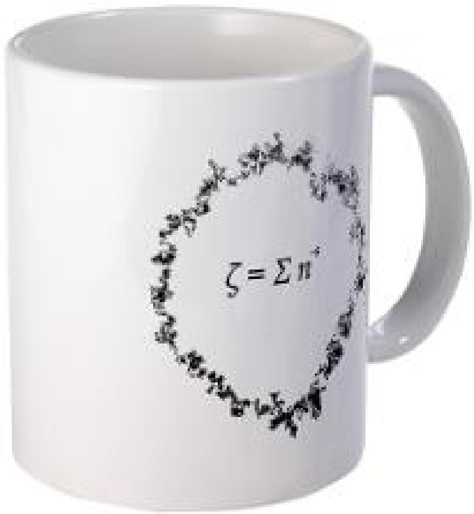
Universitat Autònoma de Barcelona

Treball de Fi de Grau

La funció ζ de Riemann, diverses meravelles de la funció

Autor: Miquel Raïch Regué

Tutor: Dr. Francesc Bars Cortina



9 de setembre 2011

"MATHEMATICS, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty —a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry."

BERTRAND RUSSELL, in a *Study of Mathematics.*

Índex

1 Introducció

Una de les noves inquietuds dels matemàtics de la segona meitat del segle XVII va ser sumar infinits termes. En aquell moment, les sèries infinites despertaven curiosat, el com saber quan una sèrie convergia i quan no i també cap a quin nombre convergia donat el cas. En aquella època hi havia poques successions de les quals se'n sabia la convergència i menys el seu límit. Entre les sèries divergents més curioses de l'època, es trobava la sèrie harmònica, perquè el seu terme general tendia a zero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ però } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

La gran motivació i interés pel tema sembla que va ser per necessitat. Les sèries harmòniques s'havien fet bastant populars entre els arquitectes contemporanis, que necessitaven erigir un nou sistema que mantingués proporcions harmòniques entre plans, elevacions, columnates i altres detalls arquitectònics. També alguns compositors com Johann Sebastian Bach introduïren algunes pautes i progressions harmòniques en les seves obres musicals. De fet, va ser tot un moviment artístic conegut com el Barroc, promogut i encoratjat per l'Església Catòlica, que en contraposició de la Reforma Protestant, aquest nou art havia de comunicar religiositat de manera dramàtica, magnificient i ornamental.

Calien noves eines que permetessin fer aquests canvis artístics i, per tant, la recerca matemàtica va fer un especial ènfasi en les coses petites. No és d'estranyar doncs, que en el mateix moment que Isaac Newton i Gottfried Leibniz iniciaven el càlcul infinitesimal (1660), altres matemàtics com James Bernouilli s'interessessin per les sumes convergents de fraccions petites. Al final, de tot aquest cultiu matemàtic que es gestava, en resultà satisfactoriament les sèries de Taylor, formalment introduïdes per Brook Taylor en 1715.

L'embranzida de les sèries convergents que ens preocupa comença l'any 1644, quan Pietro Mengoli proposa el problema de trobar la suma infinita dels inversos dels quadrats dels nombres naturals, conegut com el problema de Basilea. La solució no arriba fins el 1735, quan finalment Leonhard Euler resol el misteri i demostra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler aconsegueix també resoldre sèries del mateix tipus com per exemple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

També aporta a les seves publicacions altres sèries que sorgeixen dels seus càlculs, com per exemple:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} + \frac{(-1)^n}{4n+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Aleshores Euler, després d'aconseguir el seu objectiu, se'n planteja un de nou: desvelar les propietats aritmètiques de la misteriosa funció zeta, definida com

$$\zeta(d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}, \text{ per } d \in \mathbb{Z}.$$

En 1737, Euler va demostrar que la funció ζ es podia expressar com un producte infinit. En 1740, Euler també va trobar una equació funcional per als enters, però que no va demostrar ([AYO, §7]). I així es va quedar tot un segle fins que, en 1859, Bernhard Riemann publica un article sobre la funció ζ, analíticament estesa al pla complex, on hi demostra l'equació funcional i altres propietats, entre les quals també hi conjectura la seva coneguda Hipòtesi de Riemann. Fins i tot la notació actual (usar la lletra zeta grega en el nom) és obra de Riemann. Per tant, en honor a la gran aportació que va fer Riemann, actualment la funció rep el nom de funció ζ de Riemann.

La funció ζ, com moltes de les seves generalitzacions, han sigut sent estudiades fins a l'actualitat amb certa rellevància. Té un rol central en la Teoria analítica de nombres, com també gaudeix de variades aplicacions en la física, la teoria de la probabilitat i l'estadística aplicada.

1.1 Motivació

En aquest treball s'intenta fer una modesta recopilació del que es coneix actualment sobre els valors $\zeta(n)$, per $n \in \mathbb{N}$. En el primer capítol veiem els resultats més coneguts, i també de caire més analític. En el segon fem un tast en les relacions aritmètiques de $\zeta(n)$. I en el tercer capítol, fem una ullada als valors multizeta, molt íntimament lligats a $\zeta(n)$.

2 Propietats bàsiques de la funció ζ

Definició 2.1. Definim la funció $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, on convergeixi per a $s \in \mathbb{C}$.

Lema 2.2. La sèrie que defineix $\zeta(s)$ convergeix absolutament per s satisfent $\Re(s) > 1$, i és holomorfa en aquest domini.

Demostració ([KKS, §3.3.(c) - pàg. 95]).
Si prenem $\Re(s) = \sigma > 1$, tenim que

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^\sigma}$$

Si $n > 1$, tenim que

$$\frac{1}{n^\sigma} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\sigma}\, dx,$$

i fem la suma infinita obtenint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\sigma}\, dx = 1 + \frac{1}{\sigma - 1}. \tag{1}$$

Amb això tenim la convergència absoluta de la sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, i que, per qualsevol $c > 1$, convergeix uniformement en el domini $\Re(s) \geq c$. Per un teorema de Weierstrass ([AHL, §5.1.1. - pàg. 175]), que ens diu que el límit d'una seqüència uniformement convergent de funcions holomorfes és holomorfa, ja hem demostrat el primer punt.

2.1 Producte d'Euler

Teorema 2.3. Per tot $s \in \mathbb{C}$ amb $\Re(s) > 1$, tenim que:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primer}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Demostració ([NEU, §VII.1.1. - pàg. 419]). El mètode és semblant a la criba d'Eratòstenes.

Partim de la pròpia definició de ζ:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$
$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \dots$$

I efectuem la resta de les dues anteriors. Això elimina els elements que tenen un factor de 2:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\dots$$

I repetim pel següent terme de factor 3:

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{33^s}+\dots$$

I tornant a restar, tenim:

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\dots$$

Ara, repetint el mateix procés indefinidament pels demés primers, tenim:

$$\dots\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1$$

I si passem tots els factors, excepte $\zeta(s)$, a l'altra banda obtenim:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\dots}=\prod_{p\text{ primer}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

Però per afirmar això últim, hem de veure que aquest producte convergeix. I per veure que un producte convergeix, només hem de veure que el seu logaritme convergeix. Vegem la convergència absoluta (usem $\Re(s)=\sigma>1$):

$$\left|\log\left(\prod_{p\text{ primer}}\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right|=\left|\sum_{p\text{ primer}}\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right|\leq\sum_{p\text{ primer}}\left|\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right|=$$

$$=\sum_{p\text{ primer}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{np^{ns}}\right|\leq\sum_{p\text{ primer}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|np^{ns}|}\leq\sum_{p\text{ primer}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{n\sigma}}\leq\sum_{p\text{ primer}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^{n\sigma}}=$$

$$=\sum_{p\text{ primer}}\left(\frac{1}{p^{\sigma}}+\frac{1}{p^{2\sigma}}+\frac{1}{p^{3\sigma}}+\cdots\right)\leq\sum_{p\text{ primer}}\frac{2}{p^{\sigma}}\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Per (1) sabem que convergeix.

2.2 Extensió analítica

Pseudoteorema 2.4 (Euler, 1740)**.** $2^d(2^d-1)\zeta(1-d) \in \mathbb{Z}$ per $d \geq 1$.

Pseudodemostració ([AYO, §7 - pàg. 1080]). Definim

$$\zeta^*(s) := (1-2^{1-s})\zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

amb $\zeta^*(1) = \ln(2)$.

Sabem que la sèrie $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ convergeix a la funció $\frac{x}{1-x} = f_0(x)$ quan $|x| < 1$.

Euler no va tenir cap recança en posar $x = -1$, per tant afirmava que

$$\zeta^*(0) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{f_0(-1)}{(-1)} = \frac{1}{2},$$

obtenint així que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Aleshores, apliquem l'operador $x\frac{d}{dx}$ a $f_0(x)$ i obtenim

$$x\frac{d}{dx}f_0(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} = f_1(x)$$

$$\zeta^*(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{f_1(-1)}{(-1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Ara apliquem l'operador $x\frac{d}{dx}$ a $f_1(x)$ i obtenim

$$x\frac{d}{dx}f_1(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = f_2(x)$$

$$\zeta^*(-2) = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots = \frac{f_2(-1)}{(-1)} = 0 \Rightarrow \zeta(-2) = 0$$

Aplicant inducció per $n > 0$, trobem que

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f_0(x) = x + 2^nx^2 + 3^nx^3 + \cdots = \frac{xp_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = f_n(x)$$

$$\zeta^*(-n) = 1-2^n+3^n-4^n+5^n-6^n+\cdots = \frac{f_n(-1)}{(-1)} = \frac{p_n(-1)}{2^{n+1}} \Rightarrow \zeta(-n) = \frac{p_n(-1)}{2^{n+1}(1-2^{n+1})}$$

on $p_i(x)$ és un polinomi de grau $i-1$ i de coeficients enters.

Per tant, $2^d(1-2^d)\zeta(1-d) = p_{d-1}(-1) \in \mathbb{Z}$, per tot $d \geq 1$.

Teorema 2.5. La funció $\zeta(s)$ té una continuació analítica a tot el pla complex, i és una funció meromorfa en tot el pla. Té un únic pol i simple en $s = 1$.

Demostració ([KKS, §3.3.(c) - pàg. 96]). Partim de la funció Γ (veure apèndix §A).

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \text{ és funció Gamma en } s.$$

Ara, si $\Re(s) > 1$, canviem x per nx a la integral, i obtenim

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx}\, dx,$$

i fem la suma infinita respecte n, usant la sèrie geomètrica, i ens dóna

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx, \text{ per } \Re(s) > 1.$$

Recordem que x^{s-1} és definida al pla complex com $e^{(s-1)\log(x)}$. Ara dividim la integral en dos parts:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \int_0^{1} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

Com que e^{-x} s'apropa a 0 rapidament quan x tendeix a l'infinit, $\mathcal{L}_2$ convergeix per quasevol nombre complex s, i és holomorfa en s. Doncs considerem $\mathcal{L}_1$.

Recordem que els nombres de Bernouilli B_n es defineixen com

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \text{ amb } B_n \in \mathbb{Q}.$$

Per exemple $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, etc. I sempre es compleix $B_{2n+1} = 0$ per $n \in \mathbb{N}$ perquè $\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}$ és una funció parell.

Aplicant la definició dels nombres de Bernouilli s'obté

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^{n+s-2}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!(s+n-1)}. \tag{2}$$

Això té una continuació analítica cap a una funció meromorfa en el pla complex perquè és holomorfa excepte en $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$, on hi ha pols d'ordre 1.

Per tant, $\Gamma(s)\zeta(s)$ és estesa a una funció meromorfa a tot el pla complex per ser suma d'una funció holomorfa ($\mathcal{L}_2$) i d'una meromorfa ($\mathcal{L}_1$), i per tant té els mateixos pols que $\mathcal{L}_1$ i del mateix ordre. Així doncs, $\zeta(s)$ té una continuació analítica al pla complex, i és holomorfa excepte en $s = 1$, on té un pol d'ordre 1.

Teorema 2.6. Tenim que $\zeta(1-n) = (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{n}$ per $n \geq 1$ i $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$.

Demostració. Per un enter $n \geq 0$, de (2) obtenim que

$$\lim_{s\to 1-n}(s+n-1)\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{B_n}{n!} \tag{3}$$

Si prenem $n = 0$, aleshores obtenim

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = B_0 = 1$$

Si $n \geq 1$, de §A.1 tenim que $\lim_{s\to 1-n}(s+n-1)\Gamma(s) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$, i juntament amb (3) obtenim que

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Corol·lari 2.7. Sempre $\zeta(-2n) = 0$, per tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Sabem que $B_{2k+1} = 0$ per tot $k \in \mathbb{N}$.

$$\zeta(-2k) = \zeta(1-(2k+1)) = -\frac{B_{2k+1}}{2k+1} = 0.$$

Els nombres parells negatius s'anomenen els **zeros trivials** de la funció zeta.

Conjectura 2.8 (Hipòtesi de Riemann)**.** Tots els zeros no trivials de la funció zeta es troben a la recta $\Re(s) = 1/2$.

2.3 Equació funcional

Teorema 2.9 (Riemann)**.** Per tot s$\in \mathbb{C}$ excepte en el pol $s = 1$, es satisfà:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{4}$$

Demostració ([EDW, §1.6. - pàg. 16]). La demostració consta de dos resultats previs:

- *Resultat* 1. Considerem la següent integral

$$\mathcal{H}_1(s) = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz,$$

i la evaluem utilitzant una corba que envolcalla només l'eix real positiu i l'orígen:

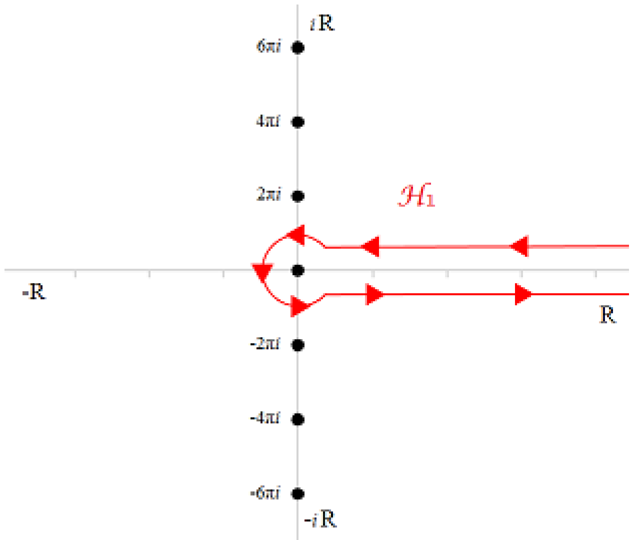


Figura 1: $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{H}_1(s) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\, dz + \int_{|z|=\delta} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\, dz + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\, dz\right)$$

La integral del mig, vora l'orígen, s'anul·la al límit quan $\delta \to 0$, per tant, obtenim:

$$\mathcal{H}_1(s) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx =$$

$$= \left(e^{(s-1)\pi i} - e^{-(s-1)\pi i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx = 2i\sin(s\pi - i\pi)\zeta(s)\Gamma(s) =$$

$$= -2i\sin(s\pi)\zeta(s)\Gamma(s) = -\frac{2\pi i\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}$$

En l'última igualtat hem usat la fórmula $\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(s\pi) = \pi$ (veure apèndix §A.2).

- *Resultat* 2. Considerem $\mathcal{H}_1(s)$, però ara triem el camí que inclou tot l'eix real positiu, l'orígen i tots els pols (que estan situats a $\pm 2n\pi i$, $\forall n \in \mathbb{Z}$). La integral sobre aquest nou domini anomenem-ho $\mathcal{H}(s)$. Pel teorema de Cauchy, tenim que $\mathcal{H}(s) = 0$. Per tant, la integral que

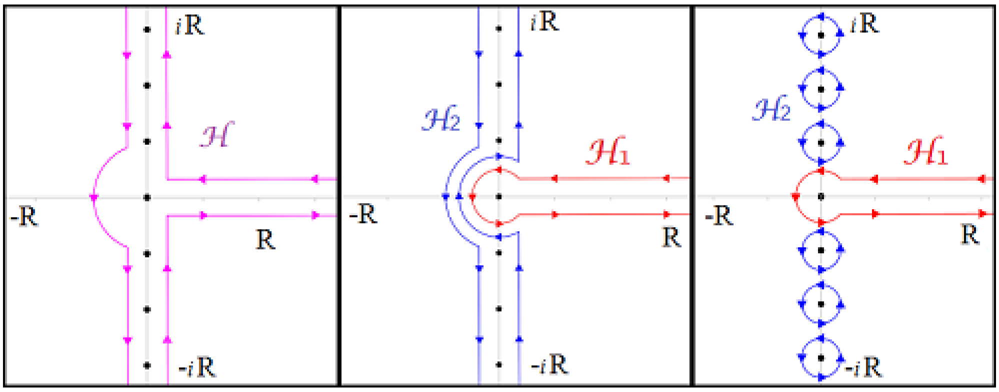


Figura 2: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$

s'evalua sobre tots els pols excepte l'orígen, en sentit antihorari, que anomenem $\mathcal{H}_2(s) = (\mathcal{H} - \mathcal{H}_1)(s) = -\mathcal{H}_1(s)$, i que, pel teorema dels residus, només hem de calcular els residus en aquests pols:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2(s) &= 2\pi i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \operatorname*{Res}_{z=2n\pi i} \left(\frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right) = \\
&= 2\pi i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\lim_{z\to 2n\pi i} \frac{(z-2n\pi i)(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right) = \\
&= 2\pi i \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(2\pi n i)^{s-1} + (-2\pi n i)^{s-1} \right] = \\
&= 2\pi i \; (2\pi)^{s-1} \left(i^{s-1} + (-i)^{s-1} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{s-1} = \\
&= 2\pi i \; 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{s\pi}{2} \right) \zeta(1-s)
\end{aligned}$$

Finalment, obtenim l'equació funcional (4) de la igualtat $\mathcal{H}_1(s) = -\mathcal{H}_2(s)$.

Observació 2.10. Hi ha una forma alternativa, que podem obtenir fàcilment de (4), usant les fórmules $\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(s\pi) = \pi$ i $\sin(2s) = 2\sin(s)\cos(s)$:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(s)\zeta(s) \tag{5}$$

De fet, aquesta forma alternativa es pot obtenir directament si en tota la demostració enlloc de considerar $\mathcal{H}_1(s)$, haguéssim considerat

$$\widetilde{\mathcal{H}_1}(s) = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{-s}}{e^z - 1}\, dz, \text{ amb les corresponents adaptacions.}$$

Corol·lari 2.11 (Riemann)**.** La funció

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\pi^{-s/2} s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{6}$$

és entera i satisfà $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Demostració ([AHL, §4.3. - pàg. 217]). És evident que $\xi(s)$ és entera perquè el zero del factor $1-s$ contrarresta el pol de $\zeta(s)$, i els pols de $\Gamma(s/2)$ es cancel·len amb els zeros trivials de $\zeta(s)$. Ara explicitem la igualtat $\xi(s) = \xi(1-s)$:

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \\ &= 2^{1-s}\pi^{-(s+1)/2}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right),\end{aligned}$$

on hem aplicat (5). Si ho arreglem una mica, tenim

$$\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = 2^{s-1}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \tag{7}$$

Aplicant la relació (veieu§A.2)

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \pi,$$

l'última equació és equivalent a

$$\pi^{1/2}\Gamma(s) = 2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right),$$

que no és altra cosa que la coneguda fórmula de duplicació de Legendre (evaluada en 2s).

Observació 2.12. Riemann, a part de trobar l'equació funcional (6) usant el teorema 2.9, també va trobar una altra demostració usant una equació funcional de les sèries theta de Jacobi, definides via

$$\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\pi i n^2 z}.$$

Veieu [NEU, §VII.1.6 - pàg. 425] i [EDW, §1.7 - pàg. 15] per una prova.

Corol·lari 2.13. Tenim $\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$, amb $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostració. Sabem que $\xi(2k) = \xi(1-2k)$ i, per tant,

$$\frac{\pi^{-2k/2}}{2}(2k)(1-2k)\Gamma\left(\frac{2k}{2}\right)\zeta(2k) = \frac{\pi^{(-1+2k)/2}}{2}(1-2k)(2k)\Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)\zeta(1-2k)$$

$$\Gamma(k)\zeta(2k) = \frac{\pi^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)\zeta(1-2k) \Rightarrow \zeta(2k) = \frac{\pi^{2k}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)}{\Gamma(k)}\frac{(-B_{2k})}{2k}$$

Apliquem la fórmula (7) fent el canvi $s = 2k$ i tenim

$$\zeta(2k) = \frac{\pi^{2k}}{\sqrt{\pi}}\frac{(-B_{2k})}{2k}2^{2k-1}\frac{(-1)^k}{\Gamma(2k)}\sqrt{\pi} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$$

3 Aprofundint $\zeta(n)$, per $n \in \mathbb{N}$

Després de que Euler aconseguís evaluar $\zeta(2n)$ per $n \in \mathbb{N}$ (corol·lari 2.13), va intentar infructuosament evaluar ζ als senars $2n+1$. Però fins ara, actualment, encara no hi ha hagut èxit. D'aquests nombres, poc en sabem avui dia.

Teorema 3.1 (T. Rivoal, 2000)**.** Hi ha infinits nombres irracionals de la forma $\zeta(2n+1)$, amb $n \in \mathbb{N}$.

Però fixat n, per $\zeta(2n+1)$ tan sols es sap demostrar per $\zeta(3)$. Ho va presentar R. Apéry en 1978 a les *Journées Arithmétiques*, per això la constant duu el seu cognom.

Teorema 3.2 (V. Zudilin, 2001)**.** De $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ i $\zeta(11)$, com a mínim un d'ells és irracional.

No obstant hi ha una conjectura que afirma

Conjectura 3.3. Per tot $n \in \mathbb{N}$, els nombres de la forma $\zeta(2n+1)$ són sempre trascendents sobre $\mathbb{Q}$.

Hi ha una altra conjectura més general que afirma

Conjectura 3.4. Tots els elements de $\{\zeta(2n+1) \mid \forall n \in \mathbb{N}\} \cup \{\pi\}$ són sempre trascendents sobre $\mathbb{Q}$ i a més són $\mathbb{Q}$-algebraicament independents.[1]

3.1 Criteri d'irracionalitat

Un nombre $a \in \mathbb{Q}$ té la característica que per $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ i $a \neq \frac{p}{q}$ existeix un $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qq_0}.$$
Tanmateix, per un irracional α existeixen sempre infinits racionals $\frac{p}{q}$ (per exemple, les *convergents* de la *fracció contínua* de α) tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

[1] els nombres d'un conjunt $A = \{\alpha_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ s'anomenen $\mathbb{Q}$-alg. independents si $\forall B = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ subconjunt finit de A no existeix $m[x_1, \ldots, x_k] \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ no zero on $m(\beta_1, \ldots, \beta_k) = 0$ (on $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ denota l'anell de polinomis de k variables a coeficients en $\mathbb{Q}$).

Teorema 3.5 (Criteri de Dirichlet)**.** Si existeixen uns $\delta, c > 0$ i una seqüència $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ de nombres racionals tal que $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$ i

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{c}{q_n^{1+\delta}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

aleshores α és irracional.

3.2 $\zeta(3)$: La constant d'Apéry

En aquesta secció, veurem que $\zeta(3) = 1{,}202056903159\ldots$ és irracional seguint la demostració original d'Apéry ([POO]), i explícitament detallada.[2]

Definició 3.6. Per $k \leq n$, definim la seqüència

$$c_{n,k} := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m}{2m^3\binom{n+m}{m}\binom{n}{m}}.$$

Lema 3.7. Es satisfà que $c_{n,k} \to \zeta(3)$ quan $n \to +\infty$, uniformement en k.

Demostració. Fem $n = k$, i només veurem que

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m^3\binom{n+m}{m}\binom{n}{m}} \to 0 \text{ quan } n \to +\infty. \tag{8}$$

Definim

$$u(x,k) := \frac{(-1)^k k!^2}{x(x-1)(x-4)\cdots(x-k^2)} \text{ i } v_{n,k} := \frac{1}{2}\frac{k!^2(n-k)!}{k^3(n+k)!}$$

Aleshores calculem

$$\sum_{k=1}^{n-1} u(n^2, k-1) - u(n^2, k) = \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}.$$

Tenim que

$$(-1)^k n(v_{n,k} - v_{n-1,k}) = u(n^2, k-1) - u(n^2, k).$$

Per tant, per una banda veiem que

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(v_{n,k} - v_{n-1,k}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u(n^2,k-1)}{n} - \frac{u(n^2,k)}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

[2] per demostracions més recents consulteu Wadim Zudilin, *An elementary proof of Apéry's theorem*, 2002, arXiv:math/0202159v1

Per l'altra banda, veiem que

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(v_{n,k}-v_{n-1,k}) = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k(v_{N,k}-v_{k,k}) = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}$$

Igualem les dues bandes i tenim que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{2n^3\binom{N+n}{n}\binom{N}{n}} + \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}.$$

Es conegut que

$$\zeta(3) =: \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}, \tag{9}$$

i per tant, per força (8) s'ha de complir.

Per una demostració de (9), podeu veure [GOS].

Lema 3.8. Tenim que $c_{n,k}$ compleix que

$$2\,\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,n)^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} \text{ és enter.}$$

Demostració. Usarem la funció $\mathrm{ord}_p(n)$, que dóna el més petit exponent d tal que $n^d \equiv 1 \pmod p$. Té la propietat que $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$.
Es pot veure que $\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{i\geq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right]$.
També es pot veure que $\mathrm{ord}_p\binom{n}{m} \leq \mathrm{ord}_p\big(\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,n)\big) - \mathrm{ord}_p(m)$.
Aleshores per $m \leq k \leq n$ veiem que

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_p\left(\frac{2m^3\binom{n}{m}\binom{m+n}{m}}{2\binom{n+k}{k}}\right) = \mathrm{ord}_p\left(\frac{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}{\binom{n+k}{k-m}}\right) \leq \\ \leq 3\,\mathrm{ord}_p(m) + \mathrm{ord}_p\big(\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,n)\big) + \mathrm{ord}_p\big(\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,k)\big) - 2\,\mathrm{ord}_p(m) \leq \\ \leq 3\,\mathrm{ord}_p\big(\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,n)\big).\end{aligned}$$

Definició 3.9. Definim les següents seqüències:

$$a_n := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}, \quad b_n := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

Proposició 3.10.

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{k}^2\binom{n}{l}\binom{k}{l}\binom{2n-l}{n}$$

Demostració. Per una banda tenim

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}^2 \binom{n+k}{n}^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2n-k}{n}^2 = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \binom{2n-l}{n}^2$$

Per l'altra banda tenim

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k}^2 \binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{2n-l}{n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{2n-l}{n} =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n}{l} \binom{k}{l} \binom{2n-l}{n}$$

Per tant, igualant ambdues bandes tenim que només hem de veure que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{2n-l}{n}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!^2 k!}{k!^2 (n-k)!^2 l! (k-l)!} = \frac{n!(2n-l)!}{l!(n-l)!^2 n!}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!(n-l)!}{k!(n-k)!^2 (k-l)!} = \frac{(2n-l)!}{(n-l)! n!}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-l}{n-k} = \binom{2n-l}{n}$$

I ja estem, perquè aquesta última igualtat és la identitat de Vandermonde (amb $s = n$, $t = n - l$), que és

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}, \text{ per } n, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Proposició 3.11.
$$\frac{a_n}{b_n} \to \zeta(3) \text{ quan } n \to +\infty.$$

Demostració. Definim $f_0(n,k) := \binom{n+k}{k} c_{n,k}$ i definim $g_0(n,k) := \binom{n+k}{k}$. Sabem pel lema 3.7 que $\frac{f_0(n,k)}{g_0(n,k)} = c_{n,k} \to \zeta(3)$ quan $n \to +\infty$, uniformement en k.

Aplicarem diverses transformacions a f i g, de tal manera que el seu quocient, en cada pas, segueixi convergent a $\zeta(3)$ al límit. Aquestes són:

$$\begin{aligned}
f_1(n,k) :=&\ f_0(n,n-k)\\
f_2(n,k) :=&\ \binom{n}{k} f_1(n,k)\\
f_3(n,k) :=&\ \sum_{k_1=0}^{k} \binom{k}{k_1} f_2(n,k_1)\\
f_4(n,k) :=&\ \binom{n}{k} f_3(n,k)\\
f_5(n,k) :=&\ \sum_{k_2=0}^{k} \binom{k}{k_2} f_4(n,k_2)
\end{aligned}$$

Apliquem els mateixos passos a $g_0(n,k)$. Observem que $g_i(n,k)$ i $2\,\mathrm{mcm}(1,2,\ldots,n) f_i(n,k)$ són enters, $\forall i \in \{0,\ldots,5\}$.
Tenim que

$$f_5(n,n) = \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{k_1=0}^{k_2} \binom{n}{k_2}^2 \binom{n}{k_1} \binom{k_2}{k_1} \binom{2n-k_1}{n} c_{n,n-k_1} = a_n$$

i tenim que

$$g_5(n,n) = \sum_{k_2=0}^{n} \sum_{k_1=0}^{k_2} \binom{n}{k_2}^2 \binom{n}{k_1} \binom{k_2}{k_1} \binom{2n-k_1}{n} = b_n,$$

on hem aplicat a l'última igualtat la proposició 3.10.

Proposició 3.12. Considerem la següent recursió

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0, \quad n \geq 2.$$

Aleshores $b_n = u_n$ quan $u_0 = 1$, $u_1 = 5$; i $a_n = u_n$ quan $u_0 = 0$, $u_1 = 6$.

Demostració. Definim

$$B_{n,k} := 4(2n+1)\big(k(2k+1) - (2n+1)^2\big) \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

amb el motiu de que compleix

$$\begin{aligned}B_{n-1,k}-B_{n-1,k-1}=n^3\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2-\\ -(34n^3-51n^2+27n-5)\binom{n-1}{k}^2\binom{n-1+k}{k}^2+\\ +(n-1)^3\binom{n-2}{k}^2\binom{n-2+k}{k}^2\end{aligned}$$

Per tant, si fem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}B_{n-1,k}-B_{n-1,k-1}=B_{n-1,n}-B_{n-1,-1}=0=\\ =n^3b_n-(34n^3-51n^2+27n-5)b_{n-1}+(n-1)^3b_{n-2}\end{aligned}$$

Similarment, definim

$$A_{n,k}:=B_{n,k}c_{n,k}+\frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

amb el motiu de que compleix

$$\begin{aligned}A_{n-1,k}-A_{n-1,k-1}=n^3\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2c_{n,k}-\\ -(34n^3-51n^2+27n-5)\binom{n-1}{k}^2\binom{n-1+k}{k}^2c_{n-1,k}+\\ +(n-1)^3\binom{n-2}{k}^2\binom{n-2+k}{k}^2c_{n-2,k}\end{aligned}$$

Per tant, si fem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}A_{n-1,k}-A_{n-1,k-1}=A_{n-1,n}-A_{n-1,-1}=0=\\ =n^3a_n-(34n^3-51n^2+27n-5)a_{n-1}+(n-1)^3a_{n-2}\end{aligned}$$

Lema 3.13. b_n és estrictament creixent, no està acotada i $b_n=O(\alpha^n)$.[3]

Demostració. Tenim que b_n és estrictament creixent perquè sempre es compleix $\binom{m}{k}<\binom{m+1}{k}$. I b_n no està acotada perquè

$$b_n>\binom{n}{1}^2\binom{n+1}{1}^2=n^2(n+1)^2\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$$

[3] $x_n=O(y_n)$ significa que $\frac{x_n}{y_n}\to 0$ quan $n\to+\infty$ (amb $y_n\neq 0$)

Per tant, tenim que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Ara anem a estimar b_n, encara que sigui asimptòticament. Pel teorema 3.12, tenim que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\big(n^3 b_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)b_{n-1} + (n-1)^3 b_{n-2}\big) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} b_n - 34bn - 1 + b_{n-2} = 0$$

Per tant, considerem l'última igualtat, que ens estimarà b_n com una progressió geomètrica. Les arrels de $x^2 - 34x + 1$ són $\alpha = (1+\sqrt{2})^4, \alpha^{-1} = (1-\sqrt{2})^4$. Això ens diu que b_n asimptòticament al límit convergeix tan ràpid com $\frac{1}{\alpha-\alpha^{-1}}(\alpha^n - \alpha^{-n})$. I d'aquesta manera, hem vist que $b_n = O(\alpha^n)$.

Teorema 3.14 (Teorema d'Apéry)**.** $\zeta(3)$ és irracional.

Demostració. Per la proposició 3.12, tenim que

$$n^3 a_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)a_{n-1} = -(n-1)^3 a_{n-2}$$
$$n^3 b_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)b_{n-1} = -(n-1)^3 b_{n-2}$$

Multipliquem la primera equació per b_{n-1} i la segona per a_{n-1}, i les restem. Obtenim

$$n^3(a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) = (n-1)^3(a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1}).$$

Usant $a_0 = 0, a_1 = 6, b_0 = 1, b_1 = 5$, fem inducció i trobem la relació

$$a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = \frac{6}{n^3}.$$

Ara definim $x_n := \dfrac{a_n}{b_n} - \zeta(3)$ i veiem que

$$x_n - x_{n-1} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{b_n b_{n-1}} = \frac{6}{n^3 b_n b_{n-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \lim_{n\to+\infty} \left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = 0, \text{ per proposició 3.11.}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k - x_{k-1}\right| = |x_\infty - x_n| = |x_n| = \left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}$$

$$\left|\frac{x_n}{b_n^{-2}}\right| = \left|\frac{\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}}{b_n^{-2}}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6b_n^2}{k^3 b_k b_{k-1}} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Per tant, acabem de veure que $x_n = O(b_n^{-2})$.

Recordem que els a_n no són enters. Però ho arreglem

$$p_n := 2\ \mathrm{mcm}(1,2,\dots,n)^3 a_n \in \mathbb{Z}, \quad q_n := 2\ \mathrm{mcm}(1,2,\dots,n)^3 b_n \in \mathbb{Z}$$

Es conegut que $\mathrm{mcm}(1,2,\dots,n) = O(e^n)$. Per tant, usant el lema 3.13, sabem que $q_n = O(\alpha^n e^{3n})$. Tenim que $x_n = O(b_n^{-2}) = O(q_n^{-2}\,\mathrm{mcm}(1,2,\dots,n)^6) = O(q_n^{-2}e^{6n}) = O(q_n^{-2}q_n^{\beta})$. Calculem β:

$$O(e^{6n}) = O(q_n^{\beta}) \Rightarrow O(e^{6n}) = O\big((\alpha^n e^{3n})^{\beta}\big)$$

$$6n = n\beta\ln(\alpha) + 3n\beta \Rightarrow \beta = \frac{6}{\ln(\alpha)+3}$$

Finalment, $x_n = O\left(q_n^{-2}q_n^{\frac{6}{\ln(\alpha)+3}}\right) = O\big(q_n^{-(1+\delta)}\big)$ amb

$$\delta = \frac{\ln(\alpha)-3}{\ln(\alpha)+3} = 0{,}080529\ldots > 0.$$

I pel criteri d'irracionalitat de Dirichlet (teorema 3.5), $\zeta(3)$ és irracional.

3.3 Relacions aritmètiques

Aquesta secció enunciarem resultats referent a la interpretació aritmètica dels valors enters de la funció zeta de Riemann. Aquesta interpretació és un cas concret del que es coneix com la conjectura de Bloch-Kato per a funcions L (anomenada també conjectura del nombre de Tamagawa) per a motius sobre cossos de nombres.

Iniciem amb la interpretació del valor de $\zeta(s)$ en 1. Hem vist que $\lim_{s\to 1}\frac{\zeta(s)}{(s-1)} = 1$ (pel teorema 2.6). Hi ha algun motiu aritmètic de que surti 1?

Per això considerem $K/\mathbb{Q}$ una extensió finita, i sigui $\mathcal{O}_K := \{f \in K \mid g(f) = 0,\text{ per a cert } g \in \mathbb{Z}[x] \text{ mònic}\}$ l'anell d'enters de K (recordem $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$). Recordem que $\mathcal{O}_K$ és un anell de Dedekind, és a dir, tot ideal és producte d'ideals primers i aquest producte és únic llevat ordre dels ideals primers.

Definició 3.15. Es defineix la funció zeta de Dedekind per K via

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}\text{ ideal no trivial de }\mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

on $N(\mathfrak{a})$ és el nombre d'elements de l'anell quocient $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$.

Es pot demostrar que $\zeta_K(s)$ convergeix per $\Re(s) > 1$ i té prolongació analítica a tot el pla complex, amb un únic pol a $s = 1$, i equació funcional similarment a la funció zeta de Riemann (explicitem que $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$).

E. Hecke va demostrar ([NEU, §VII.5]) el següent resultat:

Teorema 3.16 (fórmula del nombre de classes analítica)**.** Es té que

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{(s-1)} = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w|d_K|^{1/2}} h_K R_K$$

on r_1 són les inmersions diferents del cos K en $\mathbb{R}$ (diem-les $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_1}$); r_2 són les inmersions diferents del cos K en $\mathbb{C}$ i no en $\mathbb{R}$ (diem-les $\lambda_{r_1+1}, \ldots, \lambda_{r_1+r_2}$) (i es coneix que $[K : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$); h_K és anomenat nombre de classes (que és refereix a un grup associat a $\mathcal{O}_K$) i es té $h_K = 1$ si i només si $\mathcal{O}_K$ és un domini de factorització única; w és el nombre d'arrels de la unitat dins de K; d_K és el discriminant del cos K que correspon, si $K/\mathbb{Q}$ Galois, al determinant $\det\big((\sigma_i\alpha_j)\big)^2$ on $\sigma_i \in Gal(K/\mathbb{Q})$ i α_j són una base de K com a $\mathbb{Q}$-espai vectorial (és independent de la base triada i hi ha una definició general sense necessitar $K/\mathbb{Q}$ Galois, [NEU, §I.2]); i R_K es refereix al regulador com el determinant d'un menor de rang $r_1 + r_2 - 1$ de la matriu de mida $r_1 + r_2 \times (r_1 + r_2 - 1)$; $\big((\lambda_i(\varepsilon_j))\big)_{i,j}$ on $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1}$ és una base com a grup abelià de les unitats de $\mathcal{O}_K$ (que pel teorema de Dirichlet de les unitats és un grup finit format per les arrels de 1 per un grup lliure abelià de rang $r_1 + r_2 - 1$).

Fixem-nos per $K = \mathbb{Q}$, tenim $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ i, com que $\mathbb{Z}$ és d.f.u., $h_{\mathbb{Q}} = 1$, clarament $d_K = 1 = R_K$ i $w = 2$ ja que les arrels de 1 de $\mathbb{Z}$ són $\{\pm 1\}$, per tant s'obte:

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta(s)}{(s-1)} = 1, \text{ donant la interpretació de perquè surt 1.}$$

Anem ara a estudiar la interpretació per $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$. Donarem una interpretació dels nombres de Bernouilli.

Teorema 3.17 (von Staudt-Clausen)**.** Per $n \in \mathbb{N}$, es té

$$B_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ primer} \\ (p-1)|2n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z},$$

on la suma és sobre els primers p on $p-1$ divideix $2n$ (en particular, 2 i 3 apareixen en el denominador de cada nombre de Bernoulli). Obtenim que pB_{2n} és p-íntegre per tot n i per tot p.[4]

Per una demostració, veieu [WAS, §5.2].

[4]recordem que $a \in \mathbb{Q}$ és p-íntegre si p no divideix v on $a = u/v$ amb $u, v \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{mcd}(u, v) = 1$

Anem a interpretar el numerador dels nombres de Bernouilli.

Teorema 3.18 (Kummer)**.** Sigui p un primer senar. Es té

$$p | h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})} \Leftrightarrow p \text{ divideix el numerador de } B_j \text{ per algun } j = 2, 4, \ldots, p-3.$$

Exemple 3.19. Sabem que $\zeta(-11) = -\frac{B_{12}}{12} = 691/(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$. Pel teorema anterior sabem que el nombre de classes $h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})}$ és divisible per 691, ja que el numerador de $\zeta(-11)$ és divisible per 691.[5]

Una pregunta que ens podem formular és: com és que el 691 apareix en avaluar a -11 la funció ζ? Té algún significat?

La resposta és sí, prové de l'estudi com a $\mathbb{Z}[Gal\big(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})\big)]$-mòdul del grup finit $Cl\big(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})\big)$ anomenat el grup de classes d'ideals que no entrem a definir aquí (recordem $h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})}$ és el nombre d'elements de $Cl\big(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})\big)$).

Hi ha alguna relació aritmètica entre B_{2n} i B_{2m}? Sí, Kummer ens va proporcionar el següent resultat.

Teorema 3.20 (Congruències de Kummer)**.** Suposem $m \equiv n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ on n i m són enters positius parells. Llavors

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} \pmod{p}$$

i més en general és té que si $m \equiv n \pmod{(p-1)p^a}$ i $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ tenim

$$(1-p^{m-1})\frac{B_m}{m} \equiv (1-p^{n-1})\frac{B_n}{n} \pmod{p^{a+1}}.$$

Ajuntem resultats dels nombres de Bernouilli reescrivint-los respecte els valors de la funció zeta de Riemann:

Corol·lari 3.21. Si es té $1-2r \not\equiv 1 \pmod{p-1}$, llavors $\zeta(1-2r) \in \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \mid \mathrm{mcd}(n,p) = 1\}$, i a més si $1-2r' \equiv 1-r \pmod{p-1}$ llavors $\zeta(1-2r) \equiv \zeta(1-2r') \pmod{p}$.

Si $1-2r \equiv 1 \pmod{p-1}$ llavors p divideix el denominador de $\zeta(1-2r)$.

Exemple 3.22. Observem que $p \nmid h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})}$ per $p = 3, 5, 7, 11, 13$ per la llista que tenim de $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-3) = 1/120$, $\zeta(-5) = -1/(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7)$, $\zeta(-7) = 1/(2^4 \cdot 3 \cdot 5)$, $\zeta(-9) = -1/(2^2 \cdot 3 \cdot 11)$ i $\zeta(-11) = 691/(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$.

[5]com una primera aproximació, penseu que h_K és l'ordre del grup finit $Cl(K)$ que consisteix amb el grup quocient d'ideals de $\mathcal{O}_K$ quocient el subgrup format per ideals principals. La definició correcta ha de passar a través dels anomenats ideals fraccionaris de $\mathcal{O}_K$, que no vull entrar a enunciar en el treball.

Observació 3.23. Recordem que Lammé en 1886 podia demostrar el teorema de Fermat si $h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})} = 1$ per tot primer p, però Kummer ja sabia que aquest nombre és diferent de 1 per quasi tot primer p. En 1850, Kummer va demostrar que si $p \nmid h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})}$ llavors el teorema de Fermat per l'equació $X^p + Y^p = Z^p$ és correcte. Aquests p complint $p \nmid h_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})}$ Kummer els va anomenar regulars. De l'anterior exemple tenim que $p = 3, 5, 7, 11$ i 13 són primers regulars. Hi ha primers no regulars? Sí, molts (per exemple $p = 691$ és un primer no regular); realment hi ha un nombre no finit de primers no regulars.

Andrew Wiles va resoldre el teorema de Fermat amb tècniques molt diferent i molt sofisticades.

Per finalitzar comentar que la interpretació del primer coeficient del desenvolupament de Taylor de $\zeta(s)$ amb s evaluat en un enter n (anomenem aquest valor $\zeta^*(n)$) correspon a les anomenades conjectures de Lichtenbaum, realment demostrades en la majoria de casos però que no són explícites per a treballar amb els elements de forma concreta. Per exemple afirma que hi ha un cert element dins un grup de teoria K que s'aplica a la part transcendent sobre $\mathbb{Q}$ de $\zeta^*(n)$ i la part racional es troba usant grups de cohomologia étale i cohomologies de Grothendieck. Per una referència, mireu [LIC].

4 Els valors multizeta

Com ja hem vist, no tenim prou informació dels nombres $\zeta(2n+1)$, per $\in \mathbb{N}$. És possible que aquests nombres siguin $\mathbb{Q}$-algebraicament independents i això no ens interessa. Per tant, el que es fa és intentar trobar estructures en les generalitzacions de la funció zeta de Riemann, com poden ser per exemple les funcions L de Dirichlet, la funció polilogaritme, la funció zeta de Hurwitz, etc.

Entre aquestes generalitzacions, destaquem la funció multizeta. Nosaltres ens centrarem a evaluar-la als enters, per tant, considerem els *valors multizeta*, definits per

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{\substack{n_1 > \cdots > n_k > 0 \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \left(\leq \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{s_1}} \right)$$

amb $k, s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Es requereix $s_1 > 1$ per garantir la convergència. La k s'anomena la *longitud* de la tupla $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ i $s_1 + \cdots + s_k =: s$ el *pes* de la tupla $\underline{s}$.

Aquests valors tenen la propietat de que el seu producte és pot expressar com una combinació lineal. Per exemple,

$$\zeta(5) = 4\zeta(3,2) + 6\zeta(2,3).$$

En aquest capítol, veurem una introducció als resultats actuals sobre aquest tema.

Definició 4.1. Definim el següent $\mathbb{Q}$-e.v. de $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \,|\, n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, k, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

Observació 4.2. $\mathfrak{Z}$ és un subanell commutatiu de $\mathbb{R}$.

Definició 4.3. Definim altres $\mathbb{Q}$-e.v. de $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{Z}_n := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \,|\, n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, k, \forall k \geq 1 \,|\, n = n_1 + \cdots + n_k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^k \mathfrak{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_l) \,|\, n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, l, \forall l \geq 1 \,|\, l \leq k \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^k \mathfrak{Z}_n \subset \mathcal{F}^k \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Z}_n$$

Conjectura 4.4 ([WAL, §1.2])**.**

$$\mathcal{F}^k \mathfrak{Z}_n = \mathcal{F}^k \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Z}_n$$

Definició 4.5. Per $n > 0$, denotem per d_n la dimensió de $\mathfrak{Z}_n$.

4.1 Representacions

Per detalls de les demostracions d'aquesta secció i posteriors, consulteu [IKZ].

Teorema 4.6. Tenim que

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) = \int_{\Delta_n} w_1(t_1)w_2(t_2)\cdots w_n(t_n),$$

on $n = n_1 + \cdots + n_k$ i

$$\Delta_n = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^n \mid 1 > t_1 > \cdots > t_n > 0\}.$$

On la funció ω es defineix per

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \omega_y = \dfrac{dt}{(1-t)} & \text{si } i \in \{n_1, n_1+n_2, \ldots, n-n_k, n\} \\ \omega_x = \dfrac{dt}{t} & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Aquesta representació integral s'anomena integral Drinfel'd.

Exemple 4.7.

$$\zeta(3) = \int_{\Delta_3} \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}$$

Definició 4.8.
· Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
· Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subàlgebra de $\mathfrak{H}$ generada per les paraules "acabades en y".
· Denotem per $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, la subàlgebra de $\mathfrak{H}$ generada per les paraules "començades en x i acabades en y".

Observació 4.9. Veiem que $z_k = x^{k-1}y \in \mathfrak{H}^0$, per $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ no generen $\mathfrak{H}^0$. Per exemple, la paraula $xy^2 \in \mathfrak{H}^0$ no està generada per les z_k's.

Definició 4.10. Denotem per $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ l'únic morfisme $\mathbb{Q}$-lineal amb $Z(1) = 1$ que assigna a cada paraula $u_1u_2\cdots u_k$ (on $u_i = x$ ò y), la integral múltiple

$$Z(u_1u_2\cdots u_k) := \int_{\Delta_n} \omega_{u_1}(t_1)\omega_{u_2}(t_2)\cdots\omega_{u_k}(t_k)$$

Definició 4.11. Denotem $z_k := x^{k-1}y$, que correspon per a Z el valor $\zeta(k)$. Associem cada tupla $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ a la paraula

$$z_{\underline{n}} := z_{n_1}\cdots z_{n_k} = x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y\cdots x^{n_k-1}y$$

Després d'aquestes definicions i pel teorema 4.6 obtenim

Corol·lari 4.12.

$$Z(z_{n_1}\cdots z_{n_k}) = Z(x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y\cdots x^{n_k-1}y) = \zeta(n_1,n_2,\ldots,n_k)$$

Definició 4.13. A cada monomi de $\mathfrak{H}^1$ li associem el pes (que és el grau total) i la longitud (que és el grau en y). Diem que un element de $\mathfrak{H}^1$ té pes (pur) n si tots els monomis que el formen tenen pes n.

4.2 Productes

Definició 4.14. A $\mathfrak{H}^1$, definim el *producte harmònic* inductivament per

$$1 \star w = w \star 1 = w$$

$$z_k w_1 \star z_l w_2 := z_k(w_1 \star z_l w_2) + z_l(z_k w_1 \star w_2) + z_{k+l}(w_1 \star w_2)$$

per a totes $k,l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat (on z_k, z_l definides anteriorment). També es pot extendre a tot $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x,y\rangle$.

El producte harmònic de dos paraules de pes pur n i m té pes pur $n+m$.

Proposició 4.15. $\mathfrak{H}^1$ és una àlgebra commutativa per $\star$, i $\mathfrak{H}^0$ és una subàlgebra. Les anomenem $\mathfrak{H}^1_\star$ i $\mathfrak{H}^0_\star$ respectivament.

Proposició 4.16. Z és un morfisme d'anells per $\star$, o sigui

$$Z(w_1 \star w_2) = Z(w_1)Z(w_2)$$

Exemple 4.17. De $z_k \star z_l = z_k z_l + z_l z_k + z_{k+l}$ i de la proposició 4.16 s'obté la relació

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

Definició 4.18. A $\mathfrak{H}$, definim el *producte escartejat* (o "*shuffle*") inductivament per

$$1 ш w = w ш 1 = w$$

$$uw_1 ш vw_2 := u(w_1 ш vw_2) + v(uw_1 ш w_2)$$

per a tot $u, v \in \{x,y\}$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat. També es pot extendre a tot $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x,y\rangle$.

El producte escartejat de dos paraules de pes pur n i m té pes pur $n+m$.

Proposició 4.19. $\mathfrak{H}$ és una $\mathbb{Q}$-àlgebra commutativa per ш, i $\mathfrak{H}^1$ i $\mathfrak{H}^0$ són dues subàlgebres. Les anomenem $\mathfrak{H}_ш$, $\mathfrak{H}^1_ш$ i $\mathfrak{H}^0_ш$ respectivament.

Proposició 4.20. Z és un morfisme d'anells per $\sqcup\!\sqcup$, o sigui

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2) = Z(w_1)Z(w_2)$$

Exemple 4.21. Es tracta de trobar totes les possibilitats de formar diferents paraules mantenint l'ordre de les lletres.

$$\begin{aligned} xy \sqcup\!\sqcup \mathbf{x^2y} = xy\mathbf{x^2y} + x\mathbf{x}y\mathbf{xy} + x\mathbf{x^2}y\mathbf{y} + x\mathbf{x^2y}y + \mathbf{x}xy\mathbf{xy} + \\ + \mathbf{x}x\mathbf{x}y\mathbf{y} + \mathbf{x}x\mathbf{xy}y + \mathbf{x^2}xy\mathbf{y} + \mathbf{x^2}x\mathbf{y}y + \mathbf{x^2y}xy \end{aligned}$$

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

4.3 Relacions generals

Corol·lari 4.22. Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim que

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2) = Z(w_1 \star w_2)$$

Exemple 4.23.

$$\big(\zeta(2)\zeta(3) =\big)\zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

$$2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1) = \zeta(5)$$

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents. Un primer pas és:

Teorema 4.24. Per $\forall w \in \mathfrak{H}^0$, tenim $Z(y \sqcup\!\sqcup w - y \star w) = 0$.

Conjectura 4.25. Les següents relacions (recordem Z és $\mathbb{Q}$-lineal)

$$\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0, Z(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2 - w_1 \star w_2) = 0 \quad \text{(del corol·lari 4.22)},$$
$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y \sqcup\!\sqcup w - y \star w) = 0 \quad \text{(del teorema 4.24)},$$

generen totes les relacions de $\mathfrak{Z}$ sobre $\mathbb{Q}$ que hi ha.

Però què podem dir generalment sobre $\mathfrak{H}^1$?

Proposició 4.26. Tenim dos morfismes d'àlgebres

$$Z^\star : \mathfrak{H}^1_\star \to \mathbb{R}[T] \text{ i } Z^{\sqcup\!\sqcup} : \mathfrak{H}^1_{\sqcup\!\sqcup} \to \mathbb{R}[T]$$

que estan únicament caracteritzats per les propietats que tots dos evaluen $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ i envien y a T.

Teorema 4.27 (Zagier)**.** Si $w = yw'$ amb $w' \in \mathfrak{H}^0$, aleshores $Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) = Z^\star(w)$

Definició 4.28. Per una tupla $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$, les imatges de $Z^\star$ i $Z^{Ш}$ per la corresponent paraula $z_{n_1} \cdots z_{n_k}$ es denoten $Z^\star_{\underline{n}}(T)$ i $Z^{Ш}_{\underline{n}}(T)$, respectivament.

Observació 4.29. Sigui $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ admissible (és dir $n_1 > 1$). Aleshores $Z^\star_{\underline{n}}(T) = Z^{Ш}_{\underline{n}}(T) = \zeta(\underline{n})$.

Observació 4.30. Sigui $\underline{n} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s}, \underline{n}')$ amb $\underline{n}'$ admissible i $s \geq 0$ tenim que

$$Z^\star_{\underline{n}}(T) = \zeta(\underline{n}')\frac{T^s}{s!} + (\text{termes de baix grau en } T)$$
$$Z^{Ш}_{\underline{n}}(T) = \zeta(\underline{n}')\frac{T^s}{s!} + (\text{termes de baix grau en } T)$$

i també que els coeficients de T^k en $Z^\star_{\underline{n}}(T)$ i $Z^{Ш}_{\underline{n}}(T)$ són combinacions $\mathbb{Q}$-lineals de valors multizeta de pes $n - k$ (n = pes de $\underline{n}$).

Definició 4.31. Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[\![u]\!]$$

Per exemple tenim $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = \frac{\zeta(2)}{2}, \gamma_3 = -\frac{\zeta(3)}{3}, \gamma_4 = \frac{\zeta(4)}{4} + \frac{\zeta(2)^2}{8}$. Es té

$$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u) \text{ per } |u| < 1 \text{ i } \gamma \text{ la constant d'Euler}^6$$

Definició 4.32. Considerem el morfisme $\mathbb{R}$-lineal $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ determinat per

$$\rho\left(\frac{T^n}{n!}\right) := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{T^{n-k}}{(n-k)!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Teorema 4.33 (Ihara-Kaneko-Zagier)**.** Per qualsevol $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$, tenim

$$Z^{Ш}_{\underline{n}}(T) = \rho\big(Z^\star_{\underline{n}}(T)\big).$$

Exemple 4.34. Per $\underline{n} = (1, 2)$, obtenim

$$Z^{Ш}_{\underline{n}}(T) = \zeta(2)T - 2\zeta(2,1) = \zeta(2)T - \zeta(2,1) - \zeta(3) = \rho\big(Z^\star_{\underline{n}}(T)\big),$$

I obtenim la fórmula d'Euler, $\zeta(2,1) = \zeta(3)$.

[6] la contant d'Euler-Mascheroni és $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0{,}577215664901\ldots$

Teorema 4.35 (Reutenauer, 1993)**.** Sigui $\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \to \mathfrak{H}_{ш}^{0}[T]$ el morfisme definit com la identitat en $\mathfrak{H}^0$, envia y a T i un morfisme de $\mathbb{Q}$-àlgebres. A més $\mathrm{reg}_{ш}^{T}$ és un isomorfisme de $\mathbb{Q}$-àlgebres.

Teorema 4.36 (Hoffman, 1997)**.** Sigui $\mathrm{reg}_{\star}^{T} : \mathfrak{H}_{\star}^{1} \to \mathfrak{H}_{\star}^{0}[T]$ el morfisme definit com la identitat en $\mathfrak{H}^0$, envia y a T i un morfisme de $\mathbb{Q}$-àlgebres. A més $\mathrm{reg}_{\star}^{T}$ és un isomorfisme de $\mathbb{Q}$-àlgebres.

Definició 4.37. Denotem

$$\mathrm{reg}_{ш} := \mathrm{reg}_{ш}^{T}|_{T=0} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \to \mathfrak{H}_{ш}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{\star} := \mathrm{reg}_{\star}^{T}|_{T=0} : \mathfrak{H}_{\star}^{1} \to \mathfrak{H}_{\star}^{0}$$

Teorema 4.38. Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{ш}(w) - \rho\big(Z^{\star}(w)\big) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $\big(Z^{ш}(w) - \rho\big(Z^{\star}(w)\big)\big)|_{T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $Z^{ш}(w_1 ш\, w_0 - w_1 \star w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z^{\star}(w_1 ш\, w_0 - w_1 \star w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z\big(\mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш\, w_0 - w_1 \star w_0)\big) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z\big(\mathrm{reg}_{\star}(w_1 ш\, w_0 - w_1 \star w_0)\big) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z\big(\mathrm{reg}_{ш}(y^m \star w_0)\big) = 0$ per tota $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ i $\forall m \geq 1$.
- $Z\big(\mathrm{reg}_{\star}(y^m ш\, w_0 - y^m \star w_0)\big) = 0$ per tota $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ i $\forall m \geq 1$.

Proposició 4.39. Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i longitud k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim

$$(-1)^k \mathrm{reg}_{ш}(y^k \star x^{m-k-1}y) = S(m,k+1) - S(m,k).$$

Teorema 4.40 (Teorema de la suma de Granville)**.** La suma de tots els valos multizeta de pes fixat n i longitud fixada $< n$ és igual a $\zeta(n)$.
O sigui, fixada $k < n$ tenim

$$\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \zeta(n_1,\ldots,n_k) = \zeta(n) \quad \text{(recordem } n_1 > 1)$$

Veieu [XAR] per una curta demostració usant la proposició anterior.

Exemple 4.41. Tenim $\zeta(2,1) = \zeta(3)$; i $\zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(4) = \zeta(2,1,1)$.

4.4 Conjectures i alguns resultats

Conjectura 4.42. Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen de

$$Z\big(\operatorname{reg}_{ш}(w \sqcup\!\sqcup w' - w \star w')\big) = 0 \quad \forall w \in \mathfrak{H}^1, \forall w' \in \mathfrak{H}^0$$
$$Z^{ш}(w) = \rho\big(Z^{\star}(w)\big) \quad \forall w \in \mathfrak{H}^1.$$

Com hem vist en el teorema 4.38, aquesta segona relació és equivalent a

$$Z\big(\operatorname{reg}_{ш}(y^m \star w)\big) = 0 \quad \forall w \in \mathfrak{H}^0 \text{ i } \forall m \geq 1.$$

Conjectura 4.43. Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen de

$$Z\big(\operatorname{reg}_{ш}(w \sqcup\!\sqcup w' - w \star w')\big) = 0 \quad \forall w \in \mathfrak{H}^1, \forall w' \in \mathfrak{H}^0$$
$$Z\big(\operatorname{reg}_{ш}(y \star w)\big) = 0 \quad \forall w \in \mathfrak{H}^0.$$

Conjectura 4.44. Les conjectures 4.42 i 4.43 són equivalents.[7]

Conjectura 4.45. Dos valors multizeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$.

O sigui, els $\mathbb{Q}$-subespais $\mathfrak{Z}_n$ de $\mathbb{R}$ estan en suma directa:

$$\mathfrak{Z} = \bigoplus_{n \geq 2} \mathfrak{Z}_n \subset \mathbb{R}.$$

Conjectura 4.46. Les $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ són sempre transcendents sobre $\mathbb{Q}$.

Conjectura 4.47 (Zagier, Broadhurst-Kreimer)**.** La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathfrak{Z}_n$ és d_n, on $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1$ i $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$.

Teorema 4.48 (Goncharov, Terasoma)**.** Tenim $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{Z}_n) \leq d_n$.

La conjectura de la base (Hoffman), que diu que tot element de $\mathfrak{Z}$ potser escrit com a suma de múltiples racionals de valors multizeta que sols contenen 2 i 3 ha estat provada recentment:

Teorema 4.49 (F. Brown, 7 febrer 2011[8])**.** Cada valor multizeta és una combinació $\mathbb{Q}$-lineal de $\{\zeta(n_1, \ldots, n_k)$, on $n_1, \ldots, n_k \in \{2, 3\}\}$.

Exemple 4.50.

$$\zeta(7) = \frac{252}{151}\zeta(3,2,2) + \frac{672}{151}\zeta(2,3,2) + \frac{528}{151}\zeta(2,2,3)$$
$$\zeta(5) = 4\zeta(3,2) + 6\zeta(2,3) = \zeta(2,1,1,1)$$
$$\zeta(2,2,1) = \zeta(3,2) \text{ i } \zeta(2,1,2) = \zeta(2,3).$$

---

[7] s'ha comprovat fins a pes igual a 16, per H. N. Minh, M. Petitot en Lille, França.

[8] Francis Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, arXiv:1102.1312v1

A Funció Gamma

Introduïm la funció Γ. Per un nombre complex s que satisfà $\Re(s) > 0$, definim per

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \text{ funció Gamma en } s.$$

Es conegut que $\Gamma(n) = (n-1)!$ per $n \in \mathbb{N}$.

A.1 Continuació analítica

$\Gamma(s)$ té una continuació analítica cap a una funció meromorfa al pla complex. Això vol dir que podem ampliar el domini de definició de la funció a tot $\mathbb{C}$.

Teorema A.1. La funció Γ és holomorfa excepte per s=0, -1, -2, -3, $\ldots$, on hi ha un pol d'ordre 1. Γ no té cap 0. Per $n \geq 0$ tenim que

$$\lim_{s \to -n} (s+n)\Gamma(s) = (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

A.2 Equacions funcionals

$\Gamma(s)$ compleix les següents equacions funcionals:

- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(\pi s) = \pi$, que es coneix com la fórmula de reflexió de Euler.
- $\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{1+s}{2})\cos(\frac{\pi s}{2}) = \pi$.
- $\sqrt{\pi}\Gamma(2s) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})$, que es coneix com la fórmula de duplicació de Legendre.

Veieu [AHL, §5.2.4] per una demostració.

Bibliografia

[AYO] Raymond Ayoub, *Euler and the Zeta Function.* The American Mathematical Monthly, vol. 81, num.10, pàgs. 1067–1086. (dec. 1974)

[KKS] Kazuya Kato, Nobushige Kurokawa, Takeshi Saito, *Number Theory 1: Fermat's Dream (English Edition).* Iwanami Series in Modern Mathematics, vol. 186, American Mathematical Society (2000)

[AHL] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis (Third Edition).* International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc. (1979)

[NEU] Jürgen Neukirch, *Algebraic Number Theory (English Edition).* Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, vol. 322, Springer-Verlag, Berlin (1999)

[EDW] Harold M. Edwards, *Riemann's Zeta Function.* Pure and Applied Mathematics; a series of monographs and textbooks, Academic Press, New York (1974)

[POO] Alfred J. Van der Poorten, *A Proof That Euler Missed.* Alf's Reprints, Paper 45, pàgs. 1–16, Centre for Number Theory Research, Macquarie University, Sydney (25 de gener 2005)

[GOS] R. William Gosper Jr. (Bill Gosper), *A calculus of series rearrangements.* Algorithms and Complexity, New Directions and Recent Results J. F. Traub, pàgs. 121–151, Academic Press (1976)

[KAT] Kazuya Kato, *Iwasawa theory and generalitzations (English Summary).* International Congress of Mathematicians, vol. I, num. 18 (pàgs. 335–357), European Mathematical Society (2007)

[WAS] Lawrence C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields (First Edition).* Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York (1982)

[LIC] Stephen Lichtenbaum, *Values of zeta-functions, Étale cohomology, and algebraic K-theory.* Algebraic K-theory, II: Classical algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Mathematics, vol. 342 (pàgs. 489–501) Springer-Verlag, Berlin (1973)

[XAR] Xavier Xarles, *Valors Multi Zeta i producte escartejat.* Conferència (30 de maig, 2008)

[IKZ] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, Don Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values.* Compositio Math. 142 (2006)

[WAL] Michel Waldschmidt, *Lectures on Multiple Zeta Values IMSC 2011.* Special year in number theory at IMSc (abril 2011)

[IWA] Henryk Iwaniec, Emmanuel Kowalski, *Analytic Number Theory.* Colloquium publications, vol. 53, American Mathematical Society (2004)

[CHA] Fernando Chamizo Lorente, *Euler y la teoría de números.* La Gaceta de la RSME, vol. 10.2, Pàgs. 407–426 (2007)

[DWI] Roman J. Dwilewicz, Ján Mináč, *Values of the Riemann zeta function at integers.* MATerials MATemàtics, vol. 2009, num. 6, Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (2009)

[SAU] Marcus du Sautoy, *La música de los números primos.* Acantilado (2007)