Pi(0) = 1$ i $\Pi(1) = D_0 = 1$.

Per definir l'exponencial de Carlitz, ja vam utilitzar D_j com un anàleg del factorial i, en un primer moment, pot semblar que n'hem definit dos diferents. Però recordem que $e_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{\Pi(q^j)}$ i, per tant, al capítol 4 vam fer servir D_j perquè només necessitàvem els valors de $\Pi(k)$ a q^j.

El que fa que el factorial de Carlitz sigui un anàleg al factorial real són diverses propietats de divisibilitat semblants a les de $k!$. Per exemple, recordem que la descomposició en primers del factorial clàssic ve donada per

$$k! = \prod_{p \text{ primer}} p^{\alpha_p}$$

on $\alpha_p = \sum_{e \geq 1} \lfloor k/p^e \rfloor$ i $\lfloor \cdot \rfloor$ és la part entera. Es pot provar que el factorial de Carlitz també té una factorització molt similar:

$$\Pi(k) = \prod_{f \text{ primer mònic}} f^{\alpha_f}$$

on k és un enter no negatiu i $\alpha_f = \sum_{e \geq 1} \lfloor k/q^{e \deg(f)} \rfloor$. Es poden trobar altres propietats que justifiquen aquesta analogia al capítol 9 de [3].

Amb aquest factorial, ja podem fer la següent definició.

Definició 5.15. Els números de Bernoulli-Carlitz BC_m es defineixen com

$$\frac{z}{e_C(z)} = \sum_{m \geq 0} \frac{BC_m}{\Pi(m)} z^m.[1]$$

A partir d'aquesta definició, podem trobar una manera recursiva de presentar els números de Bernoulli-Carlitz:

$$z = e_C(z) \sum_{m \geq 0} \frac{BC_m}{\Pi(m)} z^m = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{q^j}}{D_j} \right) \left(\sum_{m \geq 0} \frac{BC_m}{\Pi(m)} z^m \right)$$

i, igualant coeficients del mateix grau, obtenim que $BC_0 = 1$ i que

$$0 = \sum_{j=0}^{q^j \leq k+1} \frac{BC_{k+1-q^j}}{\Pi(k+1-q^j) D_j}$$

$$\Downarrow$$

[1] $e_C(z)/z$ és una sèrie de potències amb coeficients a K amb terme constant diferent de zero; per tant, podem considerar $(e_C(z)/z)^{-1}$ com a sèrie formal en z amb coeficients a K.

$$BC_k = -\Pi(k) \sum_{j=1}^{q^j \leq k+1} \frac{BC_{k+1-q^j}}{\Pi(k+1-q^j)D_j}.$$

Aquesta forma recursiva afirma de nou que tots els BC_k són elements de $\mathbb{F}_q(T)$.

Passem ara a fer els càlculs per trobar la relació entre els valors als enters positius de ζ_q i els BC_k. Comencem amb l'exponencial de Carlitz

$$e_C(z) = z \cdot \prod_{a \in A \setminus \{0\}} \left(1 - z \cdot \xi^{-1} \cdot a^{-1}\right)$$

en forma de productori, com al capítol 4. Llavors, tenim que

$$\frac{1}{e_C(z)} = \frac{e'_C(z)}{e_C(z)} = \text{dlog}(e_C(z)) = \text{dlog}\left[z \cdot \prod_{a \in A \setminus \{0\}} \left(1 - z \cdot \xi^{-1} \cdot a^{-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{a \in A \setminus \{0\}} \frac{-\xi^{-1} a^{-1}}{1 - z \cdot \xi^{-1} \cdot a^{-1}} = \frac{1}{z} + \sum_{a \in A \setminus \{0\}} \frac{1}{z - \xi \cdot a} = \frac{1}{z} - \sum_{a \in A \setminus \{0\}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(\xi \cdot a)^j}$$

on dlog és la derivada logarítmica $\text{dlog}(f(z)) := \frac{f'(z)}{f(z)}$. Recordem que aquest operador compleix que $\text{dlog}(f(z) \cdot g(z)) = \text{dlog}(f(z)) + \text{dlog}(g(z))$, que és la propietat que utilitzem a la igualtat que passa de la primera a la segona línia.

Reordenant termes i pensant $A \setminus \{0\}$ com $\mathbb{F}_q^* \times A^+$ (això es pot fer si escribim tot polinomi $a_d T^d + \cdots + a_1 T + a_0$ diferent de zero com $a_d(T^d + \cdots + \frac{a_1}{a_d} T + \frac{a_0}{a_d})$, amb $a_d \in \mathbb{F}_q^*$ i $T^d + \cdots + \frac{a_1}{a_d} T + \frac{a_0}{a_d} \in A^+$), es té que

$$\frac{1}{e_C(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{a \in A \setminus \{0\}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(\xi \cdot a)^j} = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{a \in A^+} \frac{z^{j-1}}{\xi^j r^j a^j} =$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{F}_q^*} \frac{z^{j-1}}{\xi^j r^j} \zeta_q(j) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_q(k(q-1))}{\xi^{k(q-1)}} z^{k(q-1)-1}.$$

A l'últim pas, hem utilitzat que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} \lambda^k$ és igual a 0 si $(q-1) \nmid k$ i igual a -1 si $(q-1) | k$.

Així, per definició dels números de Bernoulli-Carlitz, obtenim

$$\sum_{m\geq 0} \frac{BC_m}{\Pi(m)} z^m = \frac{z}{e_C(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_q(k(q-1))}{\xi^{k(q-1)}} z^{k(q-1)}.$$

Per tant, hem demostrat el següent resultat:

Teorema 5.16. *Per a tot $m \in \mathbb{N}$, tenim que*

- $BC_m = \Pi(m)\zeta_q(m)/\xi^m$ *si m és "parell"; és a dir, si* $m \equiv 0 \pmod{q-1}$,
- $BC_m = 0$ *si m és "senar"; és a dir, si* $m \not\equiv 0 \pmod{q-1}$.

Recordem que $B_m = -2\,\zeta(m)\, m!/(2\pi i)^m$ si m és parell i $B_m = 0$ si m és senar, $m \geq 2$. Només cal comparar les dues expressions per adonar-se que són molt simètriques; és el producte de la funció zeta pel factorial dividit pel període de la funció exponencial elevat a m.

També hem d'observar que en un cas hem de diferenciar entre parells i senars i, en l'altre, entre múltiples i no múltiples de $q-1$. Aquesta separació de resultats (múltiples/no múltiples de 2 en el cas real, múltiples/no múltiples de $q-1$ en el cas de característica positiva) s'anirà repetint i, filosòficament, es degut a què $\mathbb{Z}^* = \{+1, -1\}$ té dos elements i, en canvi, $(\mathbb{F}_q[T])^* = \mathbb{F}_q^*$ té $q-1$ elements. Per això, a partir d'ara, en els resultats a característica positiva, als enters múltiples de $q-1$ els anomenarem "parells" i als altres, "senars".

En resum, els valors als enters positius i "parells" de la funció zeta de Caritz-Goss són

$$\zeta_q(k(q-1)) = \frac{BC_{k(q-1)}\xi^{k(q-1)}}{\Pi(k(q-1))}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fins ara no s'ha trobat una expressió similar per als valors de ζ_q als enters "senars", igual que passa per a la funció zeta de Riemann. Tot i això, en el cas clàssic, no se sap ni tan sols si $\zeta(2k+1)$ és transcendent sobre $\mathbb{Q}$. En canvi, en característica positiva, tenim el següent teorema, que està demostrat a [14].

Teorema 5.17 (Yu)**.** *Per a tot k enter estrictament positiu,*

1. *$\zeta_q(k)$ és transcendent sobre K.*
2. *$\zeta_q(k)/\xi^k \in K^*$ si k és "parell".*
3. *$\zeta_q(k)/\xi^k$ és transcendent sobre K si k és "senar".*

Després del que hem argumentat per obtenir el teorema 5.16, la segona afirmació és clara: als enters "parells", $\zeta_q(k)$ és el producte d'un element de K no nul (no pot ser zero perquè tenim l'expressió de ζ_q en forma de producte d'Euler) multiplicat per ξ^j i, per tant, és transcendent perquè ξ ho és. En canvi, als "senars", encara que dividim per ξ^j, seguim tenint un element transcendent. Aquest resultat tampoc s'ha pogut demostrar per a $\zeta(2m+1)/(2\pi i)^{2m+1}$, tot i que conjecturalment es creu que és veritat.

Observació 5.18. En començar aquest apartat, hem dit que els números de Bernoulli també apareixen a $\zeta(1-m)$, però no hi ha res semblant fins ara per a ζ_q i els BC_k, degut a la manca d'equació funcional.

5.3 El denominador dels números de Bernoulli-Carlitz

El teorema de Clausen-von Staudt estableix exactament el valor del denominador dels números de Bernoulli no nuls.

Teorema 5.19 (Clausen-von Staudt)**.** *Per a tot enter $n \geq 1$,*

$$B_{2n} + \sum_{\substack{p-1 \mid 2n, \\ p \text{ primer}}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

En particular, el denominador del nombre de Bernoulli B_{2n} és el producte dels nombres primers p tals que $p-1$ divideix $2n$.

Carlitz també va ser capaç de trobar explícitament el denominador dels nombres BC_j, demostrant els següents teoremes.

Teorema 5.20 (Carlitz)**.** *Sigui $q = p^n > 2$ i sigui $j \in \mathbb{N}$. Hi ha dues condicions en j:*

(i) $h := \dfrac{l_p(j)}{(p-1)n}$ *és enter*

(ii) $q^h - 1$ *divideix* j

Si j satisfà aquestes dues condicions, el denominador de BC_j en forma reduïda és el producte de tots els polinomis mònics irreductibles de grau h. Si j no satisfà alguna d'aquestes condicions, $BC_j \in A$.

Observem que, en començar el teorema, hem específicat que $q \neq 2$ perquè aquest cas és lleugerament diferent.

Teorema 5.21 (Carlitz)**.** *Sigui $q = 2$ i $j \in \mathbb{N}$. Definim $h := l_2(j)$. Aleshores,*

- *Si* $2^h - 1 | j$,
  - *Si* $h \neq 2$, *el denominador de* BC_j *és el producte de tots els polinomis mònics irreductibles de grau* h.
  - *Si* $h = 2$,
    - *Si* j *és parell, el denominador és* $T^2 + T + 1$.
    - *Si* j *és senar, el denominador és* $(T^2 + T)(T^2 + T + 1)$.
- *Si* $2^h - 1 \not| j$,
  - *Si* $j = 2^\alpha + 1$, *el denominador és* $T^2 + T$.
  - *Si* $j \neq 2^\alpha + 1$, $BC_j \in A$.

Un altre teorema relacionat amb els denominadors de B_k és el teorema de Sylvester-Lipschitz, que diu que per a tot $n \in \mathbb{Z}$, $n^k(n^k - 1)\frac{B_k}{k}$ és enter. Els números de Bernoulli-Carlitz també satisfan un teorema semblant.

Teorema 5.22. *Per a tot* $a \in A$,

$$a^n(a^n - 1)BC_n\frac{\Pi(n-1)}{\Pi(n)}$$

és un element d'A.

5.4 Valors als enters negatius

En el cas de ζ, com que hi ha una equació funcional que relaciona els valors als enters positius i als negatius, normalment es demostra un resultat per a uns i després ho exportes als altres mitjançat aquesta simetria. En el nostre cas, ja hem comentat que no es coneix cap equació funcional ni cap simetria entre els valors positius i negatius i no podem aprofitar el que hem fet a la secció anterior.

Comencem demostrant les propietats bàsiques de $\zeta_q(x, -k)$ per a k un enter positiu. Per d i k enters positius, definim

$$S_d(k) := \sum_{a \in A_d^+} a^k,$$

$$\widetilde{S}_d(k) := \sum_{a \in A_d^+} \langle a \rangle^k .$$

Observem que

$$\widetilde{S}_d(k) = T^{-d \cdot k} S_d(k)$$

i, per tant, les dues sumes seran zero pels mateixos k's. A més, $S_d(k)$ és un polinomi en T i $\widetilde{S}_d(k)$ és un polinomi en T^{-1}. Amb aquesta notació, podem reescriure $\zeta_q(x,-k)$ com

$$\zeta_q(x,-k) = \sum_{d\geq 0} x^{-d}\left(\sum_{a\in A_d^+}\langle a\rangle^k\right) = \sum_{d\geq 0} x^{-d}\widetilde{S}_d(k).$$

Hi ha una funció definida de forma molt semblant:

$$z_q(x,-k) := \sum_{d\geq 0} x^{-d}\left(\sum_{a\in A_d^+} a^k\right) = \sum_{d\geq 0} x^{-d}S_d(k).$$

De fet, $\zeta_q(x,-k) = z_q(xT^k,-k)$. Els càlculs amb $S_d(k)$ solen ser més fàcils que amb $\widetilde{S}_d(k)$ i per això hem definit z_q: moltes vegades demostrarem resultats per a ζ_q fent-ho primer per a z_q perquè els raonaments són més clars. Per exemple, usant el corol·lari 5.5, tenim que $S_d(k)$ s'anul·la per a d prou gran; per tant,

Lema 5.23. *$z_q(x,-k)$ és un polinomi en T i x^{-1}. En particular, $\zeta_q(-k) = \zeta_q(T^{-k},k) = z_q(1,-k)$ és un element d'A, i $\zeta_q(x,-k) = z_q(xT^k,-k)$ és un polinomi en T^{-1} i x^{-1}.*

Podem trobar una fórmula recursiva per a $z_q(x,-k)$ (i, per tant, també per $\zeta_q(x,-k)$):

$$z_q(x,0) = 1,$$
$$z_q(x,-k) = 1 - \sum_{b=0,(q-1)|(k-b)}^{k-1}\binom{k}{b}T^b x^{-1} z_q(x,-b), \quad k>0. \tag{1}$$

Per demostrar-ho, només cal notar que tot polinomi mònic a de grau d es pot escriure com $a = Th+\alpha$ on h és un polinomi mònic de grau $d-1$ i $\alpha\in\mathbb{F}_q$ i aplicar el teorema del binomi. En particular, podem usar-la per trobar una expressió recursiva de $\zeta_q(-k) = \sum_{a\in A^+} a^k = z_q(1,-k)$:

$$\zeta_q(0) = 1,$$
$$\zeta_q(-k) = 1 - \sum_{b=0,(q-1)|(k-b)}^{k-1}\binom{k}{b}T^b\zeta_q(-b), \quad k>0. \tag{2}$$

La funció zeta de Riemann compleix que $\zeta(-2k) = 0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Aquestes arrels reben el nom de zeros trivials, en contraposició als altres zeros, que només es poden donar a la regió $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < 1\}$ i que són molt més difícils de determinar (la hipòtesi de Riemann tracta de la seva ubicació). El següent resultat dóna els "zeros trivials" de ζ_q, que podem trobar mitjançant la fórmula recursiva (2) i que també es troben als "parells".

Proposició 5.24. *Tenim que, per $k > 0$ enter, $\zeta_q(-k) = 0$ si i només si k és "parell". A més, aquests zeros són simples.*

Demostració. Si k és "parell", llavors $k = M(q-1)$ per un cert $M \in \mathbb{N}$. Al sumatori de la fórmula (2), només apareixeran termes de la forma $m(q-1)$ per $0 \leq m < M$; és a dir, el valor de $\zeta_q(-k)$ depèn de $\zeta_q(0) = 1$ i de $\zeta_q(-m(q-1))$, $m < M$. Fent inducció, $\zeta_q(-k) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Per un altre costat, si $(q-1)$ no divideix k, no hi haurà terme del sumatori corresponent a $b = 0$ i, per tant, $\zeta_q(-k) = 1 - T \cdot P(T) \neq 0$, on $P \in A$.

Finalment, diem que els zeros són simples en el sentit que el polinomi $\zeta_q(x, -M(q-1))$ té $T^{-M(q-1)}$ com a arrel en x, però que si el dividim per $1 - T^{-M(q-1)}x^{-1}$, ja no s'anul·la a $T^{-M(q-1)}$. Equivalentment, en termes de $z_q(x, -M(q-1))$, seria el mateix però amb $x = 1$ i dividint per $1 - x^{-1}$. Aprofitant la fórmula recursiva (1) per a z_q, obtenim

$$z_q(x, -M(q-1)) = 1 - \sum_{b=0}^{M-1} \binom{M(q-1)}{b(q-1)} T^{b(q-1)} x^{-1} z_q(x, -b(q-1)) =$$

$$= (1 - x^{-1}) - \sum_{b=1}^{M-1} \binom{M(q-1)}{b(q-1)} T^{b(q-1)} x^{-1} z_q(x, -b(q-1))$$

i que això no s'anul·la a $x = 1$ després de dividir per $1 - x^{-1}$ es pot demostrar per inducció sobre M. $\square$

A partir d'aquí, i fins al final d'aquesta secció, veurem que els valors $\zeta_q(-k)$, definits via una reorganització específica d'una sèrie divergent (sumant en un altre ordre obtindríem valors diferents!), compleixen anàlegs de les congruències de Kummer, del criteri de Kummer, del teorema de Herbrand-Ribet, i hi ha una mesura que ens permet interpolar els valors enters negatius de forma semblant al que succeix pels valors parells negatius de la funció zeta de Riemann (teoria que va ser desenvolupada per a ζ per Leopoldt entre 1950 i 1970).

Congruències de Kummer

Definició 5.25. Donat k un enter no negatiu, definim

$$\beta(k) := \left[(1 - T^{-k}x^{-1})^{-d_k} \cdot \zeta_q(x, -k)\right]\Big|_{x=T^{-k}},$$

on $d_k = 1$ si k és "parell" i $d_k = 0$ altrament.

Si k és "senar", tenim $\beta(k) = \zeta_q(-k) \neq 0$. Si k és "parell", també tenim $\beta(k) \neq 0$ per la proposició 5.24. És a dir, els valors $\beta(k)$ són iguals als valors $\zeta_q(-k)$, però amb els zeros trivials renormalitzats.

Es compleix el següent resultat anàleg a les congruències de Kummer.

Proposició 5.26. *Sigui $f \in A$ un polinomi irreductible de grau d i siguin $k_1, k_2 > 0$ enters amb $k_1 \equiv k_2 \pmod{q^d - 1}$. Aleshores*

$$\beta(k_1) \equiv \beta(k_2) \pmod{f}.$$

A més, si $k_1 \equiv k_2 \pmod{(q^d - 1)p^j}$, llavors $\beta(k_1) \equiv \beta(k_2) \pmod{f^{p^j}}$.

Criteri de Kummer El criteri de Kummer, desenvolupat per demostrar un cas particular de l'últim teorema de Fermat, afirma que un primer senar p divideix el nombre d'elements del grup finit $Pic(\mathbb{Z}[e^{2\pi i/p}])$ (corresponent al grup lliure generat pels ideals primers de $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/p}]$ mòdul els ideals principals) si i només si p divideix el numerador d'algun nombre de Bernoulli B_k amb $1 < k < p - 2$, k parell.

L'any 1982, Goss va demostrar un anàleg del criteri de Kummer. Per començar, fixem f un primer d'A (anàleg de p primer de $\mathbb{Z}$) i considerem K_f l'extensió de Galois de K amb grup de Galois igual a $(A/(f))^*$; aquesta extensió existeix per la teoria anomenada teoria de cossos de classes (aquest cos K_f és anàleg a $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ ja que $Gal(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/(p))^*$).

Definició 5.27. Donat L una extensió finita de K, escrivim per Σ_L el conjunt de totes les valoracions discretes v no arquimedianes i no trivials del cos L normalitzades on $v(L^*) = \mathbb{Z}$. Denotem per $Div(L)$ el grup de divisors de L que, per definició, és el grup abelià lliure generat per totes les valoracions no arquimedianes de L. Donat $a \in L^*$, es defineix $(a) \in Div(L)$ via $(a) := \sum_{v \in \Sigma_L} v(a) \cdot v$ (perquè aquesta suma tingui sentit, cal demostra primer que $v(a) \neq 0$ només per un número finit de $v \in \Sigma_L$). Aquests divisors s'anomenen principals. Definim el grup de Picard de L com $Div(L)/P_L$, on P_L és el subgrup donat pels divisors principals; és a dir, $P_L := \{(\ell) \in Div(L) : \ell \in L^*\}$.

Es defineix el grau d'un divisor $D = \sum_{v \in \Sigma_L} a_v v$ com l'enter $\sum_{v \in \Sigma_L} a_v \in \mathbb{Z}$ i s'anota $deg(D)$. Es demostra que, si $(\ell) \in P_L$, llavors $deg((\ell)) = 0$. Definim $Div^0(L) := \{D \in Div(L) | deg(D) = 0\}$ i $Pic^0(L) := Div^0(L)/P_L$. Es demostra que $Pic^0(L)$ és un grup abelià finit i el seu ordre, que anomenem nombre de classes del cos L, es denota per h_L.

Exemple 5.28. Fixem-nos que $\Sigma_K = \{v_\infty\} \cup \{v_\wp : \wp \text{ ideal primer d'}A\}$. Sigui $D = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r \in Div(K)$ un divisor (pensem per simplificar que $v_i \neq v_\infty$), on $v_i = v_{(f_i)}$ amb f_i un polinomi irreductible i $a_i \in \mathbb{Z}$. Considerant

$$g = \prod_{i=1}^{r} f_r^{a_r} \in K^*$$

obtenim que $(g) = D$ i, per tant, $Pic^0(K) = \{0\}$ i $h_K = 1$.

Teorema 5.29 (Goss, 1982, (anàleg del criteri de Kummer per primers irregulars))**.** *Sigui f un polinomi irreductible de $\mathbb{F}_q[T]$ de grau d. Considerem l'extensió de Galois K_f de K amb grup de Galois $(A/(f))^*$ i sigui h_{K_f} el nombre de classes de K_f. Llavors:*

$$f | \prod_{i=1}^{q^d - 1} \beta(i) \Leftrightarrow p | h_{K_f}.$$

Més resultats Altres resultats d'aquest tipus, que tan sols mencionem per no entrar en els detalls tècnics de la seva formulació, són:

1. Hi ha un anàleg pels nombres $\beta(k)$ del resultat de Herbrand-Ribet (consulteu [5]).

2. Recordem que hi ha una mesura Γ en $\mathbb{Z}_p$ (obtinguda per Leopoldt, i estudiada amb profunditat per Coates i Wiles) tal que $\int_{\mathbb{Z}_p} x^i d\Gamma = \zeta(-i)$, on x^i és una funció contínua en $\mathbb{Z}_p$. Tenim una analogia a $\mathbb{F}_q[T]$: es demostra que hi ha una mesura μ en $A_\wp$ (on $A_\wp$ és la completació de l'anell A en el primer $\wp$) tal que per a x^k (que són funcions contínues a $A_\wp$) s'obté $\int_{A_\wp} x^k d\mu = \zeta_q(-k)$. També hi ha una mesura $\overline{\mu}$ en $A_\wp$ tal que $\int_{A_\wp} x^k d\overline{\mu} = \beta(k)$. Ambdós resultats van ser obtinguts per Thakur a [12].

Tot aquest conjunt d'analogies donen suport a la definició dels nombres $\zeta_q(-k)$ i $\beta(k)$ (i, més en general, a la teoria analítica de $\zeta_q(z)$ amb $z \in S_\infty$) mitjançant l'ordre de la sèrie divergent agrupant termes del mateix grau, enfront a altres possibles ordres que poguèssim considerar.

5.5 La hipòtesi de Riemann

En aquesta secció, descriurem un resultat sobre la distribució dels zeros de $\zeta_q(x,y)$ que es pot interpretar com una hipòtesi de Riemann per a ζ_q. Tot i això, per poder entendre-la així, hem de veure la hipòtesi clàssica des d'una nova perspectiva.

La hipòtesi de Riemann afirma que tots els zeros no trivials de $\zeta(s)$ es troben a la recta $\Re(s) = 1/2$. A partir de ζ, definim una altra funció entera ξ com $\xi(s) := s(1-s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$. Usant l'equació funcional de ζ, tenim que $\xi(s) = \xi(1-s)$ i la hipòtesi de Riemann es pot reformular com que els zeros de ξ tenen tots part real 1/2.

Després, fem el canvi $t = s - 1/2$ i definim una funció $\omega(t) := \xi(t + 1/2)$. Tenim que $\omega(t) = \xi(t + 1/2) = \xi(1 - t - 1/2) = \xi(-t + 1/2) = \omega(-t)$ i la hipòtesi de Riemann dirà en aquest cas que els zeros de ω han de ser imaginaris purs. Finalment, posem $u = it$ i $\theta(u) := \omega(u/i) = \omega(-iu)$ i, ara, la hipòtesi de Riemann afirma que els zeros de θ són a $\mathbb{R}$.

Un cop fet això, ja podem presentar el següent teorema, demostrat de forma completa per Sheats l'any 1997 a l'article [9].

Teorema 5.30 (Hipòtesi de Riemann en característica p, Sheats)**.** *Fixem $y \in \mathbb{Z}_p$. Com a funció de x, els zeros de $\zeta_q(x,y)$ són simples i estan a $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1}))$. De fet, es troben al subcós $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$.*

Aquest resultat afirma que els zeros de ζ_q estan a K_∞, l'anàleg de $\mathbb{R}$; després de reformular la hipòtesi de Riemann clàssica en termes de la funció θ, podem dir que aquest resultat és l'equivalent a la hipòtesi de Riemann en característica p.

La demostració depén d'una condició necessària i suficient que Carlitz va enunciar però que no s'havia demostrat rigorosament fins que ho va fer Sheats.

Teorema 5.31 (Sheats)**.** *Siguin d i k dos enters positius. Aleshores, $S_d(k)$ és no nul si i només si hi ha una expressió del tipus $k = k_0 + k_1 + \cdots + k_d$, on k_i són enters no negatius tals que:*

(1) No hi ha "carry over" dels dígits p-àdics a la suma dels k_i.

(Diem que en la suma de dos enters p-àdics $\sum x_i p^i$, $\sum y_i p^i$ no hi ha "carry over" si $x_i + y_i < p$ per a tot i).

(2) Per $0 \leq i < d$, tenim que k_i és positiu i divisible per $q - 1$.

Anomenem a aquesta expressió una representació admissible de k respecte de d.

6 Relacionant els valors enters de la funció zeta de Carlitz-Goss

Fem un resum del capítol anterior. L'estudi dels valors $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de la funció zeta de Riemann és important perquè tenen interpretacions aritmètiques. Els positius parells i els negatius senars estan relacionats amb els números de Bernoulli; aquests nombres compleixen diverses propietats, algunes de les quals són: les congruències de Kummer, el criteri de Kummer, el criteri de Herbrand-Ribet, el teorema de von-Staudt... Els negatius parells són tots zeros i aquestes arrels s'anomenen trivials. A més, els valors enters positius i negatius estan relacionats mitjançant una equació funcional.

En el cas de ζ_q, tenim dos tipus de valors especials independents. D'una banda, tenim valors especials positius $\zeta_q(k)/\xi^k \in K$ amb k "parell", que estan relacionats amb els nombres de Bernoulli-Carlitz. A la secció 5.3, hem vist que tenim anàlegs dels teoremes de von-Staudt i de Sylvester-Lipschitz per aquests nombres, però es desconeix si satisfan algun tipus de congruència o de criteri a la Kummer.

Per un altre costat, tenim valors especials negatius $\zeta_q(-k)$. No tenen denominador perquè són elements d'A i presenten un zero simple quan k és "parell", en analogia amb el cas clàssic de la funció zeta de Riemann. Aquests valors sí que compleixen anàlegs de les congruències i del criteri de Kummer, del teorema de Herbrand-Ribet...

En part, el fet que aquests valors especials siguin independents és que no hi ha cap relació semblant a l'equació funcional de ζ. En aquest capítol, començarem estudiant un candidat a ser un resultat d'aquest tipus. Acabarem presentant uns càlculs concrets que podrien indicar algun tipus de congruència entre números de Bernoulli-Carlitz; és a dir, algun tipus de relació entre valors enters positius de ζ_q.

6.1 El grup de permutacions $S_{(q)}$

Buscant un resultat tipus equació funcional per a ζ_q, Goss presenta a l'article [4] un grup de permutacions de $\mathbb{Z}_p$ que, en exemples i càlculs concrets, sembla que podria ser una acció sobre els valors enters de ζ_q. A partir d'ara, analitzarem aquest grup i discutirem si realment pot representar una simetria dels valors de ζ_q.

Les aplicacions que estudiarem són permutacions de les xifres en base q d'un nombre p-àdic; és a dir, per a cada permutació ρ del conjunt $\{0, 1, 2\dots\}$, definirem una aplicació $\rho_* : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ com

$$\rho_*(y) := \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^{\rho(i)},$$

per cada $y \in \mathbb{Z}_p$ amb expressió en base q igual a $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i$, $0 \leq y_i < q$. Observeu que aquesta aplicació intercanvia la posició de les xifres, és bijectiva i podem parlar de permutacions de xifres. Denotem per $S_{(q)}$ el conjunt d'aplicacions ρ_* que s'obté variant ρ sobre totes les permutacions de $\{0, 1, 2 \ldots\}$. $S_{(q)}$ és un grup amb la composició $\rho_* \circ \sigma_* := (\rho \circ \sigma)_*$. Notem també que $S_{(q^k)}$ es pot pensar contingut com un subgrup de $S_{(q)}$ de manera clara. A la següent proposició demostrem les propietats bàsiques de ρ_*.

Proposició 6.1. *1. Siguin x, y, z tres enters p-àdics amb $z = x + y$ tals que no hi ha "carry over" (veieu el teorema 5.31) sobre els dígits en base q. Aleshores, $\rho_*(z) = \rho_*(x) + \rho_*(y)$.*

2. L'aplicació $x \to \rho_*(x)$ porta enters negatius a enters negatius.

3. L'aplicació $x \to \rho_*(x)$ porta enters no negatius a enters no negatius.

4. Sigui m un enter no negatiu. Aleshores, $l_q(m) = l_q(\rho_*(m))$.

5. Sigui m un enter. Aleshores, $m \equiv \rho_*(m) \pmod{q-1}$.

Demostració. Els apartats 1 i 2 són obvis. L'apartat 3 també és facil si veiem que els enters negatius són aquells que tenen totes les xifres q-àdiques excepte un número finit iguals a $q - 1$ i això es fa de la mateixa manera que trobar l'expansió p-àdica dels enters negatius (secció 2.3).

La quarta part és clara i implica l'apartat 5 per als enters no negatius perquè tenim $m \equiv l_q(m) \pmod{q-1}$. Per als enters negatius, escribim $-m = (q^j - m) - q^j$ de manera que $q^j - m$ és positiu. Per la part 1, tenim $\rho_*(m) = \rho_*(q^j - m) + \rho_*(-q^j)$. A més, $\rho_*(-q^j)$ té gairebé totes les xifres iguals a $q - 1$ i la resta igual a 0. Per tant, tenim $\rho_*(-q^j) = k - q^t$ per un cert t i k és positiu i divisible per $q - 1$. Així, tenim que $\rho_*(-m) \equiv \rho_*(q^j - m) + k - q^t \equiv (q^j - m) - q^t \equiv 1 - m - 1 \equiv -m \pmod{q-1}$. □

L'acció de $S_{(q)}$ sobre els valors enters de ζ_q és diferent depenent de si és sobre $\zeta_q(x, -k)$ (valors negatius) o sobre BC_k (valors positius). Estudiem-les per separat en les següents dues seccions.

6.1.1 Estudi de l'acció de $S_{(q)}$ en $\zeta_q(x,-k)$

A l'article [4], es comença demostrant alguns resultats per veure que $S_{(q)}$ preserva propietats bàsiques de $\zeta_q(x,-k)$. Per exemple, usant les propietats 1 i 5 de la proposició 6.1, podem demostrar el següent resultat.

Proposició 6.2. *Sigui k un enter no negatiu amb $k = k_0 + k_1 + \cdots + k_d$ una representació admissible de k respecte de d (veieu el teorema 5.31). Sigui $\rho_* \in S_{(q)}$. Aleshores, $\rho_*(k) = \rho_*(k_0) + \cdots + \rho_*(k_d)$ és una representació admissible de $\rho_*(k)$ respecte de d.*

Recordem que, al teorema 5.31 de la secció sobre la hipòtesi de Riemann, havíem dit que aquestes representacions admissibles donaven una condició necessària i suficient perquè $S_d(k)$ fós no nul. Com que, segons la secció 5.4, $T^{-dk}S_d(k)$ és el coeficient de x^{-d} de $\zeta_q(x,-k)$, tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 6.3. *Siguin k un enter no negatiu i $\rho_* \in S_{(q)}$. Aleshores, $S_d(k) = 0$ si i només si $S_d(\rho_*(k)) = 0$. En particular, $\zeta_q(x,-k)$ i $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$ tenen el mateix grau en x^{-1}.*

El corol·lari ens diu que $S_{(q)}$ preserva el grau en x^{-1} i, en particular, $\zeta_q(x,-k)$ i $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$ tenen el mateix nombre d'arrels en x. Goss afirma que hi ha indicis que fan sospitar que $S_{(q)}$ actua sobre aquestes arrels. El primer indici el troba als zeros trivials.

Proposició 6.4. *L'ordre d'anul·lació de ζ_q a $-k$, on k és un enter positiu, és un invariant de l'acció de $S_{(q)}$ als enters positius.*

Demostració. L'ordre d'anul·lació és 1 o 0 (s'anul·la i és una arrel simple o no s'anul·la) depenent de si k és o no divible per $q-1$. Per la propietat 5, l'acció de $S_{(q)}$ preserva ser divisible o no per $q-1$ i, per tant, manté invariant l'ordre d'anul·lació. $\square$

Aquesta proposició per si mateixa no és un argument gaire sòlid per afirmar que l'acció sobre els zeros sigui precisament $S_{(q)}$, qualsevol acció que preservés la divisibilitat per $q-1$ ho compliria. Però, al seu article, Goss aporta exemples que mostrarien una relació més forta entre $S_{(q)}$ i els zeros, trivials o no, de $\zeta_q(x,-k)$.

Com que, pel teorema de Sheats 5.30, tots els zeros de $\zeta_q(x,-k)$ estan a K_∞, s'ha de definir una acció de $S_{(q)}$ sobre les sèries de Laurent de $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1}))$. Donada una permutació ρ de $\{0,1,2,\cdots\}$, es defineix una aplicació $\overline{\rho} : \mathbb{F}_q((T^{-1})) \to \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ com

$$\overline{\rho}\left(\sum_{i\geq k} c_i T^{-i}\right) = \sum_{i\geq k} c_i T^{-\rho_*(i)};$$

és a dir, aplicant la permutació ρ_* de xifres en base q als exponents de T^{-1}. Aquesta definició és correcta perquè ρ_* als enters preserva el signe.

Al seu article, Goss aporta dos exemples que compleixen que, si α és arrel de $\zeta_q(x,-k)$, aleshores $\overline{\rho}(\alpha)$ és arrel de $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$ per a qualsevol permutació ρ de $\{0,1,2\dots\}$, i afirma que aquesta propietat s'ha comprovat en altres exemples. Per això, planteja la següent qüestió a resoldre.

Pregunta 6.5 (Goss, Secció 6.2.1 de [4])**.** ¿És cert que, per a tot $k\geq 0$ enter i tota permutació ρ de $\{0,1,\dots\}$, si α és arrel en x de $\zeta_q(x,-k)$, aleshores $\overline{\rho}(\alpha)$ és arrel de $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$?

En particular, si aquesta pregunta tingués resposta afirmativa, els zeros de $\zeta_q(x,-k)$ ens permetrien conèixer els zeros de qualsevol $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$. Com que aquest últim és un polinomi en x^{-1}, $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$ quedaria totalment determinat a partir de les seves arrels. És a dir, a partir de $\zeta_q(x,-k)$, determinaríem qualsevol $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$.

El primer exemple de Goss és $\zeta_3(x,-13)$, que té grau 1 (és a dir, una arrel) en x^{-1}, i el segon, $\zeta_2(x,-3)$, que té grau 2 (és a dir, dues arrels i una d'elles és l'arrel trivial $x=T^{-3}$). Aportem dos exemples en la mateixa línia. Els càlculs s'han realitzat amb els programes que es poden trobar als annexos del treball.

Exemple 6.6. Sigui $A=\mathbb{F}_3[T]$, $k=7=1+2\cdot 3$ i $\zeta_3(x,-7)=1-(T^{-6}-T^{-4})x^{-1}$, que té un únic zero $\alpha=T^{-6}-T^{-4}$. Com que $6=0+2\cdot 3$ i $4=1+1\cdot 3$, les permutacions que deixen fix 7 (que són aquelles que deixen fixes les dues primeres xifres) també preservaran α. Però, a més, fent càlculs concrets amb altres permutacions, el zero de $\zeta_3(x,-\rho_*(7))$ sempre coincideix amb $\overline{\rho}(\alpha)$:

a) $\rho=(0,1)$

$$\rho_*(7)=\rho_*(1+2\cdot 3)=2+1\cdot 3=5,$$

$$\zeta_3(x,-5)=1-(T^{-2}-T^{-4})x^{-1},$$

$$\overline{\rho}(T^{-6}-T^{-4})=\overline{\rho}(T^{-(0+2\cdot 3)}-T^{-(1+1\cdot 3)})=T^{-(2+0\cdot 3)}-T^{-(1+1\cdot 3)}=T^{-2}-T^{-4}$$

que és precisament el zero de $\zeta_3(x,-\rho_*(7))=\zeta_3(x,-5)$.

b) $\rho=(0,2)$

$$\rho_*(7)=15,$$

$$\zeta_3(x,-15)=1-(T^{-6}-T^{-12})x^{-1},$$

$$\rho_*(6)=6,\ \rho_*(4)=12\Longrightarrow\overline{\rho}(T^{-6}-T^{-4})=T^{-6}-T^{-12}$$

que coincideix amb el zero de $\zeta_3(x,-15)$.

Exemple 6.7. Fem ara un exemple amb dos zeros a $\mathbb{F}_5[T]$. Agafem $k = 24 = 4 + 4 \cdot 5$ perquè $\zeta_5(x, -24)$ té grau 2 en x^{-1} i, com que 24 és divisible per $5 - 1 = 4$, tindrà una arrel trivial $\alpha = T^{-24}$ que ens estalviem de trobar. Aprofitant això, la descomposició és

$$\zeta_5(x, -24) = (1 - T^{-24}x^{-1})(1 - (T^{-4} + T^{-8} + T^{-12} + T^{-16} + T^{-20})x^{-1})$$

i l'altre zero serà $\beta = T^{-4} + T^{-8} + T^{-12} + T^{-16} + T^{-20}$.

Les descomposicions 5-àdiques dels exponents que apareixen en aquestes arrels són

$$24 = 4 + 4 \cdot 5,\ 4 = 4,\ 8 = 3 + 1 \cdot 5,$$
$$12 = 2 + 2 \cdot 5,\ 16 = 1 + 3 \cdot 5 \text{ i } 20 = 4 \cdot 5.$$

Les aplicacions ρ_* que deixen fix 24 són aquelles que permuten les dues primeres xifres entre sí (perquè 24 té dues xifres 5-àdiques iguals). Es fàcil veure que aquestes permutacions també deixen fixes les dues arrels α i β.

A més, tornem a tenir el mateix comportament quan apliquem permutacions qualssevol; per exemple, per $\rho = (1, 2)$

$$\rho_*(24) = 104$$
$$\zeta_5(x, -104) = 1 - x^{-1}(T^{-4} + T^{-28} + T^{-152} + T^{-76} + T^{-100} + T^{-104}) +$$
$$+ x^{-2}(T^{-108} + T^{-132} + T^{-156} + T^{-180} + T^{-204})$$

i si ho apliquem als zeros

$$\overline{\rho}(T^{-24}) = T^{-104}$$

$$\overline{\rho}(T^{-4} + T^{-8} + T^{-12} + T^{-16} + T^{-20}) = T^{-4} + T^{-28} + T^{-52} + T^{-76} + T^{-100}.$$

És fàcil comprovar, avaluant a $\overline{\rho}(\alpha)$ i a $\overline{\rho}(\beta)$, que aquestes són les arrels de $\zeta_5(x, -\rho_*(24)) = \zeta_5(x, -104)$.

Però, a l'article de Goss, els exemples són sempre d'aquests dos tipus: de grau 1 o de grau 2 amb una arrel trivial. Així, intentem treballar un exemple que no tingui aquesta propietat.

Exemple 6.8. Ens situem a $\mathbb{F}_3[T]$ i agafem $k = 17 = 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2$, de manera que

$$\zeta_3(x, -17) = 1 + bx^{-1} + cx^{-2}, \text{ on}$$
$$b = -T^{-2} - T^{-4} - T^{-6} - T^{-8} + T^{-10} + T^{-12} + T^{-14} + T^{-16},$$
$$c = T^{-10} + T^{-12} + T^{-14} - T^{-16} + T^{-18} + T^{-20} - T^{-22} +$$
$$+ T^{-24} + T^{-26} + T^{-28} - T^{-30} + T^{-32}.$$

Què fa que $\zeta_3(x,-17)$ sigui diferent dels altres exemples? Igual que l'anterior exemple, té dues arrels, però com que 17 no és divisible per $3-1$, cap de les dues arrels serà trivial.

Trobem les arrels de $\zeta_3(x,-17)$, solucionant l'equació $x^2+bx+c=0$. Com que estem en un cos de característica diferent de 2, podem aplicar la fórmula per trobar les arrels d'un polinomi de grau 2:

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} = b-\sqrt{b^2-c},$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2} = b+\sqrt{b^2-c}.$$

Per determinar l'arrel quadrada, hem de pensar que b^2-c és un polinomi en T^{-1}. El que fem és calcular el desenvolupament de Taylor mòdul 3 de $\sqrt{b^2-c}$ respecte T^{-1}. Això ens donarà sumes parcials d'un element de $\mathbb{F}_3((T^{-1}))$ corresponent a aquesta arrel quadrada. Per tant, α i β són sèries de Laurent.

Quan calculem $\overline{\rho}(\alpha)$ i $\overline{\rho}(\beta)$ per diferents permutacions ρ, aquestes no coincideixen amb les arrels de $\zeta_3(x,-\rho_*(17))$ (consulteu els càlculs de l'apèndix B); no tenim el mateix comportament que als altres exemples.

Per què Goss obté bons resultats amb els seus exemples i l'exemple 6.8 no funciona? Anem a explicar-ho mitjançant la demostració del següent lema. Primer, recordem que el coeficient de grau 1 en x^{-1} de $\zeta_q(x,-k)$ és

$$\widetilde{S}_1(k) = \sum_{a\in A_1^+} \langle a\rangle^k = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\left(1+\frac{\lambda}{T}\right)^k.$$

Lema 6.9. *Per a tot $k\geq 0$ enter,*

$$\widetilde{S}_1(\rho_*(k)) = \overline{\rho}\left(\widetilde{S}_1(k)\right).$$

En particular, el coeficient de grau 1 de $\zeta_q(x,-\rho_*(k))$ és la imatge per $\overline{\rho}$ del coeficient de grau 1 de $\zeta_q(x,-k)$.

Demostració. Si pensem que k s'expressa en base q com $k=\sum_{i=0}^M k_iq^i$, tenim que

$$\widetilde{S}_1(k) = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\left(1+\frac{\lambda}{T}\right)^{k_0+\cdots+k_Mq^M} = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\left(1+\frac{\lambda}{T^{q^0}}\right)^{k_0}\cdots\left(1+\frac{\lambda}{T^{q^M}}\right)^{k_M}.$$

D'altra banda, $\rho_*(k) = k_0 q^{\rho(0)} + \cdots + k_M q^{\rho(M)}$ i, per tant,

$$\widetilde{S}_1(\rho_*(k)) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left(1 + \frac{\lambda}{T}\right)^{\rho_*(k)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left(1 + \frac{\lambda}{T}\right)^{k_0 q^{\rho(0)} + \cdots + k_M q^{\rho(M)}} =$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left(1 + \frac{\lambda}{T^{q^{\rho(0)}}}\right)^{k_0} \cdots \left(1 + \frac{\lambda}{T^{q^{\rho(M)}}}\right)^{k_M}.$$

Usant el teorema binomial,

$$\left(1 + \frac{\lambda}{T^{q^{\rho(j)}}}\right)^{k_j} = \sum_{i=0}^{k_j} \binom{k_j}{i} \lambda^i T^{-iq^{\rho(j)}},$$

$$\left(1 + \frac{\lambda}{T^{q^j}}\right)^{k_j} = \sum_{i=0}^{k_j} \binom{k_j}{i} \lambda^i T^{-iq^j};$$

és a dir, els termes de $\left(1 + \lambda/T^{q^{\rho(j)}}\right)^{k_j}$ tenen els mateixos coeficients que els de $\left(1 + \lambda/T^{q^j}\right)^{k_j}$, però els exponents tenen les xifres en base q permutades. Si fem el producte $\left(1 + \lambda/T^{q^{\rho(0)}}\right)^{k_0} \cdots \left(1 + \lambda/T^{q^{\rho(M)}}\right)^{k_M}$, passa el mateix: tots els termes tenen els mateixos coeficients que els del producte $\left(1 + \lambda/T^{q^0}\right)^{k_0} \cdots \left(1 + \lambda/T^{q^M}\right)^{k_M}$, però les xifres dels exponents surten permutades.

Fent la suma sobre λ, $\widetilde{S}_1(\rho_*(k))$ és igual a $\widetilde{S}_1(k)$ amb les xifres en base q dels exponents permutats per ρ; dit d'una altra manera, $\widetilde{S}_1(\rho_*(k)) = \overline{\rho}\left(\widetilde{S}_1(k)\right)$, com volíem. $\square$

Per tant, quan l'exemple era de grau 1 amb arrel α, teníem $\zeta_q(x, -k) = 1 - \alpha x^{-1}$; el que passava és que l'arrel coincideix amb el coeficient de grau 1 i ja hem vist al lema que $S_{(q)}$ actua sobre aquest coeficient. D'altra banda, quan l'exemple era de grau 2 amb una arrel trivial T^{-k} i una altra arrel β, teníem $\zeta_q(x, -k) = (1 - T^{-k}x^{-1})(1 - \beta x^{-1}) = 1 - (T^{-k} + \beta)x^{-1} + T^{-k}\beta x^{-2}$. L'acció de $S_{(q)}$ funciona per a l'arrel trivial, perquè $\overline{\rho}$ porta T^{-k} a $T^{-\rho_*(k)}$, que és l'arrel trivial de $\zeta_q(x, -\rho_*(k))$. I, com que per a una arrel funciona, per a l'altra també, perquè $\beta = \widetilde{S}_1(k) - T^{-k}$ i $S_{(q)}$ actua tant sobre $\widetilde{S}_1(k)$ com sobre T^{-k}.

En canvi, quan ho hem intentat aplicar a un exemple de grau 2 però sense arrels trivials, no obteníem els mateixos resultats perquè $\zeta_q(x, -k) =$

$(1-\alpha x^{-1})(1-\beta x^{-1}) = 1-(\alpha+\beta)x^{-1}+\alpha\beta x^{-2}$ i el grup de permutacions actua sobre la suma $\alpha+\beta$ (el coeficient de grau 1), però no sobre les arrels en sí.

En resum, el grup $S_{(q)}$ actua sobre el coeficient de grau 1 en x^{-1} de qualsevol $\zeta_q(x,-k)$, però l'acció sobre les arrels es limita a aquells $\zeta_q(x,-k)$ que tenen grau 1 en x^{-1}, o que tenen grau 2 però que $(q-1)$ divideix k.

Corol·lari 6.10. *La pregunta 6.5 té una resposta negativa.*

6.1.2 Estudi de l'acció de $S_{(q)}$ sobre BC_k

Goss també aporta indicis que $S_{(q)}$ podria ser una acció sobre els valors positius de ζ_q. Destaca que les condicions del teorema 5.20 sobre el denominador de BC_k (és a dir, que $h = l_p(k)/(p-1)n$ sigui enter i que k sigui divisible per q^h-1) es poden reformular a través de l'acció de $S_{(q^h)}$, de manera que, si i i j estan a la mateixa òrbita de $S_{(q^h)}$, BC_i i BC_j tenen el mateix denominador. A partir d'aquí, reflexiona que potser aquest comportament també es dóna pel numerador i es planteja la següent pregunta.

Pregunta 6.11 (Goss, Question 2 de [4])**.** Sigui P un polinomi irreductible d'A de grau h. Suposem que i i j són dos enters no negatius que són divisibles per $q-1$ i que pertanyen a la mateixa òrbita de $S_{(q^h)}$. ¿Apareix P el mateix nombre de vegades en la descomposició en irreductibles del numerador de BC_i i de BC_j?

Aportem el següent contraexemple: ens situem a $\mathbb{F}_3[T]$ i siguin $P=T$, $h=1$, $i=14=2+1\cdot 3+1\cdot 3^2$, $j=16=1+2\cdot 3+1\cdot 3^2$ (que estan a la matexia òrbita de $S_{(3^1)}$). Es pot calcular que

$$BC_{14} = 2,$$

$$BC_{16} = \frac{T^2(T+1)^2(T+2)^2}{T^6+T^4+T^2+1}.$$

El numerador de BC_{16} és divisible per P, però el numerador de BC_{14}, no.

Corol·lari 6.12. *La pregunta 6.11 té una resposta negativa.*

6.2 Conjectures sobre congruències de Kummer dels BC_k

Ja hem vist al final de la secció 5.4 que els valors $\beta(k)$, que es construeixen a partir dels $\zeta_q(-k)$, compleixen una propietat similar a les congruències de Kummer. També hem comentat que no s'ha pogut trobar una propietat semblant per als números de Bernoulli-Carlitz (o, equivalentment, per als valors de ζ_q als enters positius).

Una manera de treballar buscant possibles congruències de Kummer entre BC_k és fer-ne una llista, descomposar el seu numerador en producte de polinomis irreductibles i, fixant un irreductible concret, anotar i intentar trobar alguna relació entre els k pels quals BC_k és divisible per aquest irreductible.

Per exemple, les seqüència següents són el nombre de vegades que apareix el factor T a la descomposició en irreductibles del numerador dels 44 primers BC_k's no nuls, $k \geq 1$.

- $\mathbb{F}_3[T]$

  0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 2 4 7 0 0 0 2 0 0 2 4 7 8 10 13 17 0 0 2 4 7 8 10 13 17 16 19 23 27 32 0 0 0 2

- $\mathbb{F}_5[T]$

  0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 2 6 0 0 0 2 6 10 0 0 2 6 10 14 0 2 6 10 14 18 25 0 0 0 0 2 6 0 0 0 2 6 10 0

- $\mathbb{F}_7[T]$

  0 0 0 0 0 0 0 4 0 0 0 0 0 0 4 10 0 0 0 0 0 4 10 16 0 0 0 0 4 10 16 22 0 0 0 4 10 16 22 28 0 0 4 10

Com es pot observar, els valors diferents de zero sembla que apareixen sempre en un ordre concret. Això podria indicar algun tipus de congruència entre els numeradors dels BC_k. El problema és que a simple vista la manera en què apareixen els zeros intermedis no sembla seguir cap ordre concret. A més, tampoc podem explicar per què apareixen aquests valors no nuls i no uns altres.

Si intentem fer el mateix per a polinomis de grau més alt, els programes no són prou ràpids i no podem trobar prous BC_k per poder copsar un comportament semblant al cas de grau 1.

A partir d'aquí, les qüestions a plantejar-se serien:

a) Millorar els programes en quant a velocitat, obtenint així una llista més llarga de numeradors de números de Bernoulli-Carlitz. Amb aquesta llista, observar si hi ha un comportament similar al cas de grau 1 per a graus més alts.

b) Si aquest comportament es manté per a grau més alt, intentar trobar una manera de determinar l'aparició de zeros a la seqüència.

c) Intentar trobar una manera de determinar els valors no nuls de les seqüències.

A Programes

Presentem els programes informàtics que hem fet servir per fer els càlculs més feixucs del treball. Hem utilitzat el software matemàtic Sage. Podeu consultar el seu manual de referència online a `http://www.sagemath.org/doc/reference/#`

Primer programa: càlcul dels números de Bernoulli-Carlitz.

Variables globals :

```
p=#primer que sera la caracteristica del cos
n=#potencia del primer p
r=p^n

F.<a>=FiniteField(r)
P.<T>=PolynomialRing(F)
```

Rutines :

- `D(i)`: calcula el polinomi D_i a partir de la definició del capítol 4.
  - Variables d'entrada:
    `i`: variable de tipus enter que conté l'índex del D_i a calcular.
  - Valors de sortida:
    Retorna un element de `P` igual a D_i.
- `factC(i)`: calcula el factorial de Carlitz $\Pi(i)$ a partir de la definició del capítol 5.
  - Variables d'entrada:
    `i`: variable de tipus enter que conté l'índex del $\Pi(i)$ a calcular.
  - Valors de sortida:
    Retorna un element de `P` igual a $\Pi(i)$.
- `BC(i)`: calcula el número de Bernoulli-Carlitz BC_i a partir de la fórmula recursiva del capítol 5.
  - Variables d'entrada:
    `i`: variable de tipus enter que conté l'índex del BC_i que volem calcular.
  - Valors de sortida:
    Retorna un element del cos de fraccions de `P` igual a BC_i.

```
def D(i):
    if i==0:
        return 1
    else:
        return P((T^(r^i)-T)*D(i-1)^r)

def factC(i):
    mul=1
    j=0
    if i==0:
        return 1
    else:
        for k in i.digits(base=r):
            mul=mul*D(j)^k
            j=j+1
        return mul

def BC(i):
    j=1
    sum=0
    if i==0:
        return 1
    if i.mod(r-1)!=0:
        return 0
    else:
        while r^j<=i+1:
            sum=sum+BC(i+1-r^j)/(factC(i+1-r^j)*D(j))
            j=j+1
        return -factC(i)*sum
```

Segon programa: càlcul de $z_q(x,j)$ i $\zeta_q(x,j)$ amb j un enter negatiu, mitjançant la fórmula recursiva de la secció 5.4.

Variables globals :

```
p=#primer que sera la caracteristica del cos
n=#potencia de p
r=p^n

F.<a>=FiniteField(r)
P.<T,x>=F[]

n_pol=#numero de valors negatius a calcular;
        #retorna z(x,0), z(x,-1), z(x,-2),...,z(x,-n_pol)
```

Rutina :

```
z=[1]
for j in range(1,n_pol+1):
    b=0
    sum=0
    while b<j:
        if (j-b).mod(r-1)==0:
            sum=sum+binomial(j,b)*T^b*z[b]/x
        b=b+1
    z.append(1-sum)

for j in range(0,n_pol+1):
    print "z(x,",-j,")= ",z[j]

for j in range(0,n_pol+1):
    print "\zeta(x,",-j,")= ",z[j].subs(x=x*T^j)
```

Tercer programa: càlculs del grup de permutacions $S_{(q)}$.

Variables globals :

```
p=#primer que sera la caracteristica del cos
n=#potencia de p
r=p^n

F.<a>=FiniteField(r)
P.<T>=F[]
```

Rutines :

- `rho(i, q, per)`: rutina per poder calcular $\rho_*(i)$, tal i com està definit al capítol 6, on i és un enter positiu, ρ una permutació de $\{0, 1, 2\dots\}$ i $\rho_* \in S_{(q)}$.
  - Variables d'entrada:

    `i`: variable de tipus enter que conté el nombre al qual li apliquem la permutació.

    `q`: variable de tipus enter que conté una potència d'un nombre primer que serà la base dels dígits de i.

    `per`: variable de tipus Permutation que conté la permutació ρ. Per la manera de treballar de Sage, cal treballar amb permutacions de $\{1, 2, 3\dots\}$ en comptes de permutacions de $\{0, 1, 2\dots\}$.
  - Valors de sortida:

    Retorna un enter igual a $\rho_*(i)$.

- `rhoPolinomial(arrel, q, per)`: rutina per a calcular $\overline{\rho}(h)$, tal i com està definit al capítol 6, on $h \in \mathbb{F}_q[T^{-1}]$ i ρ és una permutació de $\{0, 1, 2\dots\}$.
  - Variables d'entrada:

    `arrel`: element de `P` que conté el valor de h.

    `q`: variable de tipus enter que conté una potència d'un nombre primer que serà la base dels dígits a permutar.

    `per`: variable de tipus Permutation que conté la permutació ρ. Per la manera de treballar de Sage, cal treballar amb permutacions de $\{1, 2, 3\dots\}$ en comptes de permutacions de $\{0, 1, 2\dots\}$.
  - Valors de sortida:

    Retorna un element del cos de fraccions de `P` igual a $\overline{\rho}(h)$.

```
def rho(i,q,per):
    l=i.digits(base=q)
    while len(l)<len(per):
        l.append(0)
    if len(l)>len(per):
        llista=[]
        for i in range(len(per)):
            llista.append(l[i])
        llista=per.action(llista)
        for i in range(len(per)):
            l[i]=llista[i]
        return ZZ(l,q)
    return ZZ(p.action(l),q)


def rhoPolinomial(arrel,q,per):
    N=arrel.numerator()
    D=arrel.denominator()
    dN=N.degree(T)
    dD=D.degree(T)
    mm=0
    for i in range(dN,-1,-1):
        coeficient=N.coefficient(T^i)
        N=N-coeficient*T^i
        mm=mm+coeficient*T^(-rho(ZZ(dD-i),q,per))
    return mm
```

B Càlculs del capítol 6

Recordem que $\zeta_3(x,-17) = 1 + bx^{-1} + cx^{-2}$, on

$$b = -T^{-2} - T^{-4} - T^{-6} - T^{-8} + T^{-10} + T^{-12} + T^{-14} + T^{-16},$$

$$c = T^{-10} + T^{-12} + T^{-14} - T^{-16} + T^{-18} + T^{-20} - T^{-22} + \\ + T^{-24} + T^{-26} + T^{-28} - T^{-30} + T^{-32}.$$

Resolent l'equació $x^2 + bx + c = 0$ i desenvolupant l'arrel quadrada mitjançant Taylor mòdul 3 respecte T^{-1}, les arrels α i β de $\zeta_3(x,-17)$ són

$$\alpha = b - \sqrt{b^2 - c} = T^{-2} + T^{-4} + T^{-6} - T^{-10} - T^{-12} - T^{-16} + T^{-20} + R,$$

$$\beta = -b + \sqrt{b^2 - c} = T^{-8} - T^{-14} - T^{-20} - R,$$

on $R = T^{-22} + T^{-24} + T^{-26} + T^{-28} + T^{-30} - T^{-34} + T^{-36} + T^{-38} - T^{-40} - T^{-44} + T^{-46} + T^{-48} - T^{-52} + o(T^{-54})$.

- Si utilitzem la permutació $\rho = (0,1)$, tenim que

  $$\overline{\rho}(\alpha) = T^{-2} + T^{-4} + T^{-6} - T^{-10} - T^{-12} - T^{-14} + T^{-20} + R',$$

  $$\overline{\rho}(\beta) = T^{-8} - T^{-16} - T^{-20} - R',$$

  on $R' = T^{-22} + T^{-24} + T^{-26} + T^{-28} + T^{-30} - T^{-32} + T^{-36} - T^{-40} + T^{-42} - T^{-44} + T^{-46} + T^{-48} - T^{-50} + o(T^{-54})$.

  Els termes en vermell són els que no coincideixen amb les arrels de $\zeta_3(x, -\rho_*(17)) = \zeta_3(x,-17)$; és a dir, amb α i β.

- Si utilitzem la permutació $\sigma = (1,2)$, tenim que

  $$\overline{\sigma}(\alpha) = T^{-2} - T^{-4} + T^{-8} + T^{-10} - T^{-12} + T^{-16} + T^{-18} - T^{-22} + R'',$$

  $$\overline{\sigma}(\beta) = -T^{-8} - T^{-14} - T^{-16} + T^{-20} - R'',$$

  on $R'' = T^{-24} + T^{-26} + T^{-28} + T^{-30} + T^{-32} - T^{-34} + T^{-36} - T^{-40} + T^{-42} - T^{-46} - T^{-50} - T^{-52} + o(T^{-54})$.

  Els termes en vermell són els que no coincideixen amb les arrels α' i β' de $\zeta_3(x, -\sigma_*(17)) = \zeta_3(x,-23)$, que es calculen igual que ho hem fet abans:

  $$\alpha' = T^{-2} - T^{-4} + T^{-10} - T^{-12} + T^{-18} - T^{-22} + S,$$

  $$\beta' = -T^{-14} + T^{-20} - S,$$

  on $S = -T^{-32} + T^{-38} + T^{-40} + T^{-44} + T^{-48} + o(T^{-56})$.

Referències

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald: *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté (1978).

[2] Antonio J. Engler: *Valued fields*, Springer (2005).

[3] D. Goss: *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Springer (1996).

[4] D. Goss: ζ-phenomenology, *Noncommutative Geometry, Arithmetic, and Related Topics*,(2011), 159-182.

[5] D. Goss: Kummer and Herbrand criterion in the theory of function fields, *Duke Math. J.* **49** (1982) 377-384.

[6] S. Jeong: On a question of Goss, *Journal of Number Theory* **129** (2009) 1912-1918.

[7] Jürgen Neukirch: *Algebraic number theory*, Springer (1999).

[8] Alain M. Robert: *A course in p-adic analysis*, Springer (2000).

[9] Jeffrey T. Sheats: The Riemann Hypothesis for the Goss Zeta Function for $\mathbb{F}_q[T]$, *Journal of Number Theory* **71** (1998) 121-157.

[10] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 5.0.1)*, The Sage Development Team, 2012, `http://www.sagemath.org`.

[11] Dinesh S. Thakur: *Function field arithmetic*, World Scientific (2004).

[12] D. S. Thakur: Zeta measure associated to $\mathbb{F}_q[T]$, *Journal of Number Theory* **35** (1990) 1-17.

[13] L. Wade: Certain quantities transcendental over GF(p^n,x), *Duke Math. J.* **8** (1941) 707-729.

[14] Jing Yu: Transcendence and special zeta-values in characteristic p, *Annals of Mathematics* **134** (1991), 1-23.