



Un teorema del tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld

Autora: Alba Álvarez Rodríguez
Tutor: Francesc Bars Cortina

Treball Final de Grau
Departament de Matemàtiques
Facultat de Ciències

5 de juliol de 2025

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Francesc, per ajudar-me constantment, tant en la contextualització del tema com en els detalls més petits amb què tenia dubtes, fossin els que fossin, de principi a final de curs. No podria haver après tant ni apreciat bé el contingut del treball sense el seu suport. Tot i que encara em queden anys de matemàtiques per entendre a fons tots els conceptes treballats, ja sóc plenament conscient de la importància de la seva ajuda, i l'agraeixo molt.

Índex

0	Introducció	1
1	Preliminars	1
1.1	Valoracions, places i anells de valoració	2
1.2	Cossos de funcions	5
2	Mòduls sobre un domini de Dedekind	9
3	Els mòduls de Drinfeld	14
4	Les funcions d'altura associades a un mòdul de Drinfeld	17
4.1	La funció canònica local	17
4.2	Altures locals i globals	23
5	Un teorema del tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld	26
5.1	El teorema principal	26
5.2	Altres teoremes d'estructura de mòduls	28
6	Comparació amb l'estructura multiplicativa d'un cos de nombres	35
A	Dominis de Dedekind	37
B	Una prova de finitud de generació	38
	Bibliografia	40

Notació i terminologia

- Donat un conjunt A , denotem per $\#(A)$ la cardinalitat d' A .
- Donat B un subanell d'un anell R , denotem per $\bar{x}$ la classe d'un element $x \in R$ a R/B .
- Donat un anell A i un element $a \in A$, A/a denota el quocient d' A per l'ideal d' A generat per a .
- Donat un cos K , denotem la seva clausura algebraica per K^{alg} .
- Donat un anell R , denotem per R^* o bé el conjunt format pels elements amb invers multiplicatiu de R o bé el grup d'unitats de R amb l'operació de producte induïda pel R , segons el context.
- L'element 0 pot denotar o bé l'element neutre per la suma d'un anell considerat o bé un conjunt $\{0\}$, amb estructura segons el contexte. Donat un anell, l'element 1 denota l'element neutre pel producte.
- Si no s'explicita res, n i m denoten nombres naturals.
- Si no s'explicita res, ens referim per *morfismes* a morfismes de mòduls amb l'estructura de mòdul corresponent a cada cas.
- Denotem per $\mathbb{F}_q$ un cos arbitrari de q elements, on q és la potència positiva d'un nombre primer. A partir de la secció preliminar [1](#), t denota sempre un element transcendent sobre $\mathbb{F}_q$.

0 Introducció

Donada una varietat abeliana A sobre un cos de nombres algebraics K , el teorema de Mordell-Weil afirma que el grup $A(K)$ de punts K -racional de A és un grup abelià finitament generat, i per tant isomorf a la suma directa del seu grup de torsió i un grup abelià lliure $\mathbb{Z}^r$ de rang finit r . Aquest treball es centra en explicar un estudi anàleg per a mòduls de Drinfeld presentat per Bjorn Poonen al seu article de 1995 *Local height functions and the Mordell-Weil theorem for Drinfeld modules* [Poo95], on hi ha una diferència remarcable respecte el resultat de Mordell-Weil: el grup lliure de l'estructura de mòdul induïda per un mòdul de Drinfeld no és finitament generat.

En efecte, si considerem K un cos de funcions global, una plaça v_∞ no trivial de K , A l'anell d'elements de K que són enters fora de v_∞ , L una extensió finita de K , i ϕ un A -mòdul de Drinfeld sobre L , podem donar-li a L una estructura d' A -mòdul via l'acció determinada per ϕ . El teorema principal, anàleg al resultat de Mordell-Weil, dona una descripció d'aquest A -mòdul, que denotem per $\phi(L)$, com a suma directa d'un mòdul de torsió finit i un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$. Per demostrar aquest teorema, Poonen fa servir una funció d'altura global per veure que l' A -mòdul $\phi(L)$ és moderat, prova que $\phi(L)$ té rang $\aleph_0$ mitjançant un lema que permet trobar un anell de S -enters $\mathcal{O}_S$ sobre què el mòdul de Drinfeld ϕ està definit, i aplica una proposició clau que afirma que tot A -mòdul moderat de rang $\aleph_0$ és isomorf a la suma directa del seu submòdul de torsió i un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$, per a tot domini de Dedekind A . A més, Poonen defineix una funció d'altura local per demostrar teoremes d'estructura anàlegs per a $\mathcal{O}_S$, per al quocient $L/\mathcal{O}_S$, i per a extensions de L , entre les quals es consideren la clausura algebraica, l'extensió separable i la perfecció.

L'objectiu principal del treball és entendre aquests teoremes a partir de les demostracions de Poonen. Per això, a la secció preliminar 1 es fa una breu introducció a la teoria de valoracions, amb èmfasi en propietats de cossos de funcions globals. A la secció 2 es demostren alguns resultats importants pels teoremes principals de [Poo95] que tenen a veure amb mòduls sobre dominis de Dedekind arbitraris, entre els quals està la proposició clau esmentada. A la secció 3 es fixa el marc dels mòduls de Drinfeld en què treballem fins la darrera secció. La secció 4 tracta de funcions d'altura, tant les definides per Poonen com la seva relació amb les de Denis [Den92]. El teorema principal del tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld, així com teoremes anàlegs, es demostra a la secció 5.

Finalment, a la secció 6, comparem l'estructura d' A -mòdul de Drinfeld trobada i l'estructura multiplicativa d'un cos de nombres. Notem que, amb aquest treball [Poo95], Poonen va demostrar en particular que un anàleg de les unitats de Dirichlet per a mòduls de Drinfeld, $\phi(\mathcal{O}_S)$, no és finitament generat; tot i així, a 2010, Taelman ([Tae10]) va trobar un anàleg al teorema de les unitats de Dirichlet per a mòduls de Drinfeld.

1 Preliminars

Veurem a la secció 3 que un mòdul de Drinfeld es defineix a partir un cos de funcions, i, a la secció 6, que l'estructura de mòdul que indueix sobre submòduls de la seva imatge té certes analogies amb l'estructura de grup multiplicatiu d'un cos de nombres (com a

$\mathbb{Z}$ -mòdul). En aquest apartat preliminar expliquem la relació fonamental entre places i anells de valoració de cossos i presentem resultats importants en el cas particular dels cossos de funcions globals. Per això, definim tots aquests conceptes, i ens basem principalment en el capítol 1 de [Sti09] i el capítol 9 de [Jac89]. Els capítols 6, 8, 9 i 10 de [Lor91] també són una bona referència per entendre la relació entre valoracions discretes de cossos i factoritzacions en ideals maximals, així com la formulació dels cossos de funcions com a corbes completes no singulars. Per als comentaris finals sobre dominis de Dedekind, tenim en compte també el capítol 6 de [Keu99], a més de coneixements sobre anells de Dedekind (capítols 10 de [Jac89], 5 de [ZS58]); en recollim les definicions i relacions bàsiques a l'apèndix A.

1.1 Valoracions, places i anells de valoració

Definició 1.1. Sigui L i $(\Gamma, +, \geq)$ un grup abelià totalment ordenat. Estenem l'ordenació i l'operació de grup en Γ al conjunt $\Gamma \cup \{\infty\}$ per les regles següents:

- (1) $\infty \geq a \quad \forall a \in \Gamma$
- (2) $\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty \quad \forall a \in \Gamma$

Una **valoració** de L és una funció $v : L \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ amb les següents propietats:

- (i) $v(x) = \infty$ si i només si $x = 0$.
- (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$ per a tot $x, y \in L$.
- (iii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ per a tot $x, y \in L$.

Es diu que una valoració v de L és **trivial** si $v(L^*) = 0$. Si k és un subcòs de L , es diu que una valoració v de L és **trivial en k** si $v(k^*) = 0$. El grup $(\Gamma, +)$ s'anomena el **grup de valors** de v . Si $\Gamma = \mathbb{Z}$, es diu que la valoració és **discreta**.

Notem que la propietat (ii) de la definició 1.1 equival a dir que una valoració v d'un cos L indueix un morfisme de grups entre L^* amb l'operació producte i el grup de valors $(\Gamma, +)$. En particular, tenim $v(1) = 0$, i per tant $v(-1) = 0$ i $v(x) = v(-x)$ per a tot $x \in L$. Així, la propietat (iii), coneguda també com a **desigualtat triangular forta**, es pot reescriure com $v(x \pm y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ per a tots $x, y \in L$, i n'obtenim el següent lema:

Lema 1.1. *Sigui v una valoració d'un cos L . Aleshores, si $x, y \in L$ són tals que $v(x) \neq v(y)$, es compleix $v(x \pm y) = \min\{v(x), v(y)\}$.*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $v(x) < v(y)$, i apliquem la propietat (ii) de la definició 1.1 de valoració dues vegades:

$$v(x) = v((x \pm y) \mp y) \geq \min\{v(x \pm y), v(y)\} \geq \min\{\min\{v(x), v(y)\}, v(y)\} = v(x)$$

Així, tot són igualtats, i obtenim $v(x \pm y) = v(x) = \min\{v(x), v(y)\}$, com volíem. $\square$

Corol·lari 1.1. *Sigui v una valoració d'un cos L i siguin $x_1, \dots, x_n \in L$ tals que existeix $i \in \{1, \dots, n\}$ de manera que $v(x_i) < v(x_j)$ per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$. Aleshores $v(x_1 + \dots + x_n) = v(x_i)$.*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $i = 1$, i fem la demostració per inducció. Com que, per hipòtesi de l'enunciat, es compleix $v(x_1) < v(x_2)$, obtenim $v(x_1 + x_2) = \min\{v(x_1), v(x_2)\} = v(x_1)$ pel lema 1.1. Suposem ara que es compleix la hipòtesi d'inducció fins a un cert $k \in \{2, \dots, n-1\}$. Això vol dir que $v(x_1 + \dots + x_k) = v(x_1) < v(x_{k+1})$, i per tant, pel lema 1.1,

$$v(x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}) = \min\{v(x_1 + \dots + x_k), v(x_{k+1})\} = v(x_1)$$

Així, per inducció, concloem que $v(x_1 + \dots + x_n) = v(x_i)$, com volíem. $\square$

La següent definició ens dona una relació d'equivalència sobre el conjunt de valoracions d'un cos L :

Definició 1.2. Siguin $v_1 : L \rightarrow \Gamma_1 \cup \{0\}$ i $v_2 : L \rightarrow \Gamma_2 \cup \{0\}$ dues valoracions d'un cos L , on Γ_1 i Γ_2 són dos grups abelians totalment ordenats. Es diu que v_1 i v_2 són **equivalents** si i només si existeix un isomorfisme de grups $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ que preserva l'ordre tal que $v_2(x) = \varphi(v_1(x))$ per a tot $x \in L^*$.

En particular, si les valoracions v_1 i v_2 són discretes, aleshores són equivalents si i només si existeix un enter positiu s tal que $v_2(x) = sv_1(x) = v_1(sx)$ per a tot $x \in L^*$.

Notem que la relació d'equivalència de la definició 1.2 permet prendre com a representant de cada classe $\mathfrak{p}$ de valoracions d'un cos L l'única valoració $v_{\mathfrak{p}}$ de la classe $\mathfrak{p}$ tal que existeix $\pi \in L^*$ complint $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$; és a dir, l'única valoració exhaustiva de la classe. Això motiva la següent definició:

Definició 1.3. Sigui L un cos. Una **placa** de L és una valoració exhaustiva de L . Denotem per $\mathcal{V}(L)$ el conjunt places de L .

Així, el conjunt $\mathcal{V}(L)$ és un conjunt de representants de les classes d'equivalència de valoracions d'un cos L , amb la relació d'equivalència donada per la definició 1.2.

Definim ara un altre concepte relacionat amb les places:

Definició 1.4. Siguin L un cos i $\mathcal{O}$ un subanell de L . Es diu que $\mathcal{O}$ és un **anell de valoració** de L si tot element no nul de L està contingut a $\mathcal{O}$ o és invers d'un element d' $\mathcal{O}$.

Observació 1.1. Donat un anell de valoració $\mathcal{O}$ d'un cos L , els elements $x \in L^*$ tals que $x \in \mathcal{O}$ i $x^{-1} \in \mathcal{O}$ formen un grup $\mathcal{O}^*$ (amb l'operació producte induïda de L^*), anomenat el **grup d'unitats** d' $\mathcal{O}$. En efecte, el cos de fraccions de l'anell $\mathcal{O}$ és L .

Veiem que tot anell de valoració és local:

Lema 1.2. *Sigui $\mathcal{O}$ un anell de valoració d'un cos L . Aleshores $\mathfrak{m} := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$ és el seu únic ideal maximal.*

Demostració. Comprovem primer que $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$ és un ideal d' $\mathcal{O}$. Fixem $x \in \mathfrak{m}$ i $y \in \mathcal{O}$. Si $xy \in \mathcal{O}^*$, aleshores $y^{-1}x^{-1} \in \mathcal{O}$, i per tant $x^{-1} = y(y^{-1}x^{-1}) \in \mathcal{O}$, la qual cosa és una contradicció amb què $x \in \mathfrak{m}$. Per tant, s'ha de complir que $xy \in \mathfrak{m}$. Considerem ara que $x, y \in \mathfrak{m}$, i volem veure que la seva suma també pertany a $\mathfrak{m}$. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $y^{-1}x \in \mathcal{O}$ (si no, tenim $x^{-1}y \in \mathcal{O}$). Aleshores, com que $\mathcal{O}$ és un anell, tenim $y^{-1}x + 1 \in \mathcal{O}$ i doncs $x + y = y(y^{-1}x + 1) \in \mathfrak{m}$, ja que hem vist que $\mathfrak{m}$ és absorbent pel producte. Finalment, si I és un ideal propi d' $\mathcal{O}$, aleshores I no pot contenir unitats, i per tant està contingut a $\mathfrak{m}$. Així, $\mathfrak{m}$ és l'únic ideal maximal d' $\mathcal{O}$. $\square$

Fixem la notació $\mathfrak{m}$ per a l'ideal maximal d'un anell de valoració $\mathcal{O}$, donat un cos L . Veiem ara que a tota valoració, i de fet a tota plaça, li correspon un anell de valoració:

Definició 1.5. Sigui v una valoració d'un cos L . L'anell de valoració associat a v és l'anell $\mathcal{O}_v := \{x \in L \mid v(x) \geq 0\}$.

Remarquem que un anell de valoració associat a una valoració v d'un cos L és efectivament un anell de valoració segons la definició 1.4. En efecte, per les propietats 1.1 de les valoracions, tenim $v(0) = \infty \geq 0$ i, per a tot $x \in L^*$, es compleix

$$0 = v(1) = v(xx^{-1}) = v(x) + v(x^{-1})$$

de manera que, o bé $v(x) \geq 0$, o bé $v(x) \leq 0$.

Així, els elements del grup d'unitats $\mathcal{O}_v^*$ associat són precisament els elements $x \in L$ amb $v(x) = 0$, de manera que l'ideal maximal associat és $\mathfrak{m}_v := \{x \in L \mid v(x) > 0\}$.

Observació 1.2. Si v_1 i v_2 són dues valoracions equivalents d'un cos L . Aleshores $\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$. En efecte, com que v_1 i v_2 són equivalents segons la definició 1.2, existeix un isomorfisme φ entre els seus grups de valors respectius que preserva l'ordre i compleix $\varphi(v_1(x)) = v_2(x)$ per a tot $x \in L$, de manera que

$$x \in \mathcal{O}_{v_1} \iff v_1(x) \geq 0 \iff v_2(x) = \varphi(v_1(x)) \geq \varphi(0) = 0 \iff x \in \mathcal{O}_{v_2}$$

De fet, tenim que la correspondència entre places i anells de valoració d'un cos és bijectiva:

Proposició 1.1. Sigui L un cos. Aleshores el conjunt de places de L està en bijecció amb el conjunt d'anells de valoració de L .

Demostració. Ja hem vist que tota valoració té un anell de valoració associat (definició 1.5), i que dues valoracions equivalents defineixen el mateix anell de valoració (observació 1.2), de manera que a tota plaça de L li correspon un únic anell de valoració de L .

Recíprocament, donat un anell de valoració $\mathcal{O}$ de L , podem considerar $\Gamma := L^*/\mathcal{O}^*$ amb l'operació producte (commutativa) $\cdot$ induïda pel producte de L i la relació d'ordre total donada per $\bar{x} \geq \bar{y}$ si i només si $xy^{-1} \in \mathcal{O}^*$, per a elements $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma$ arbitraris amb representants $x, y \in L^*$. Aquesta relació d'ordre està ben definida perquè dos representants de la mateixa classe a Γ només difereixen en una unitat (element d' $\mathcal{O}^*$).

Comprovem doncs que l'aplicació $v : L \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ determinada per enviar cada element de L^* a la seva classe en Γ indueix (imposant $v(0) := \infty$) una valoració ben definida de L que a més compleix $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}$. Fixem doncs $x, y \in L^*$. Tenim

$$v(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y} = v(x) \cdot v(y)$$

(ja que l'operació $\cdot$ al grup abelià $(\Gamma, \cdot)$ construït és el producte induït per L).

Suposem ara, sense pèrdua de generalitat, que $\bar{x} \geq \bar{y}$. Aleshores tenim $xy^{-1} \in \mathcal{O}^*$ i per tant $(x+y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in \mathcal{O}^*$. És a dir, obtenim $\overline{x+y} \geq \bar{y}$, i per tant

$$v(x+y) = \overline{x+y} \geq \bar{y} = \min\{\bar{x}, \bar{y}\} = \min\{v(x), v(y)\}$$

Notem ara que aquestes relacions també es mantenen si algun dels elements x o y és 0; en efecte, és comú definir les valoracions sobre les unitats L^* d'un cos L i després estendre el domini simplement imposant $v(0) := \infty$, com a [Lor91, capítol 5, secció 6]. Així, v és una valoració ben definida; en particular, com que és exhaustiva per construcció, v és una plaça (segons la definició 1.3).

Observem finalment que $x \in \mathcal{O}_v$ si i només si $\bar{x} = v(x) \geq \bar{1}$ (on $\bar{1}$ denota l'element neutre del grup abelià $(\Gamma, \cdot)$); és a dir, si i només si $x = x1^{-1} \in \mathcal{O}$. Per tant, $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}$, com volíem. $\square$

Observació 1.3. Un ideal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anell de valoració $\mathcal{O}$ d'un cos L determina completament l'anell $\mathcal{O}$ per l'igualtat $\mathcal{O} = \{x \in L \mid x^{-1} \notin \mathfrak{m}\}$. Així, tenim com a corollari del lema 1.1 que hi ha una bijecció entre les places v d'un cos L i els ideals maximals $\mathfrak{m}_v$ d'anells de valoració $\mathcal{O}_v$ de L .

Així, la següent definició té sentit:

Definició 1.6. Sigui L un cos. Un **anell de valoració discreta** de L és un anell de valoració $\mathcal{O}$ de L tal que la seva plaça v associada és discreta.

Aquesta definició 1.6, juntament amb la demostració del lema 1.1, ens permet fer la següent observació:

Observació 1.4. Un anell de valoració discreta $\mathcal{O}$ d'un cos L és un domini d'ideals principals. Més explícitament, existeix un element $\pi \in \mathfrak{m} := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$, anomenat **paràmetre uniformitzador** de $\mathfrak{m}$, tal que $\mathfrak{m} = \pi\mathcal{O}$, i els ideals I d' $\mathcal{O}$ són de la forma $I = \pi^n\mathcal{O}$ amb $n \in \mathbb{N}$. En efecte, si v és la plaça associada a $\mathcal{O}$, remarcuem que π és un paràmetre uniformitzador de $\mathfrak{m}$ si i només si $v(\pi) = 1$, que tots els paràmetres uniformitzadors pertanyen a la mateixa classe de $L^*/\mathcal{O}^*$, i que tot element $x \in L^*$ té una única representació de la forma $x = \pi^n u$ per a un cert enter n (el valor $v(x) = n$) i una unitat $u \in \mathcal{O}^*$.

1.2 Cossos de funcions

Ens centrarem ara en les places d'un tipus particular de cossos. Per això, donem les següents definicions:

Definició 1.7. Sigui k un cos i L una extensió de k . Es diu que k és **algebraicament tancat en L** si $L \cap k^{\text{alg}} = k$.

Definició 1.8. Sigui k un cos i t un element transcendent sobre k . Un **cos de funcions d'una variable sobre k** és una extensió finita L de $k(t)$ en què k és algebraicament tancat. Diem que k és el **cos de constants** del cos de funcions L .

Observació 1.5. Sigui k un cos arbitrari i L un cos de funcions d'una variable sobre k . Si el cos de constants k és un cos finit $\mathbb{F}_q$ de característica $q > 1$, tota plaça v de L és trivial sobre $\mathbb{F}_q$, ja que es compleix

$$(q-1)v(u) = v(u^{q-1}) = v(1) = 0$$

per a tot $u \in \mathbb{F}_q^*$. Ara bé, si k no és un cos finit, no és compleix necessàriament que $v(k^*) = 0$ per a tota plaça v de L ; així, en el context dels cossos de funcions d'una variable (que es relacionen amb corbes completes no singulars) es solen considerar només les places tals que les valoracions exhaustives associades són trivials sobre el cos de constants k , i els anells de valoració considerats són doncs els que contenen estrictament k . Denotem el **conjunt de places de L trivials sobre k** per $\mathcal{V}(L/k)$.

Fixem ara k un cos, t un element transcendent sobre k , i veiem que podem caracteritzar les places de $k(t)$ trivials en k fent servir que, donat un polinomi irreducible mònic $p \in k[t]$, tot element x de $(k(t))^*$ es pot escriure de forma única com $x = p^n f/g$ per a un cert enter n i certs $f, g \in k[t]$ coprimers tals que p no divideix f ni g com a elements de $k[t]$. Amb aquesta notació, obtenim que la **valoració p -àdica** $v_p^t : k(t) \rightarrow k \cup \{\infty\}$ determinada per $v_p^t(x) := n$ es correspon al següent anell de valoració

$$\mathcal{O}_p^t = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[t], p \nmid g \right\}$$

amb ideal maximal

$$\mathfrak{m}_p^t = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[t], p \mid f, p \nmid g \right\}$$

Ara bé, a més de les places p -àdiques, hi ha una altra valoració exhaustiva v_∞^t de $k(t)$, determinada per $v_\infty^t(f/g) = \deg_t(g) - \deg_t(f)$ per a tots $f, g \in k[t]$ amb $g \neq 0$, on $\deg_t$ és el grau de polinomis de $k[t]$ respecte la variable t , amb la convenció que $\deg_t(0) = -\infty$. L'anell de valoració de $k(t)$ associat a v_∞^t és doncs

$$\mathcal{O}_\infty^t = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[t], \deg_t(f) \leq \deg_t(g) \right\}$$

amb ideal maximal

$$\mathfrak{m}_\infty^t = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[t], \deg_t(f) < \deg_t(g) \right\}$$

A la plaça v_∞^t se li diu **plaça de l'infinit de $k(t)$** ; usualment no s'escriu el superíndex t quan està clar pel context, però remarquem que les places de l'infinit són diferents respecte generadors diferents. Per exemple, la plaça de l'infinit $v_\infty^{1/t}$ respecte l'element

generador $1/t$, vist com a polinomi irreductible de $k[1/t]$, coincideix amb la plaça v_p^t respecte el polinomi irreductible $p := t \in k[t]$. En efecte, un element $h \in \mathfrak{m}_\infty^{1/t}$ és de la forma $h = f/g$, amb $f, g \in k[1/t]$ tals que $n := \deg_{1/t}(f) < \deg_{1/t}(g) =: m$. Per construcció, els termes independents dels polinomis $t^n f, t^m g \in k[t]$ són no nuls. Per tant, el polinomi $t \in k[t]$ no divideix $t^m g$, però sí divideix $t^m f = t^{m-n}(t^n f)$. És a dir, l'element $h = f/g = (t^m f)/(t^m g)$ pertany a l'ideal $\mathfrak{m}_p^t$ corresponent al polinomi irreductible $p = t \in k[t]$. Així, fixar una plaça de l'infinít equival a fixar un generador de $k(t)$.

Per caracteritzar les places d'una extensió finita L de $k(t)$, considerem el resultat següent, la demostració del qual es troba a [Lor91, capítol 5, corollari 10.10]:

Teorema 1.1. *Siguin k un cos, t un element transcendent sobre k , i L una extensió finita de $k(t)$. Si B i B' són les clausures enteres de $k[t]$ i $k[1/t]$ en L , respectivament, i l'ideal $(1/t)B'$ de B' té descomposició en ideals maximals $(1/t)B' = \prod_{i=1}^n \mathfrak{B}_i^{e_i}$, aleshores les valoracions exhaustives de L trivials en k són*

$$\mathcal{V}(L/k) = \{v_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \text{ és un ideal maximal de } B\} \sqcup \{v_{\mathfrak{B}_1}, \dots, v_{\mathfrak{B}_n}\}$$

on, per a cada ideal maximal $\mathfrak{m}$, $v_{\mathfrak{m}}$ denota la plaça associada a l'anell de valoració amb ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Així, els ideals $\{\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n\}$ del teorema 1.1 són els que estenen la plaça de l'infinít v_∞^t de $k(t)$, mentre que els ideals de B estenen les valoracions p -àdiques definides a $k(t)$, amb t com a element generador. Remarquem que totes les valoracions d'un cos de funcions d'una variable sobre són discretes.

Fem ara les següents observacions, definint també conceptes que tindrem en compte a les següents seccions:

Observació 1.6. Sigui L un cos de funcions sobre un cos k i sigui v una plaça de L trivial sobre k . Com que $k \cap \mathfrak{m}_v = \{0\}$, on $\mathfrak{m}_v$ és l'ideal maximal associat a v , podem considerar k com a subcòs del **cos residual** $\ell_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$. Així, es defineix el **grau** de la plaça v (o del seu cos residual ℓ_v) com $d(v) := [\ell_v : k]$, i es demostra que és finit ([Sti09, proposició 1.1.15]). Si $d(v) = 1$, es diu que v és una **plaça racional**. Es defineix l'**aplicació residual respecte** v com l'aplicació de L a $\ell_v \cup \{\infty\}$ determinada per enviar un element $x \in L$ a $x(v)$, on $x(v)$ denota la classe de x a ℓ_v si $x \in \mathcal{O}_v$, i $x(v) := \infty$ si $x \in L \setminus \mathcal{O}_v$. En efecte, si $x \in \mathfrak{m}_v$ (és a dir, $v(x) > 0$), es diu que v és un **zero** de x , i si $x \in L \setminus \mathcal{O}_v$ (és a dir, $v(x) < 0$), es diu que v és un **pol** de x . Si v és un zero o pol de x , el seu **ordre** es defineix com l'enter $v(x)$ o $-v(x)$, respectivament. Així, podem identificar cada element x del cos de funcions L amb una funció sobre el conjunt de places de L que envia cada plaça v a $x(v)$.

Resumim ara resultats fonamentals sobre l'existència i finitud de zeros i pols de cossos de funcions d'una variable al següent teorema, citant referències per a demostracions:

Teorema 1.2. *Sigui L un cos de funcions d'una variable sobre un cos k . Aleshores tot element no nul de L té un nombre finit de zeros i de pols ([Sti09, proposició 1.3.3]), i es compleix*

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(L/k)} d(v) \cdot v(x) = 0 \tag{1}$$

on $\cdot$ denota el producte usual a $\mathbb{Z}$ ([Sti09, teorema 1.4.11]).

A més, tot element de L transcendent sobre k té almenys un zero i un pol corresponents a places trivials en k ([Sti09, corol·lari 1.1.20]). Per tant, com que k és algebraicament tancat en L , es compleix

$$k^* = \bigcap_{v \in \mathcal{V}(L/k)} \mathcal{O}_v^*$$

Per treballar amb mòduls de Drinfeld, farem servir un cas particular de cossos de funcions:

Definició 1.9. Un **cos de funcions global** és un cos de funcions d'una variable sobre un cos finit $\mathbb{F}_q$.

Observació 1.7. Els cossos de funcions globals tenen característiques en comú amb els **cossos de nombres** (és a dir, les extensions finites del cos dels racionals $\mathbb{Q}$). De fet, tots dos compleixen la definició axiomàtica de **cos global** donada per E. Artin i G. Whaples a [AW45], i avui dia *cos global* fa referència a un d'aquests dos cossos. En efecte, un cos de funcions global L sobre un cos finit $\mathbb{F}_q$ compleix la fórmula (1) del teorema 1.2, coneguda com a **fórmula del producte** (axioma 1 de [AW45]) i a més té un conjunt de places no buit tal que tota plaça v de L és discreta amb cos residual ℓ_v finit (axioma 2 de [AW45]), ja que, amb la notació fixada a l'observació 1.6, tenim $\#(\ell_v) = q^{d(v)}$.

Remarquem que en el context dels cossos de nombres es solen definir les *places* com a unes classes d'equivalència de valors absoluts (com a [AW45]), que no estan en bijecció amb les classes d'equivalència que de la definició 1.2, perquè existeixen valors absoluts arquimedians (veure [Jac89, capítol 9]). Nosaltres farem servir la definició 1.3 de *plaça* d'un cos com a valoració exhaustiva pel context de cossos de funcions en què estem, i per consistència amb [Poo95].

Notem que, per a cada valoració v d'un cos L , donat un real $e > 1$, podem definir un valor absolut $|\cdot|_{v,e} : L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ per $|\alpha|_{v,e} = e^{-v(\alpha)}$ per a tot $\alpha \in L$ (amb la convenció que $e^{-\infty} = 0$). Fixem un cert valor absolut per a cada plaça d'un cos de funcions global segons la següent definició:

Definició 1.10. Sigui L un cos de funcions global amb cos de constants $\mathbb{F}_q$ i v una plaça de L amb cos residual ℓ_v associat, de cardinalitat $\#(\ell_v) = q^{d(v)}$. El **valor absolut normalitzat** associat a v és el valor absolut $|\cdot|_v$ de L determinat per $|\alpha|_v = \#(\ell_v)^{-v(\alpha)} = q^{-d(v)v(\alpha)}$ per a tot $\alpha \in L$.

A la secció 3, considerem un cos de funcions global K amb cos de constants $\mathbb{F}_q$, fixem una plaça v_∞ no trivial de K , i definim l'anell

$$A := \bigcap_{v \in \mathcal{V}(K) \setminus \{v_\infty\}} \mathcal{O}_v \tag{2}$$

Observació 1.8. En el cas particular de $K = \mathbb{F}_q(t)$, si fixem l'element transcendent t com a generador de $\mathbb{F}_q(t)$ i la plaça de l'infinit v_∞^t de $\mathbb{F}_q(t)$ associada, que és una

plaça racional, llavors l'anell (2) és $A = \mathbb{F}_q[t]$. Així, per a tot polinomi $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ es té $v_\infty^t(a) = -\deg_t(a)$, i doncs, com que $d(v_\infty) = 1$ (amb la notació de l'observació 1.6), tenim $|a|_{v_\infty} = q^{\deg_t(a)} = \#(A/a)$. Es pot comprovar que la igualtat $|a|_{v_\infty} = \#(A/a)$ també és certa per a una plaça v_∞ no trivial qualsevol d'un cos de funcions global K arbitrari i $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ qualsevol (on A ve definit per (2)) considerant el grau de divisors ([Sti09, capítol 1, secció 1.4]).

Notem ara que, com que un anell de valoració discreta és en particular un domini d'ideals principals, és també un domini de Dedekind, i doncs íntegrament tancat; així, també es diu que els elements de l'anell (2) són els *enters a totes les places fora de l'infinit*. De fet, aquest anell A és un cas particular del següent tipus d'anell:

Definició 1.11. Sigui L un cos i S un conjunt finit de places de L . L'anell de *S-enters* de L és l'anell

$$\mathcal{O}_S := \{x \in L \mid v(x) \geq 0, \forall v \in \mathcal{V}(L) \setminus S\}$$

(Si L és un cos de funcions amb cos de constants k , es considerem només les places de L trivials en k ; és a dir, $\mathcal{V}(L/k)$ en comptes de $\mathcal{V}(L)$.)

Observació 1.9. Sigui L un cos de funcions amb cos de constants k i S un conjunt finit de places de L trivials en k , amb anell de *S-enters* associat $\mathcal{O}_S$. Si S és el conjunt buit, aleshores $\mathcal{O}_S = k^*$, pel teorema 1.2. Si S no és el conjunt buit, els ideals maximals d' $\mathcal{O}_S$ són de la forma $\mathfrak{M}_v := \mathfrak{m}_v \cap \mathcal{O}_S$ per a v una plaça de L fora de S amb ideal maximal $\mathfrak{m}_v$ associat (veure observació 1.3). Així, la localització de l'anell de *S-enters* $\mathcal{O}_S$ a cada ideal maximal $\mathfrak{M}_v$ s'identifica amb l'anell de valoració $\mathcal{O}_v$ de la plaça associada.

Per a l'observació 1.9 anterior hem tingut en compte també el següent teorema, la demostració del qual es pot trobar a [Ros02, capítol 14, teorema 14.5]:

Teorema 1.3. *Sigui L un cos de funcions amb cos de constants k i sigui S un conjunt finit no buit de places de L trivials en k . Aleshores l'anell de *S-enters* és un domini de Dedekind.*

El fet que l'anell (2) que definirem com a domini d'un mòdul de Drinfeld sigui de Dedekind serà crucial per a la demostració del teorema principal del tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld, com es mostra a la secció 2 següent.

2 Mòduls sobre un domini de Dedekind

En aquesta secció demostrem alguns resultats per a mòduls sobre un domini de Dedekind arbitrari; principalment, el lema 2.3 i la proposició 2.1, sobre els quals es basa la demostració del teorema principal 5.1 del tipus Mordell-Weil.

Donem primer algunes definicions bàsiques:

Definició 2.1. Siguin A un domini d'integritat i M un A -mòdul, amb producte escalar $\cdot : A \times M \rightarrow M$. Diem que

- el **rang** de M és la dimensió del K -espai vectorial $M \otimes_A K$.
- M és **moderat** si tot submòdul de rang finit és finitament generat com a A -mòdul.
- M és **lliure** si té una **base**; és a dir, si té un conjunt generador $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ que és linealment independent sobre A (si $a_1, \dots, a_n$ són elements d' A tals que $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n = 0$, aleshores $a_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$).
- el **submòdul de torsió** de M és el conjunt

$$M_{\text{tors}} = \{x \in M : a \cdot x = 0 \text{ per algun } a \in A \text{ no nul}\}$$

- M és **lliure de torsió** si $M_{\text{tors}} = 0$.
- M és **projectiu** si qualsevol successió exacta curta d' A -mòduls de la forma

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

és una successió exacta curta **escindida**; és a dir, existeix un morfisme d' A -mòduls $f : M \rightarrow B$ tal que $g \circ f = \text{id}_M$ i es compleix

$$B = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f), \quad \text{Ker}(g) \cong N, \quad \text{Im}(f) \cong M$$

Observem que, sobre un domini d'integritat, tot mòdul noetherià (veure apèndix A) és en particular un mòdul moderat segons la definició 2.1, però el recíproc no és cert; en efecte, els mòduls amb estructura donada per un mòdul de Drinfeld que caracteritzem al llarg del treball són moderats però no noetherians.

Notem també que tot mòdul lliure és projectiu, i que tot mòdul projectiu és lliure de torsió. Les assercions recíproques no són certes en general. Per exemple, el cos de fraccions K d'un domini de Dedekind A , vist com a A -mòdul, és lliure de torsió, però no és projectiu, perquè un A -mòdul projectiu és suma directa de mòduls projectius de rang 1 (és a dir, d'ideals invertibles) i K no és finitament generat. Per a mòduls finitament generats, però, tenim la següent caracterització important:

Lema 2.1. *Sobre un domini de Dedekind, un mòdul finitament generat és lliure de torsió si i només si és projectiu.*

Una referència per a la prova del lema 2.1 és [DF04, capítol 16, secció 3, teorema 22], o més generalment [Kap52, teorema 1]. De fet, un resultat més elemental que tindrem en compte és el següent ([DF04, capítol 16, secció 3, proposició 21]):

Lema 2.2. *Siguin $I_1, I_2, \dots, I_n$ i $J_1, J_2, \dots, J_m$ ideals fraccionaris no nuls d'un domini de Dedekind A amb cos de fraccions K . Aleshores es té el següent isomorfisme com a A -mòduls*

$$I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \cong J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_m$$

si i només si $n = m$ i existeix $a \in K \setminus \{0\}$ tal que

$$I_1 \cdot I_2 \cdots I_n = (a) \cdot J_1 \cdot J_2 \cdots J_n$$

(és a dir, els productes d'ideals $I_1 \cdot I_2 \cdots I_n$ i $J_1 \cdot J_2 \cdots J_n$ només difereixen en un ideal principal, i per tant pertanyen a la mateixa classe del grup de classes d'ideals del domini de Dedekind A).

Saben tot això, considerem un lema clau per al lema 5.1 de la secció 5:

Lema 2.3. *Siguin A un domini de Dedekind, K el seu cos de fraccions, i M un A -mòdul de rang finit tal que el submòdul de torsió M_{tors} és un A -mòdul finitament generat. Aleshores, per a tot ideal $I \subseteq A$ diferent de zero, M/IM és un A -mòdul finitament generat. En particular, si a és un element d' A no nul i A/a és finit, aleshores l' A/a -mòdul finitament generat M/aM ha de ser finit.*

Demostració. Considerem $\varphi : M \rightarrow M \otimes_A K$ el morfisme natural determinat per $\varphi(m) = m \otimes_A 1$ per a tot $m \in M$. Tenim doncs una successió exacta

$$0 \rightarrow M_{\text{tors}} \rightarrow M \rightarrow \varphi(M) \rightarrow 0$$

Si tensem amb A/I obtenim una altra successió exacta

$$M_{\text{tors}}/IM_{\text{tors}} \rightarrow M/IM \rightarrow \varphi(M)/I\varphi(M) \rightarrow 0$$

Per hipòtesi, M_{tors} és un A -mòdul finitament generat, i per tant $M_{\text{tors}}/IM_{\text{tors}}$ també ho és. Així, demostrar que M/IM sigui finitament generat és equivalent a demostrar que $\varphi(M)/I\varphi(M)$ sigui finitament generat. A partir d'aquí identifiquem M amb el K -espai vectorial $\varphi(M)$, i doncs amb un A -submòdul de K^r , on r és el rang de M .

Observem a més que, donats dos ideals $I, J \subseteq A$ diferents de zero, si el resultat és cert per a tot M (és a dir, si M/IM i M/JM són A -mòduls finitament generats per a tot A -mòdul M de rang finit amb M_{tors} un A -mòdul finitament generat), aleshores per a tot A -submòdul $M \subseteq K^r$, els A -mòduls M/JM i $JM/I(JM)$ són finitament generats. Per tant, l' A -mòdul M/IJM també és finitament generat, gràcies al tercer teorema de l'isomorfisme:

$$(M/IJM)/(JM/IJM) \cong M/JM$$

Així, tenim prou amb demostrar el cas en què I és un ideal primer arbitrari $\mathfrak{p}$ d' A diferent de zero. En efecte, com que A és un domini de Dedekind, tot ideal I d' A és producte finit d'ideals primers, i per tant, iterant l'argument anterior per inducció, obtindrem que M/IM serà un A -mòdul finitament generat per a I un ideal d' A qualsevol.

Demostrem de fet que $\dim_{A/\mathfrak{p}} M/\mathfrak{p}M \leq r$. És a dir, que si $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq M$ és un conjunt K -linealment dependent, aleshores les classes a $M/\mathfrak{p}M$ dels elements $m_1, \dots, m_n$ també formen un conjunt $A/\mathfrak{p}$ -linealment dependent.

Fixem doncs $m_1, \dots, m_n \in M$ arbitraris i i coeficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ no tots nuls tals que $\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n = 0$. A partir d'aquesta combinació lineal, volem trobar una altra combinació lineal nul·la per a les imatges dels elements $m_1, \dots, m_n$ a $M/\mathfrak{p}M$ amb coeficients no tots nuls.

Considerem $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la plaça associada a l'ideal primer $\mathfrak{p}$. És a dir, $v(\alpha)$ denota l'ordre de l'exponent de $\mathfrak{p}$ en la factorització de l'ideal fraccionari αA , per a

$\alpha \in K$ arbitrari. Si α_i no està a A per algun $i \in \{1, \dots, n\}$, volem evitar que $v(\alpha_i) < 0$, ja que en aquest cas necessitem multiplicar tots els coeficients per un element de $\mathfrak{p}$ perquè almenys el corresponent a m_i pugui estar a A . A més, volem $v(\alpha_i) = 0$ per a almenys un $i \in \{1, \dots, n\}$, per obtenir una combinació lineal on almenys el coeficient corresponent a m_i sigui no nul. És a dir, volem que els nostres coeficients originals de K compleixin $v(\alpha_i) \geq 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ amb igualtat per a almenys un i . Si no és el cas, podem considerar π un paràmetre uniformitzador de $\mathfrak{p}$ i

$$N := \min\{v(\alpha_i) : i \in \{1, \dots, n\}\} \in \mathbb{Z}$$

de manera que

$$v(\pi^{-N}\alpha_i) = -Nv(\pi) + v(\alpha_i) = -N + v(\alpha_i) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

i tenim $v(\pi^{-N}\alpha_j) = 0$ per al j tal que $N = v(\alpha_j)$. Remarquem que el mínim N és diferent d'infinít perquè almenys un dels coeficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ és no nul, per hipòtesi.

Així doncs, hem obtingut uns altres coeficients $\pi^{-N}\alpha_1, \dots, \pi^{-N}\alpha_n \in K$ pertanyent a l'anell de valoració de v . D'aquesta manera, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, podem trobar $b_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $b_i(\pi^{-N}\alpha_i) \in A$. En particular, com que $v(\pi^{-N}\alpha_j) = 0$, tindrem que $b_j(\pi^{-N}\alpha_j) \in A \setminus \mathfrak{p}$. Fixem doncs $b := \prod_{i=1}^n b_i$ i els coeficients $\alpha'_i := b\pi^{-N}\alpha_i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, que, per construcció, pertanyen a A i compleixen

$$\alpha'_1 m_1 + \dots + \alpha'_n m_n = b\pi^{-N}(\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n) = 0 \quad (3)$$

Remarquem que $\alpha'_j \notin A \setminus \mathfrak{p}$, i per tant la seva classe a $A/\mathfrak{p}$ és diferent de zero. Per tant, quan reduïm l'expressió (3) mòdul $\mathfrak{p}$, obtenim una combinació lineal nul·la de les classes a $M/\mathfrak{p}M$ dels elements $m_1, \dots, m_n$ amb coeficients a $A/\mathfrak{p}$ no tots nuls.

Així, hem provat que $M/\mathfrak{p}M$ es pot generar com a màxim amb r elements com a $A/\mathfrak{p}$ -espai vectorial; per tant, $M/\mathfrak{p}M$ es pot generar amb r o menys elements com a A -mòdul, i és doncs un A -mòdul finitament generat, com volíem veure. $\square$

Passem ara a la caracterització dels mòduls moderats de rang $\aleph_0$. Introduïm primer dos lemes que ens serviran per a la proposició clau 2.1:

Lema 2.4. *Siguin A un domini de Dedekind i M un A -mòdul moderat de rang $\aleph_0$ lliure de torsió. Aleshores*

$$M \cong I_1 \oplus I_2 \oplus \dots = \bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$$

on I_i és un A -mòdul projectiu de rang 1 (isomorf a un ideal fraccionari d' A) per a tot natural $i > 0$.

Demostració. Considerem una successió $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K -espais vectorials en K complint

- $V_0 = 0$
- $V_n \subset V_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$
- $\dim V_n = n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = M \otimes_A K$

(en anglès es diu que aquesta successió és una **full flag**).

Per a cada $n \in \mathbb{N}$, considerem un submòdul M_n de M tal que $M_n \otimes_A K = V_n$, de manera que tenim $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = M$. Explícitament, escollim $M_n := M \cap \tilde{V}_n$, on $\tilde{V}_n$ són els elements de l'espai vectorial $V_n \subset M \otimes_A K$ considerats dins M . En particular, com que V_n és un espai de dimensió n , tenim que M_n és diferent de zero si $n > 0$.

Tenim doncs, per a tot natural $i > 0$, una injecció

$$M_i/M_{i-1} \hookrightarrow V_i/V_{i-1} \cong K$$

d'on deduïm que M_i/M_{i-1} és un A -submòdul de rang igual a 1, i, com que M és moderat, això implica que M_i/M_{i-1} és finitament generat com a A -mòdul. Per tant, com que A és un domini de Dedekind, pel lema 2.1 tenim que M_i/M_{i-1} és projectiu. Així, obtenim que la següent successió exacta curta és escindida:

$$0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow M_i/M_{i-1} \rightarrow 0$$

(on podem considerar els morfismes del mig com la inclusió i projecció canòniques) de manera que existeix un morfisme d' A -mòduls $f : M_i/M_{i-1} \rightarrow M_i$ tal que

$$M_i \cong M_{i-1} \oplus I_i$$

on $I_i := f(M_i/M_{i-1})$ és un submòdul de M_i isomorf a M_i/M_{i-1} i per tant un A -mòdul projectiu de rang 1. Així, per construcció, obtenim un isomorfisme

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i$$

com volíem. □

Demostrem ara el següent lema, equivalent al teorema 2(b) de [Kap52]:

Lema 2.5. *Sigui $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió d'ideals fraccionaris d'un domini de Dedekind A . Aleshores es té un isomorfisme d' A -mòduls*

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} I_i \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} A$$

Demostració. Recordem que, pel lema 2.2, el tipus d'isomorfia de la suma directa de dos ideals fraccionaris I i J d' A ve determinat per la classe ideal del seu producte IJ . Per tant, tenim un isomorfisme $I_2 \oplus I_3 \cong I_1^{-1} \oplus J_1$, on $J_1 := I_1 I_2 I_3$. Similarment podem identificar la suma directa $I_4 \oplus I_5$ amb $J_1^{-1} \oplus J_2$ on $J_2 := J_1 I_4 I_5$. En general, per a $n > 1$, reemplaçem $I_{2n} \oplus I_{2n+1}$ per $J_{n-1}^{-1} \oplus J_n$, on $J_n := J_{n-1} I_{2n} I_{2n+1}$. Així, obtenim

$$\begin{aligned} & I_1 \oplus (I_2 \oplus I_3) \oplus (I_4 \oplus I_5) \oplus (I_6 \oplus I_7) \oplus \cdots \\ & \cong I_1 \oplus (I_1^{-1} \oplus J_1) \oplus (J_1^{-1} \oplus J_2) \oplus (J_2^{-1} \oplus J_3) \oplus \cdots \\ & \cong (A \oplus A) \oplus (A \oplus A) \oplus (A \oplus A) \oplus \cdots \end{aligned}$$

com volíem. □

Aquests lemes 2.4 i 2.5 ens permeten provar la següent proposició clau per al teorema de tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld:

Proposició 2.1. *Sigui A un domini de Dedekind. Aleshores tot A -mòdul M moderat de rang $\aleph_0$ és isomorf a la suma directa del seu submòdul de torsió M_{tors} amb un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$.*

Demostració. Si M és un A -mòdul de rang $\aleph_0$, aleshores M/M_{tors} és un A -mòdul de rang $\aleph_0$ lliure de torsió. A més, com que tot submòdul de M/M_{tors} es correspon a un submòdul de M , que M sigui moderat implica que M/M_{tors} és moderat. Per tant, estem en condicions d'aplicar el lema 2.4 i a aquest el lema 2.5, obtenint així que M/M_{tors} és un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$. Per tant, com que M/M_{tors} és en particular projectiu, la següent successió exacta

$$0 \rightarrow M_{\text{tors}} \rightarrow M \rightarrow M/M_{\text{tors}} \rightarrow 0$$

és escindida, i n'obtenim el resultat. $\square$

3 Els mòduls de Drinfeld

En aquesta secció fixem els objectes principals (i la notació) amb què treballarem en les següents tres seccions. En particular, definim els mòduls de Drinfeld.

Per això, donem primer les següents definicions:

Definició 3.1. Sigui L un cos de característica p^n , on p és un nombre primer i n un enter positiu. El **p -morfisme de Frobenius de L** és un endomorfisme $\tau : L \rightarrow L$ definit per $\tau(\alpha) = \alpha^p$ per a tot $\alpha \in L$. Denotem per $L\{\tau\}$ el subespai de $L[x]$, per a x una variable lliure, generat per combinacions lineals de les potències de τ (vist com a polinomi $\tau(x) = x^p$), on el producte s'identifica amb la composició de polinomis, i la suma és la suma de polinomis. Els elements de $L\{\tau\}$ es coneixen com a **polinomis twistats**, i es defineix el seu **grau** com el grau de la seva representació com a polinomi en $L[x]$. Per convenció, considerem que $\deg 0 := 0$.

Observem que els elements de $L\{\tau\}$ de la definició 3.1 es poden identificar amb polinomis additius. Així, $L\{\tau\}$ és un anell ([Gos96, capítol 1]), i tot element de $L\{\tau\}$ s'identifica amb un endomorfisme de L . En particular, les constants $\alpha \in L$ a $L\{\tau\}$ es poden representar com a $\alpha\tau^0$, on τ^0 és la identitat de L en L ; és a dir, corresponen als endomorfismes de L que multipliquen els elements del domini per la constant corresponent. Per exemple, el polinomi torçat $\tau^2 + 4 = \tau \circ \tau + 4\tau^0$ s'identifica amb el polinomi $x^{p^2} + 4x$, que té grau p^2 .

Notem també que el producte a $L\{\tau\}$ és no commutatiu; en efecte, per a $\alpha, x \in L$ qualssevol, tenim

$$(\tau\alpha)(x) = \tau(\alpha(x)) = \tau(\alpha * x) = (\alpha * x)^p = \alpha^p * x^p = \alpha^p * \tau(x) = \alpha^p(\tau(x)) = (\alpha^p\tau)(x)$$

on hem denotat per $*$ el producte al cos de constants L per claredat (en endavant l'omitirem).

Fixem doncs q una potència positiva d'un cert nombre primer i

$$\begin{aligned} K &:= \text{un cos de funcions global amb cos de constants } \mathbb{F}_q \\ v_\infty &:= \text{una plaça no trivial fixada de } K \\ A &:= \text{el conjunt d'elements de } K \text{ enters a totes les places fora de } v_\infty \\ || &:= \text{el valor absolut normalitzat associat a } v_\infty \text{ (veure definició 1.10)} \end{aligned} \quad (4)$$

Així:

Definició 3.2. Amb la notació (4) fixada, sigui L un A -cos (és a dir, un cos amb un morfisme d'anells $\iota_L : A \rightarrow L$) amb anell de polinomis twistats $L\{\tau\}$. Denotem per $\iota : A \rightarrow L\{\tau\}$ el morfisme trivial que envia cada element a d' A al polinomi constant $\iota(a) := a\tau^0$ i el morfisme $D : L\{\tau\} \rightarrow L$ caracteritzat per enviar tot polinomi twistat al seu terme constant; és a dir, donat $f \in L\{\tau\}$ de la forma $f = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i$, amb $a_0, \dots, a_n \in L$, tenim $D(f) = a_0$.

Un **A -mòdul de Drinfeld sobre L** és un morfisme d'anells $\phi : A \rightarrow L\{\tau\}$ complint dues condicions:

- (i) $D \circ \phi = \iota$.
- (ii) Existeix $a \in A$ tal que $\phi(a) \neq \iota(a)$.

Fem servir la notació $\phi_a := \phi(a)$, per $a \in A$ qualsevol.

Donat un subanell B de L , diem que el mòdul de Drinfeld ϕ està **definit sobre B** si per a cada $a \in A$, tots els coeficients de ϕ_a pertanyen a B , i diem que l'**estructura d' A -mòdul de Drinfeld sobre B** és la donada pel següent producte escalar:

$$\begin{aligned} \cdot : A \times B &\longrightarrow B \\ (a, x) &\longmapsto a \cdot x := \phi_a(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Denotem l' A -mòdul amb aquesta estructura per $\phi(B)$.

Observem que el producte escalar (5) està en efecte ben definit, ja que es compleix, per a $x, y \in B$ i $a, b \in A$,

- (i) $a \cdot (x + y) = \phi_a(x + y) = \phi_a(x) + \phi_a(y) = a \cdot x + a \cdot y$
- (ii) $(a + b) \cdot x = \phi_{(a+b)}(x) = \phi_a(x) + \phi_b(x) = a \cdot x + b \cdot x$
- (iii) $(ab) \cdot x = \phi_{ab}(x) = \phi_a(\phi_b(x)) = a \cdot (b \cdot x)$
- (iv) $1 \cdot x = \phi_1(x) = \text{id}(x) = x$

Notem que la propietat (i) es compleix perquè ϕ_a defineix un polinomi additiu per a tot $a \in A$. D'altra banda, les relacions $\phi_1 = \tau^0 = \text{id}$, $\phi_{(a+b)}(x) = \phi_a(x) + \phi_b(x)$ i $\phi_{ab} = \phi_a \phi_b$ són certes perquè ϕ és un morfisme d'anells, i recordem que el producte $\phi_a \phi_b$ és la composició de ϕ_a i ϕ_b com a polinomis.

Fem també la següent observació:

Lema 3.1. *Un mòdul de Drinfeld (com el definit a 3.2) és injectiu.*

Demostració. Sigui A l'anell fixat a (4) i L un A -cos. Si $\varphi : A \rightarrow L\{\tau\}$ és un morfisme d'anells tal que $\text{Ker } \varphi \neq 0$, aleshores $\text{Ker } \varphi$ és un ideal maximal, ja que $L\{\tau\}$ no té divisors de zero, i per tant, pel teorema de l'isomorfisme, $\text{Im } \varphi$ és un cos. Ara bé, com que els únics elements invertibles de $L\{\tau\}$ són els de L , és a dir, els polinomis de la forma $a\tau^0$ per a $a \in L^*$, això implica que $\text{Im } \varphi \subseteq L$. Així, si φ compleix $D \circ \varphi = \iota$, necessàriament $\varphi = \iota$, perquè no pot tenir termes no constants, i per tant φ no és un mòdul de Drinfeld. En altres paraules, tot mòdul de Drinfeld ϕ compleix $\text{Ker } \phi = 0$. $\square$

Considerem també les nocions de rang i de morfismes entre mòduls de Drinfeld, ben definides per les proves de Drinfeld ([Dri74, proposició 2.1]):

Definició 3.3. Per a cada A -mòdul de Drinfeld sobre L (definit com a 3.2), anomenem **rang de ϕ** a l'únic enter positiu r tal que $\deg \phi_a = |a|^r$ per a tot $a \in A$.

D'altra banda, si ϕ' és un altre A -mòdul sobre L , un **morfisme entre ϕ i ϕ'** és un element $u \in L\{\tau\}$ tal que $u\phi_a = \phi'_a u$ per a tot $a \in A$, i també s'escriu com $u : \phi \rightarrow \phi'$.

Observem que, si existeix un morfisme no trivial entre dos mòduls de Drinfeld, aleshores els mòduls de Drinfeld tenen el mateix rang.

Finalment, donem un exemple fonamental de mòdul de Drinfeld de rang 1, per a $K = \mathbb{F}_q(t)$ i $A = \mathbb{F}_q[t]$ segons la notació (4):

Definició 3.4. Sigui L una extensió finita i separable de $\mathbb{F}_q(t)$. Un **mòdul de Carlitz** $C : \mathbb{F}_q[t] \rightarrow L\{\tau\}$ és un mòdul de Drinfeld determinat per $C(t) := t\tau^0 + \tau$. Així, en general, per a tot $a \in A$ de grau d , tenim

$$C(a) := a\tau^0 + \sum_{j=1}^d C(a)^{(j)} \tau^j$$

on els $\{C(a)^{(j)}\}$ són uns coeficients d' A que es relacionen amb l'exponencial de Carlitz e_C per

$$e_C(ax) = ae_c(x) + \sum_{j=1}^d C(a)^{(j)} e_C(x)^{q^j}$$

com s'explica a [Gos96, capítol 3].

Comprovem que, si C és un mòdul de Carlitz definit com a 3.4, es té $\deg C(a) = |a|$ per a tot $a \in A$. En efecte, si un element a d' A té grau d , aleshores $|a| = \#(A/a) = q^d$, i el grau de $C(a)$ és precisament el grau de τ^d com a polinomi; és a dir, q^d .

Al primer apartat de la secció 4.1, només requerirem que el cos L de la definició 3.2 sigui un A -cos local. A l'apartat 4.2 i tota la secció 5, L serà una extensió finita de K . En cada secció, ϕ denotarà un A -mòdul de Drinfeld fixat sobre el cos L corresponent.

4 Les funcions d'altura associades a un mòdul de Drinfeld

4.1 La funció canònica local

En tot aquest apartat, tenim en compte els objectes (4) definits i fixem L_v un cos tal que és complet respecte una plaça v de i tal que el cos residual associat (veure definició a 1.6) és finit; és a dir, L_v és un A -cos local. Així doncs, el cos L_v només té un únic anell de valoració $\mathcal{O}_v$: el corresponent a v (definició 1.5).

Definim l'aplicació

$$\begin{aligned}\tilde{v} : L_v &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto \min\{0, v(x)\}\end{aligned}$$

i considerem el següent lema:

Lema 4.1. *Sigui d un enter positiu i $f(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \dots + c_0 \in L_v[x]$, amb $c_d \neq 0$. Aleshores $\tilde{v}(f(x)) - d\tilde{v}(x)$ està acotat. A més, $\tilde{v}(f(x)) = d\tilde{v}(x) + v(c_d)$ per a $\tilde{v}(x)$ prou negatiu.*

Demostració. Sigui $x \in L_v$ tal que $v(x)$ sigui prou negatiu perquè $dv(x) < -v(c_d)$ i $v(c_d x^d) < v(c_i x^i)$ per a tot $i \in \{0, \dots, d\}$; és a dir (pel corollari 1.1), tal que

$$v(f(x)) = \min_{i \in \{0, \dots, d\}} \{v(c_i x^i)\} = v(c_d x^d) = v(c_d) + dv(x) < 0$$

Així, com que v i $\tilde{v}$ coincideixen en el domini en què v és negativa, obtenim

$$\tilde{v}(f(x)) - d\tilde{v}(x) = v(f(x)) - dv(x) = v(c_d) < \infty$$

Considerem ara els elements x de L_v que no compleixin les condicions anteriors; és a dir, $v(x)$ no és prou negatiu, i considerem una cota inferior $c \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) > c$. Així doncs, tenim

$$0 \geq d\tilde{v}(x) > dc$$

i només ens queda veure que $\tilde{v}(f(x))$ està acotat per aquests $x \in L_v$.

Si $v(f(x)) \geq 0$, es té per construcció de $\tilde{v}$ que $\tilde{v}(f(x)) = 0$.

Si $v(f(x)) < 0$, es té $0 > \tilde{v}(f(x)) = v(f(x))$, i tenim la següent cota inferior (per la definició de valoració 1.1):

$$v(f(x)) \geq \min_{i \in \{0, \dots, d\}} \{v(c_i x^i)\} = v(c_j x^j) = v(c_j) + jv(x) \geq v(c_j) + jc$$

per a un cert $j \in \{0, \dots, d\}$ que minimitza $v(c_i x^i)$.

Per tant, hem provat en tots els casos que $\tilde{v}(f(x)) - d\tilde{v}(x)$ està acotat, i en particular que $\tilde{v}(f(x)) = d\tilde{v}(x) + v(c_d)$ si $v(x)$ és prou negatiu. $\square$

Considerem a partir d'ara un cert A -mòdul de Drinfeld ϕ sobre L_v i fixem un element $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Observem el següent:

Lema 4.2. *Siguin ϕ un A -mòdul de Drinfeld L_v i $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Aleshores $\deg \phi_a > 1$.*

Demostració. Recordem que el valor absolut normalitzat associat a v ve definit per $|\alpha| = q^{-d(v_\infty)v_\infty(\alpha)}$ per a tot $\alpha \in L_v$, on $d(v_\infty) \geq 1$ és el grau del cos residual associat a la plaça v_∞ . Així, si $|a| \leq 1$, tenim $v_\infty(a) \geq 0$; és a dir, per construcció d' A , l'element $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ és enter a totes les places, la qual cosa està en contradicció amb el fet que no pertany al cos de constants $\mathbb{F}_q$ (pel teorema 1.2). Per tant, s'ha de complir que $|a| > 1$, i com que el rang r del mòdul de Drinfeld ϕ ha de ser un enter estrictament positiu (definició 3.3), tenim $\deg \phi_a = |a|^r > 1$. $\square$

La següent proposició defineix una funció $V_v : L_v \rightarrow \mathbb{R}$ associada al mòdul ϕ , que veurem més endavant no depèn de l'elecció de l'element $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$:

Proposició 4.1.

(1) *Per a tot $x \in L_v$, el següent límit existeix i és finit:*

$$V_v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) \quad (6)$$

(2) *$V_v(x) - \tilde{v}(x)$ està acotat.*

(3) *Si $v(x)$ és prou negatiu, aleshores $V_v(x) = v(x) + v(c)/(d-1)$, on $d = \deg \phi_a$ i c és el coeficient principal de ϕ_a considerat com a polinomi.*

(4) *Per a tots $x, y \in L_v$, $V_v(x \pm y) \geq \min\{V_v(x), V_v(y)\}$, amb igualtat si $V_v(x) \neq V_v(y)$.*

(5) *Per a tot $x \in L_v$, $V_v(-x) = V_v(x)$.*

(6) *Donats $x_1, \dots, x_n \in L_v$, si existeix $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $V_v(x_i) < V_v(x_j)$ per a tot $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, aleshores $x_1 + \dots + x_n \neq 0$.*

Demostració. Denotem $d := \deg \phi_a$. Pel lema 4.2, com que $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, es té $d > 1$. Notem també que, com que ϕ és un morfisme d'anells, tenim

$$\deg \phi_{a^n} = \deg (\phi_a)^n = (\deg \phi_a)^n = d^n$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. Demostrem cada apartat en ordre consecutiu:

(1) Fixem una cota $M \geq 0$ per a $|\tilde{v}(\phi_a(x)) - v(x)|$, que existeix pel lema 4.1. Així, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tot $x \in L_v$, es compleix

$$\begin{aligned} & |(\deg \phi_{a^{n+1}})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^{n+1}}(x)) - (\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x))| \\ &= d^{-(n+1)} |\tilde{v}(\phi_a(\phi_{a^n}(x))) - d \tilde{v}(\phi_{a^n}(x))| \\ &\leq d^{-(n+1)} M \end{aligned}$$

Per tant, com que $d > 1$, obtenim que la successió $((\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent, com volíem veure.

(2) De manera similar veiem que $V_v(x) - \tilde{v}(x)$ és acotat. En efecte, tenim

$$\begin{aligned} & (\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) - \tilde{v}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} ((\deg \phi_{a^{m+1}})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^{m+1}}(x)) - (\deg \phi_{a^m})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^m}(x))) \end{aligned}$$

i per tant, per l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} |V_v(x) - \tilde{v}(x)| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) - \tilde{v}(x) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |(\deg \phi_{a^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) - \tilde{v}(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^{n-1} ((\deg \phi_{a^{m+1}})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^{m+1}}(x)) - (\deg \phi_{a^m})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^m}(x))) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} |(\deg \phi_{a^{m+1}})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^{m+1}}(x)) - (\deg \phi_{a^m})^{-1} \tilde{v}(\phi_{a^m}(x))| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n-1} d^{-(m+1)} M = M \sum_{m=1}^{\infty} d^{-m} = \frac{M}{d-1} < \infty \end{aligned}$$

(3) Provem per inducció que, si $v(x)$ és prou negatiu, aleshores es compleix

$$\tilde{v}(\phi_{a^{n+1}}(x)) = d\tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) + v(c) \quad (7)$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. El cas $n = 0$ es compleix pel lema 4.1. Suposem que la igualtat és certa fins a un cert $k \in \mathbb{N}$. Aleshores

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\phi_{a^{k+2}}(x)) &= \tilde{v}(\phi_a(\phi_{a^{k+1}}(x))) \\ &= d\tilde{v}(\phi_{a^{k+1}}(x)) + v(c) \end{aligned}$$

on hem fet servir que $\tilde{v}(\phi_{a^k}(x))$ és tan negativa com $v(x)$ per la hipòtesi d'inducció i hem aplicat el cas $n = 0$ amb $\phi_{a^k}(x)$ en comptes de x . Per tant, per inducció, la igualtat 7 es compleix per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Dividim ara la igualtat 7 per d^{n+1} i obtenim

$$\frac{\tilde{v}(\phi_{a^{n+1}}(x))}{d^{n+1}} = \frac{\tilde{v}(\phi_{a^n}(x))}{d^n} + \frac{v(c)}{d^{n+1}}$$

d'on

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}(\phi_{a^n}(x))}{d^n} &= \frac{\tilde{v}(\phi_{a^0}(x))}{d^0} + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\tilde{v}(\phi_{a^{m+1}}(x))}{d^{m+1}} - \frac{\tilde{v}(\phi_{a^m}(x))}{d^m} \right) \\ &= \tilde{v}(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{v(c)}{d^{m+1}} = \tilde{v}(x) + \frac{v(c)}{d-1} (1 - (d^{-1})^n) \end{aligned}$$

i prenent límit quan n tendeix a infinit obtenim el resultat desitjat, tenint en compte que $v(x)$ és prou negatiu i doncs $\tilde{v}(x) = v(x)$.

- (4) Com que els elements de $L_v\{\tau\}$ com a polinomis són additius, tenim $\phi_b(x \pm y) = \phi_b(x) \pm \phi_b(y)$ per a tot $b \in A$. Per tant, per la desigualtat triangular forta de les valoracions (definició 1.1), tenim

$$v(\phi_{a^n}(x \pm y)) = v(\phi_{a^n}(x) \pm \phi_{a^n}(y)) \geq \min\{v(\phi_{a^n}(x)), v(\phi_{a^n}(y))\}$$

amb igualtat si $v(\phi_{a^n}(x)) \neq v(\phi_{a^n}(y))$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\phi_{a^n}(x \pm y)) &= \min\{0, v(\phi_{a^n}(x \pm y))\} \\ &\geq \min\{0, \min\{v(\phi_{a^n}(x)), v(\phi_{a^n}(y))\}\} \\ &= \min\{\min\{0, v(\phi_{a^n}(x))\}, \min\{0, v(\phi_{a^n}(y))\}\} \\ &= \min\{\tilde{v}(\phi_{a^n}(x)), \tilde{v}(\phi_{a^n}(y))\} \end{aligned}$$

Dividint per d^n i tendint n a infinit, obtenim el resultat

$$V_v(x \pm y) \geq \min\{V_v(x), V_v(y)\} \quad (8)$$

És a dir, la funció V_v compleix la desigualtat triangular forta, i doncs la demostració de la igualtat si $V_v(x) \neq V_v(y)$ és anàlega a la de les valoracions (lema 1.1).

- (5) Com que ϕ és un morfisme d'anells, tenim $\phi_{a^n}(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, i $\tilde{v}(0) = \min\{0, v(0)\} = \min\{0, \infty\} = 0$. Per tant, $V_v(0) = 0$. A més, com que $\tilde{v}$ només pren valors no positius, tenim $V_v(x) \leq 0$ per a tot $x \in L_v$. Tenint això en compte, apliquem el resultat (8) de les següents dues maneres, per a $x \in L_v$ arbitrari:

$$\begin{aligned} V_v(-x) &= V_v(0 - x) \geq \min\{V_v(0), V_v(x)\} = \min\{0, V_v(x)\} = V_v(x) \\ V_v(x) &= V_v(0 - (-x)) \geq \min\{V_v(0), V_v(-x)\} = \min\{0, V_v(-x)\} = V_v(-x) \end{aligned}$$

i en deduïm que $V_v(x) = V_v(-x)$.

- (6) Com que $V_v(0) = 0$, tenim prou amb comprovar que si $x_1, \dots, x_n \in L_v$ són tals que existeix $i \in \{1, \dots, n\}$ de manera que $V_v(x_i) < V_v(x_j)$ per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, aleshores $V_v(x_1 + \dots + x_n) \neq 0$. Com que V_v no pot prendre cap valor positiu, notem que $V_v(x_i)$ ha de ser estrictament menor que 0. A més, per la desigualtat triangular forta, tenim $V_v(x_1 + \dots + x_n) = V_v(x_i)$ (per la demostració del corollari 1.1). Així, com que $V_v(x_i) < 0$, concloem que $x_1 + \dots + x_n \neq 0$, com volíem.

□

Veiem ara que aquesta funció V_v té les següents propietats importants:

Proposició 4.2. *Sigui ϕ' un altre A -mòdul de Drinfeld sobre L_v , amb funció corresponent V'_v obtinguda com a la proposició 4.1. Sigui $u : \phi \rightarrow \phi'$ un morfisme de mòduls de Drinfeld. Aleshores, per a tot $x \in L_v$, es compleix*

$$V'_v(u(x)) = (\deg u)V_v(x)$$

Demostració. Si u és el morfisme nul $u = 0$, la igualtat es compleix trivialment, ja que $V'_v(0) = 0$, i $\deg u = 0$ per convenció. Suposem que $u \neq 0$. Aleshores ϕ i ϕ' tenen el mateix rang r , i $\deg \phi_{a^n} = |a^n|^r = \deg \phi'_{a^n}$. Sigui M una cota de $\tilde{v}(u(x)) - (\deg u)\tilde{v}(x)$ donada pel lema 4.1. Com que $\phi'_b u = u\phi_b$ per a tot $b \in L_v$, tenim

$$|\tilde{v}(\phi'_{a^n}(u(x))) - (\deg u)\tilde{v}(\phi_{a^n}(x))| = |\tilde{v}(u(\phi_{a^n}(x))) - (\deg u)\tilde{v}(\phi_{a^n}(x))| \leq M$$

Ara, dividim entre $\deg \phi_{a^n}$ (igual a $\deg \phi'_{a^n}$) i fer tendir n a infinit; per la proposició 4.1, sabem que els límits V_v i V'_v existeixen. Així, obtenim

$$|V'_v(u(x)) - (\deg u)V_v(x)| \leq 0$$

d'on es dedueix el que volíem. □

Corol·lari 4.1. *Sigui $b \in A$. Aleshores*

$$V_v(\phi_b(x)) = (\deg \phi_b)V_v(x)$$

per a tot $x \in L_v$.

Demostració. Apliquem la proposició 4.2 amb $\phi' = \phi$ i $u = \phi_b$. En efecte, donat $b \in A$, ϕ_b dona un morfisme entre el mòdul de Drinfeld ϕ i si mateix, ja que es compleix $\phi_b\phi_a = \phi_{ba} = \phi_{ab} = \phi_a\phi_b$ per a tot $a \in A$, perquè el producte d' A és commutatiu i ϕ és morfisme d'anells. □

Proposició 4.3. *V_v és independent de l'elecció d' $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$.*

Demostració. Fixem V_v com fins ara amb un element $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, i considerem un altre $b \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Fixem també $x \in L$. Com que $\lim_{n \rightarrow \infty} \deg \phi_{b^n} = \infty$ (pel lema 4.2) i $V_v - \tilde{v}$ està acotat (per la proposició 4.1), obtenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{b^n})^{-1} V_v(\phi_{b^n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{b^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{b^n}(x))$$

Ara bé, pel corol·lari 4.1, tenim que $(\deg \phi_{b^n})^{-1} V_v(\phi_{b^n}(x)) = V_v(x)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, d'on concloem que

$$V_v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{b^n})^{-1} \tilde{v}(\phi_{b^n}(x))$$

És a dir, V_v és independent de l'elecció d' $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, com volíem veure. □

Considerem ara $\mathcal{O}_v = \{x \in L_v : v(x) \geq 0\}$ l'anell de valoració de L_v i fixem $\pi \in \mathcal{O}_v$ un paràmetre uniformitzador (és a dir, tal que $v(\pi) = 1$). La següent proposició és clau per a les demostracions de la secció 5:

Proposició 4.4. *Suposem que ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_v$. Aleshores*

- (1) $V_v(x + y) = V_v(x)$ per a tot $x \in L_v$ i $y \in \mathcal{O}_v$. És a dir, V_v induïx una funció en $L_v/\mathcal{O}_v$.
- (2) Donada una constant real c , només hi ha un nombre finit d'elements $\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v$ satisfent $V_v(\bar{x}) \geq c$.

(3) $V_v(x) = 0$ si i només si $\phi_b(x) \in \mathcal{O}_v$ per algun $b \in A$ no nul.

(4) Si, per algun $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, el coeficient principal de ϕ_a és una unitat d' $\mathcal{O}_v$, aleshores $V_v(x) = \tilde{v}(x)$ per a tot $x \in L_v$.

Demostració. Notem que, per abús de notació, denotem les funcions V_v i $\tilde{v}$ induïdes en $L_v/\mathcal{O}_v$ també per V_v i $\tilde{v}$, respectivament. Demostrem cada apartat en ordre consecutiu:

(1) Siguin $y \in \mathcal{O}_v$ i $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Com que ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_v$, tenim $\phi_{a^n}(y) \in \mathcal{O}_v$. Per tant, per definició de $\tilde{v}$ i $\mathcal{O}_v$, obtenim $\tilde{v}(\phi_{a^n}(y)) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, i doncs $V_v(y) = 0$. Com que $V_v(x) \leq 0$ per a tot $x \in L_v$, tenim, per la desigualtat triangular forta (proposició 4.1),

$$\begin{aligned} V_v(x+y) &\geq \min\{V_v(x), V_v(y)\} = V_v(x) \\ V_v(x) &= V_v(x+y-y) \geq \min\{V_v(x+y), V_v(y)\} = V_v(x+y) \end{aligned}$$

d'on obtenim $V_v(x+y) = V_v(x)$, com volíem.

(2) Com que V_v i $\tilde{v}$ són funcions ben definides en $L_v/\mathcal{O}_v$ (per l'apartat (1)) i només difereixen en una quantitat acotada (per la proposició 4.1), l'assertió (2) és equivalent a que donada una constant $c \in \mathbb{R}$ existeixi un nombre finit d'elements $\bar{x}$ de $L_v/\mathcal{O}_v$ complint $\tilde{v}(\bar{x}) \geq c$. Veiem que això també és equivalent a que $\pi^{-n}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$ sigui finit per a tot $n \geq 1$.

Com que $\tilde{v}(x) \leq 0$ per a tot $x \in L$ (és a dir, no hi ha cap element de L tal que $\tilde{v}(x) \geq c$ per a $c > 0$) suposem que $c \leq 0$.

Considerem $\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v$ tal que $\tilde{v}(\bar{x}) \geq -n$ per a un cert $n \geq 1$. Sigui $y \in \bar{x} \subseteq L_v$ arbitrari. Si $\bar{x}$ no és la classe del zero, tenim que $y \notin \mathcal{O}_v$; és a dir, $v(y) < 0$, i per tant $\tilde{v}(y) = v(y)$. Tenim també

$$v(y\pi^n) = v(y) + nv(\pi) \geq -n + n = 0$$

d'on deduïm que $y \in \pi^{-n}\mathcal{O}_v \subseteq L$. Per tant, hem obtingut que $\bar{x} \in \pi^{-n}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$. D'altra banda, si $\bar{x}$ és la classe del zero de $L_v/\mathcal{O}_v$, aleshores també s'identifica com a conjunt amb la classe del zero de $\pi^{-n}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$.

Així doncs, definim $m := \min\{n \in \mathbb{N} : c \geq -n\}$, i observem que

$$\begin{aligned} \{\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v : \tilde{v}(\bar{x}) \geq c\} &\subseteq \{\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v : \tilde{v}(\bar{x}) \geq -m\} \\ &= \{\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v : \bar{x} \in \pi^{-m}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v\} \\ &= \pi^{-m}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v \end{aligned}$$

Anàlogament, notem que $\{\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v : \tilde{v}(\bar{x}) \geq c\} \supseteq \pi^{-(m-1)}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$.

Ara bé, per a cada $n \geq 1$, tenim una descomposició

$$\pi^{-n}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v \supseteq \pi^{-(n-1)}\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v$$

on cada quocient és isomorf al cos residual $\mathcal{O}_v/\pi$ (veure observacions 1.6, 1.4), que hem assumit que és finit per al cos L fixat a aquesta secció.

Per tant, hem comprovat que el conjunt $\{\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v : \tilde{v}(\bar{x}) \geq c\}$ és finit, per a $c \in \mathbb{R}$ arbitrari, com volíem.

- (3) Si $\phi_b(x) \in \mathcal{O}_v$ per algun $b \in A$ no nul (i $x \in L$), aleshores $V_v(\phi_b(x)) = 0$, per l'apartat (1). Com que $b \neq 0$ i ϕ és injectiva (lema 3.1), tenim $\deg \phi_b \neq 0$, i per tant, pel corollari 4.1, obtenim $V_v(x) = 0$.

Recíprocament, si $V_v(x) = 0$, aleshores, pel mateix corollari 4.1, tenim $V_v(\phi_b(x)) = 0$ per a tot $b \in A$ no nul. Ara bé, per l'apartat anterior (2), tenim que el conjunt $\{y \in L_v : V_v(y) = 0\}$ està format per un nombre finit de classes (elements de $L_v/\mathcal{O}_v$). Com que A és infinit, això implica que existeixen $b, b' \in A$ diferents entre ells i de zero tals que $\phi_b(x)$ i $\phi_{b'}(x)$ pertanyen a la mateixa classe de $L_v/\mathcal{O}_v$; és a dir, tals que $\phi_{b-b'}(x) = \phi_b(x) - \phi_{b'}(x) \in \mathcal{O}_v$. Així, hem trobat un element $b - b' \in A$ no nul com volíem.

- (4) Recordem que les unitats x de l'anell de valoració $\mathcal{O}_v$ són els elements d' $\mathcal{O}_v$ tals que $v(x) = 0$. Per tant, pel lema 4.1, donat $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ tal que el coeficient principal c de ϕ_a sigui una unitat de $\mathcal{O}_v$, tenim

$$\tilde{v}(\phi_a(x)) = (\deg \phi_a) \tilde{v}(x) + v(c) = (\deg \phi_a) \tilde{v}(x)$$

per a tot $x \in L_v$. Per inducció obtenim que el coeficient principal de ϕ_{a^n} també és una unitat de $\mathcal{O}_v$, i per tant

$$\tilde{v}(\phi_{a^n}(x)) = (\deg \phi_{a^n}) \tilde{v}(x)$$

per a tot $x \in L_v$, $n \in \mathbb{N}$. Dividint tot per $\deg \phi_{a^n}$ i fent tendir n a infinit trobem el resultat $V_v(x) = \tilde{v}(x)$.

□

4.2 Altures locals i globals

A partir d'aquí, amb les definicions (4) fixades a la secció 3, L serà una extensió finita de K , que podem considerar com a A -cos mitjançant les inclusions $A \subseteq K \subseteq L$. Fixem també ϕ un A -mòdul de Drinfeld sobre L .

Així, com que L és un cos global, la completació de L respecte una plaça v (no trivial) de L és un cos local L_v . Podem considerar doncs ϕ com a A -mòdul de Drinfeld sobre $L_v \supseteq L$, estenent el seu codomini. En particular, per a cada plaça v de L , podem considerar una funció V_v associada construïda com a la secció 4.1 anterior.

Definim l'**altura local canònica en L associada a ϕ i v** com la funció $\hat{h}_v : L \rightarrow \mathbb{R}$ determinada per

$$\hat{h}_v(x) := -[L : K]^{-1} d(v) V_v(x) \quad (9)$$

on $d(v)$ és el grau del cos residual de v sobre $\mathbb{F}_q$.

Així, com que $\hat{h}_v$ és un múltiple constant de V_v , podem treslladar de forma adient tots els resultats de la secció 4.1 a $\hat{h}_v$.

També considerem la definició de funció d'**altura global canònica** $\hat{h}$ associada a ϕ motivada per Denis [Den92]:

$$\hat{h}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} h(\phi_{a^n}(x)) \quad (10)$$

on h denota l'**altura de Weil** en $\mathbb{A}^1(K)$; és a dir, si x pertany a una extensió finita E de K , es té

$$h(x) := -[E : K]^{-1} \sum_{w \in \mathcal{V}(E)} d(w) \min\{0, w(x)\} \quad (11)$$

Recollim a la següent proposició alguns resultats de Denis ([Den92]):

Proposició 4.5.

(1) Si $a \in A$ i $x \in K^{alg}$, aleshores

$$\widehat{h}(\phi_a(x)) = (\deg \phi_a) \widehat{h}(x)$$

(2) Donada una constant real c , només hi ha un nombre finit d'elements $x \in L$ tals que $\widehat{h}(x) \leq c$.

(3) $\widehat{h}(x) = 0$ si i només si $\phi_a(x) = 0$ per algun $a \in A$ no nul. Per tant, per l'apartat anterior, el nombre de $x \in L$ complint $\phi_a(x) = 0$ per algun $a \in A$ diferent de zero és finit.

(4) Si $x, y \in K^{alg}$, aleshores $\widehat{h}(x \pm y) \leq \widehat{h}(x) + \widehat{h}(y)$.

Volem relacionar les funcions d'altura local presentades a la secció 4.1 amb la funció d'altura global canònica (10). Recordem la definició 1.11 d'anell de S -enters per a $S \in \mathcal{V}(L)$ finit i notem que el següent lema ens permet reduir sumes sobre totes les places de L a sumes sobre un nombre finit de places de L :

Lema 4.3. Un A -mòdul de Drinfeld ϕ sobre L està definit sobre l'anell de valoració $\mathcal{O}_v$ corresponent a v per a totes les places v de L excepte per a un nombre finit no nul. En altres paraules, ϕ està definit sobre l'anell de S -enters $\mathcal{O}_S$ per a un cert conjunt S de places de L finit no buit.

Demostració. Com demostrem a l'apèndix B, per a qualsevol $a_0 \in A \setminus \mathbb{F}_q$, l'anell A és un $\mathbb{F}_q[a_0]$ -mòdul finitament generat, i per tant la unió de l'element a_0 amb un conjunt de generadors $a_1, \dots, a_n$ de l'estructura de $\mathbb{F}_q[a_0]$ -mòdul d' A és un conjunt de generadors de l'anell A com a $\mathbb{F}_q$ -àlgebra. Així, donat $a \in A$ qualsevol, el polinomi twistat ϕ_a es pot expressar com a combinació $\mathbb{F}_q$ -lineal de composicions (és a dir, de productes) dels elements $\phi_{a_0}, \phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_n}$, i per tant els únics pols de L que poden tenir els coeficients de ϕ_a són els pols dels coeficients dels elements $\phi_{a_0}, \phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_n}$ (veure definicions 1.6). Recordem que el nombre de pols de cada element $x \in L^*$ és finit (teorema 1.2), i per tant, com que tenim un nombre finit de generadors, el següent subconjunt de places de L és finit:

$$S := \{v \in \mathcal{V}(L) \mid v(\alpha) < 0 \text{ per } \alpha \text{ un coeficient de } \phi_{a_i} \text{ per algun } i \in \{0, \dots, n\}\}$$

Veiem finalment que S és no buit. En efecte, per definició de mòdul de Drinfeld, el terme constant (és a dir, el coeficient de τ_0) de ϕ_a és a per a tot $a \in A$. Per tant, com que A conté per construcció elements transcendents l'únic pol dels quals pot ser v_∞ , obtenim que S conté les extensions de $v_\infty \in \mathcal{V}(K)$ a L .

Així, hem vist que existeix un conjunt S finit no buit tal que, per a tot $a \in A$, els coeficients de ϕ_a pertanyen a $\mathcal{O}_S$, com volíem. $\square$

Notem que, en el cas del mòdul de Carlitz (definit a 3.4) amb $L = K = \mathbb{F}_q(t)$, el conjunt S només conté una plaça: la de l'infinít fixada v_∞^t . En efecte, l'anell $A = \mathbb{F}_q[t]$ (que poden considerar com a mòdul sobre si mateix) està finitament generat com a $\mathbb{F}_q$ -àlgebra per l'element t , i tenim

$$C(t) = t\tau^0 + \tau = \frac{\tau^0 + (1/t)\tau}{1/t}$$

d'on $v_\infty^t(C(t)) = -1$. Ara bé, cap altre element primer divideix els coeficients de $C(t)$, i per tant, per l'argument del lema 4.3, el mòdul de Carlitz $C : \mathbb{F}_q[t] \rightarrow \mathbb{F}_q(t)\{\tau\}$ està definit sobre l'anell $\mathcal{O}_{\{v_\infty\}} = \mathbb{F}_q[t]$.

Tenim doncs la següent relació entre les altures locals i l'altura global:

Proposició 4.6. *Si $x \in L$, aleshores $\widehat{h}_v(x) = 0$ per a totes les places de L excepte per a un nombre finit, i es compleix*

$$\widehat{h}(x) = \sum_{v \in \mathcal{V}(L)} \widehat{h}_v(x)$$

Demostració. Considerem primer S el conjunt de les places tals que ϕ no es pot definir sobre l'anell de valoració corresponent. Pel lema 4.3, el conjunt S és finit.

Fixem $x \in L$ i considerem S_x el conjunt de pols de x , que sabem que és finit (teorema 1.2).

Construïm doncs el conjunt finit $S' = S \cup S_x$.

Si $v \notin S$, tenim que ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_v$. Si $v \notin S_x$, tenim que $v(x) \geq 0$; és a dir, $x \in \mathcal{O}_v$. Així, si $v \notin S'$, obtenim $\phi_a(x) \in \mathcal{O}_v$ per a tot $a \in A$ (en particular per algun $a \in A$ no nul). Per tant, per l'apartat (3) de la proposició 4.4, obtenim $V_v(x) = 0$, i, de la definició 9, tenim $\widehat{h}_v(x) = 0$.

Pel que acabem de dir, si $v \notin S'$, es compleix en particular que $v(\deg \phi_{a^n}(x)) \geq 0$ per a una certa $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, de la definició (11) d'altura de Weil, tenim

$$h(\phi_{a^n}(x)) = -[L : K]^{-1} \sum_{v \in S'} d(v) \min\{0, v(\phi_{a^n}(x))\}$$

Així, tenint en compte les definicions (10) i (6) de les altures (amb (9)), dividim per $\deg \phi_{a^n}$, prenem límit $n \rightarrow \infty$, i obtenim

$$\begin{aligned} \widehat{h}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} h(\phi_{a^n}(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} \left(-[L : K]^{-1} \sum_{v \in S'} d(v) \widetilde{v}(\phi_{a^n}(x)) \right) \\ &= -[L : K]^{-1} \sum_{v \in S'} d(v) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\deg \phi_{a^n})^{-1} \widetilde{v}(\phi_{a^n}(x)) \right) \\ &= -[L : K]^{-1} \sum_{v \in S'} d(v) V_v(x) \\ &= \sum_{v \in S'} h_v(x) = \sum_{v \in \mathcal{V}(L)} h_v(x) \end{aligned}$$

on a l'últim pas hem fet servir que $h_v(x) = 0$ per a tot $v \notin S'$. Notem que el fet que S sigui finit és el que ens permet entrar el límit al sumatori.

Així, com que l'element $x \in L$ és arbitrari, obtenim el resultat desitjat. $\square$

5 Un teorema del tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld

5.1 El teorema principal

Mantenim que ϕ és un A -mòdul de Drinfeld sobre una extensió finita L de K . Com hem explicat a la secció 3, ϕ dona una estructura d' A -mòdul a L , la qual denotem per $\phi(L)$. En aquesta secció caracteritzem $\phi(L)$ com a A -mòdul al teorema 5.1. Per això, provem primer que $\phi(L)$ és moderat, a partir del lema 2.3 i dels resultats per a la funció d'altura global canònica definida a la secció 4.2:

Lema 5.1. *$\phi(L)$ és un A -mòdul moderat.*

Demostració. Sigui M un A -submòdul de $\phi(L)$ de rang finit. Volem demostrar que M és finitament generat com a A -mòdul.

Per l'apartat (3) de la proposició 4.5, el submòdul de torsió de $\phi(L)$ és finit (hi ha un nombre finit de $x \in L$ tals que $a \cdot x = \phi_a(x) = 0$ per algun $a \in A$ no nul), i per tant el submòdul de torsió de $M \subseteq \phi(L)$ també és finit. Per tant, com que, donat $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, l'anell A/a és finit (gràcies a la finitud del cos de constants $\mathbb{F}_q$), deduïm pel lema 2.3 que M/aM és finit per $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$.

Fixem doncs $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$, un conjunt $S \subseteq M$ de representants de M/aM , la constant $c := \max_{s \in S} \widehat{h}(s)$, i considerem $T := S \cup \{x \in L : \widehat{h}(x) \leq c\}$. Per la finitud de M/aM i per l'apartat (2) de la proposició 4.5, T és finit. Veiem que T genera M com a A -mòdul. Sigui N el submòdul generat per T . Suposem, per reducció a l'absurd, que $N \neq M$. Aleshores podem escollir $m_0 \in M \setminus N$ amb $\widehat{h}(m_0)$ minimal. En efecte, la no-existència d'un tal mínim implicaria que tindríem infinits valors $x \in M \setminus N \subseteq L$ complint $c < \widehat{h}(x) \leq c'$ per a un cert $c' \in \mathbb{R}$, la qual cosa està en contradicció amb l'apartat (2) de la proposició 4.5.

Com que S és un conjunt de representants de M/aM , podem escriure $m_0 = s + \phi_a(m)$ per algun $s \in S$ i $m \in M$. Notem que s'ha de complir que $m \notin N$, ja que si no, com que $s \in N$ per construcció, tindríem $m_0 \in N$. Tenim així

$$\begin{aligned}
2\widehat{h}(m_0) &\leq 2\widehat{h}(m) && \text{(per la minimalitat de } m_0, \text{ i perquè } m \notin N) \\
&\leq (\deg \phi_a) \widehat{h}(m) && \text{(pel lema 4.2)} \\
&= \widehat{h}(\phi_a(m)) && \text{(per l'apartat (1) de la proposició 4.5)} \\
&= \widehat{h}(m_0 - s) && \text{(per construcció)} \\
&\leq \widehat{h}(m_0) + \widehat{h}(s) && \text{(per l'apartat (4) de la proposició 4.5)} \\
&\leq \widehat{h}(m_0) + c && \text{(per definició de } c)
\end{aligned}$$

d'on obtenim $\widehat{h}(m_0) \leq c$, i per tant $m_0 \in T \subseteq N$, la qual cosa contradiu la definició de $m_0 \in M \setminus N$. Per tant, deduïm que $N = M$, d'on M és finitament generat com a A -mòdul. Així, com que M és un A -submòdul de $\phi(L)$ arbitrari, concloem que $\phi(L)$ és un mòdul moderat, com volíem. $\square$

Així, juntament amb la proposició clau 2.1, estem en condicions de provar el teorema principal de tipus Mordell-Weil per a mòduls de Drinfeld:

Teorema 5.1. *L'A-mòdul $\phi(L)$ és la suma directa del seu submòdul de torsió, que és finit, i un A-mòdul lliure de rang $\aleph_0$.*

Demostració. Calculem primer el rang de $\phi(L)$. Com que L és en particular una extensió finita de $\mathbb{F}_q(t)$, és numerable com a conjunt, i per tant el rang de $\phi(L)$ és com a màxim $\aleph_0$. Suposem, per reducció a l'absurd, que el rang de $\phi(L)$ no és $\aleph_0$; és a dir, que és finit. Com que, pel lema 5.1, $\phi(L)$ és moderat, que tingui rang finit implica que és finitament generat (ja que $\phi(L)$ és submòdul de si mateix). Sigui doncs $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ un conjunt finit de generadors de $\phi(L)$. Pel lema 4.3, existeix un conjunt S de places de L finit tal que ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_S$. Considerem també S_Z el conjunt de pols del conjunt Z (és a dir, S_Z està format per les places v de L tals que $v(z_i) < 0$ per algun $i \in \{1, \dots, n\}$). Com que Z és finit, obtenim que S_Z és finit, i per tant el conjunt $S' := S \cup S_Z$ també és finit. Així, com que $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_{S'}$ per construcció, el mòdul de Drinfeld ϕ també està definit sobre $\mathcal{O}_{S'}$, i remarcuem que $Z \subset \mathcal{O}_{S'}$.

Considerem ara una plaça no trivial v de L no pertanyent a S' , que existeix perquè S' és un conjunt finit i L té un nombre infinit de places. Notem que, si tot element de L pertanyés a $\mathcal{O}_{S'}$, tindríem $v(\alpha) = 0$ per a tot $\alpha \in L^*$ (ja que $v(\alpha) \geq 0$ i $v(\alpha^{-1}) \geq 0$), la qual cosa contradiu que v sigui no trivial. Per tant, com a A -submòdul, la inclusió de $\mathcal{O}_{S'}$ en $\phi(L)$ ha de ser estricta.

Així doncs, hem trobat un A -submòdul propi de $\phi(L)$ que conté el conjunt Z de generadors de $\phi(L)$, la qual cosa és una contradicció. Per tant, el rang del mòdul moderat $\phi(L)$ ha de ser $\aleph_0$. Recordem també que la finitud del submòdul de torsió de $\phi(L)$ ve donada per l'apartat (3) de la proposició 4.5. Així, la proposició 2.1 aplicada a $\phi(L)$ acaba la demostració. $\square$

Concloem aquesta secció amb l'observació que podem determinar de manera més directa les estructures de mòdul de Drinfeld de la clausura algebraica L^{alg} i la clausura separable L^{sep} :

Proposició 5.1. *Cadascun dels A-mòduls $\phi(L^{\text{alg}})$ i $\phi(L^{\text{sep}})$ és la suma directa d'un K-espai vectorial de dimensió $\aleph_0$ i un mòdul de torsió isomorf a $(K/A)^r$, on r és el rang de ϕ .*

Demostració. Siguin $a \in A \setminus \{0\}$ i $c \in L^{\text{alg}}$. Aleshores, per definició de clausura algebraica, l'equació $\phi_a(x) = c$ té solució en L^{alg} , i per tant $\phi(L)$ és un A -mòdul divisible. Notem ara que el polinomi $\phi_a(x) - c$ té derivada $a \neq 0$ (ja que $D(\phi_a) = a$ per la definició 3.2 de mòdul de Drinfeld), i per tant és separable. Així, si $c \in L^{\text{sep}}$, tenim que tota solució de $\phi_a(x) - c = 0$ pertany a L^{sep} , i per tant, en particular, $\phi(L^{\text{sep}})$ també és un A -mòdul divisible.

Pel teorema 7 de [Kap52], com que A és un domini de Dedekind, tot A -mòdul divisible és la suma directa d'un K -espai vectorial i el seu submòdul de torsió. Per la proposició 2.2 de [Dri74], el submòdul de torsió és $(K/A)^r$ tant per a $\phi(L^{\text{alg}})$ com per a $\phi(L^{\text{sep}})$, on r és el rang de ϕ . Els K -espais vectorials en cada cas han de tenir rang almenys $\aleph_0$ pel teorema 5.1, ja que $\phi(L^{\text{alg}})$ i $\phi(L^{\text{sep}})$ contenen $\phi(L)$. Així, com que L^{alg} i L^{sep} són numerables com a conjunts, concloem que el rang dels K -espais vectorials és precisament $\aleph_0$, i per tant l'enunciat queda demostrat. $\square$

5.2 Altres teoremes d'estructura de mòduls

En aquesta secció donem més resultats sobre anells (i en particular cossos) amb l'estructura de mòdul induïda per un A -mòdul de Drinfeld ϕ sobre L . Per això, fixem S un conjunt finit no buit de places de L tal que $\phi(L)$ estigui definit sobre $\mathcal{O}_S$ (que existeix pel lema 4.3). Així, per a tot $a \in A$, el polinomi ϕ_a envia $\mathcal{O}_S$ a $\mathcal{O}_S$, i podem considerar també l' A -submòdul $\phi(\mathcal{O}_S)$, que és A -submòdul de $\phi(L)$, així com l' A -submòdul $\phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$. També estudiarem l'estructura d' A -mòdul d'objectes del tipus $\phi(M)/\phi(L)$, on M és una extensió finita de L ; en efecte, notem que el producte escalar (5) definit pel mòdul de Drinfeld ϕ es pot estendre de forma natural a extensions de L .

Veurem ara, per fixar idees i consistència amb [Poo95], que $\phi(M/B)$ és isomorf com a A -submòdul a $\phi(M)/\phi(B)$, on M és una extensió finita qualsevol de L (pot ser L) i B és un subanell de L sobre el qual ϕ està definit. Per això, fem primer la següent observació:

Lema 5.2. *Sigui B un subanell de L . Aleshores, com a conjunts, es compleix $B \subseteq \phi(B)$. A més, si ϕ està definit sobre B , tenim igualtat com a conjunts $\phi(B) = B$.*

Demostració. Com que ϕ és un morfisme d'anells, tenim que $\phi_1 = \tau^0$ és la identitat de L , on 1 denota l'element neutre pel producte del cos $\mathbb{F}_q$. Per tant, per a tot element $\beta \in B$ d'un subanell B de L , tenim $\beta = \tau^0(\beta) = \phi_1(\beta) \in \phi(B)$. Així, tenim $B \subseteq \phi(B)$. A més, si ϕ està definit sobre B , és a dir, si els coeficients d' ϕ_a pertanyen a B per a tot $a \in A$, deduïm que $\phi(B) \subseteq B$, ja que B és un subanell. Obtenim doncs la igualtat com a conjunts $\phi(B) = B$. $\square$

Així, tenim el següent lema:

Lema 5.3. *Sigui M una extensió de L i B un subanell de L tal que ϕ està definit sobre B . Aleshores $\phi(M)/\phi(B)$ és isomorf com a A -mòdul a $\phi(M/B)$.*

Demostració. Recordem que hem comprovat al lema 5.2 anterior les igualtats com a conjunts $\phi(M) = M$ i $\phi(B) = B$. Així, veiem primer que la inclusió $\iota : \phi(B) \rightarrow \phi(M)$ és un morfisme de mòduls; és a dir, un morfisme de grups abelians que preserva l'estructura d' A -mòdul del domini i del codomini. Notem que és de fet un morfisme d'anells, ja que les operacions suma i producte al subanell $\phi(B)$ són les heretades de l'anell $\phi(M)$. A més, veiem que ι és compatible amb l'estructura d' A -mòdul donada per ϕ . En efecte, per a tot $a \in A$ i $\beta \in \phi(B)$, es compleix $\iota(\phi_a(\beta)) = \phi_a(\beta) = \phi_a(\iota(\beta))$.

Veiem ara que la següent projecció és també un morfisme de mòduls:

$$\begin{aligned}\pi : \phi(M) &\longrightarrow \phi(M/B) \\ \beta &\longmapsto \bar{\beta}\end{aligned}$$

Notem que π és de fet un morfisme d'anells exhaustiu, ja que ho és quan considerem el domini com a M i el codomini com a M/B , la qual cosa podem fer gràcies a les igualtats com a conjunts. Comprovem a més que π és compatible amb l'estructura d' A -mòdul donada per ϕ . És a dir, per a tot $a \in A$ i $\beta \in M$, s'ha de complir que $\pi(\phi_a(\beta)) = \phi_a(\pi(\beta))$. En efecte, com que $\phi(B) = B$, tenim

$$\begin{aligned}\phi_a(\pi(\beta)) &= \phi_a(\bar{\beta}) = \{\phi_a(\beta + \alpha) \mid \alpha \in B\} \\ &= \{\phi_a(\beta) + \phi_a(\alpha) \mid \alpha \in B\} \\ &= \{\phi_a(\beta) + \gamma \mid \gamma \in B\} \\ &= \overline{\phi_a(\beta)} = \pi(\phi_a(\beta))\end{aligned}$$

d'on concloem que π és un morfisme d' A -mòduls, com volíem.

A més, remarquem que el nucli de π són precisament els elements de B , i per tant de $\phi(B)$, de nou per la igualtat com a conjunts.

Així, hem obtingut la següent successió exacta d' A -mòduls:

$$0 \longrightarrow \phi(B) \xrightarrow{\iota} \phi(M) \xrightarrow{\pi} \phi(M/B) \longrightarrow 0$$

Per tant, pel teorema de l'isomorfisme, obtenim que $\phi(M)/\phi(B)$ i $\phi(M/B)$ són isomorfs com a A -mòduls, com volíem. $\square$

Observem ara que, per a cada plaça $v \notin S$ (i per tant $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_v$), la inclusió d' L en la seva completació respecte v , L_v , indueix un morfisme de grups $L/\mathcal{O}_S \rightarrow L_v/\mathcal{O}_v$ i es té un isomorfisme natural

$$L/\mathcal{O}_S \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathcal{V}(L) \setminus S} L_v/\mathcal{O}_v$$

Així, com que el mòdul de Drinfeld ϕ també indueix estructures d' A -mòdul a L_v i a $\mathcal{O}_v$, i ϕ està definit a $\mathcal{O}_v$ per a $v \notin S$, podem conèixer $\phi(L/\mathcal{O}_S) = \phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$ mitjançant l'estudi de $\phi(L_v/\mathcal{O}_v) = \phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ per a cada $v \notin S$.

Demostrem doncs el següent lema:

Lema 5.4. *Els A -mòduls $\phi(\mathcal{O}_S)$ i $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ (per a $v \notin S$) són moderats.*

Demostració. Un submòdul d'un mòdul moderat és moderat, així que $\phi(\mathcal{O}_v)$ sigui moderat segueix del fet que $\phi(L)$ és moderat pel lema 5.1.

Que $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ sigui moderat es prova de forma anàlega a la prova per $\phi(L)$ al lema 5.1 però fent servir la funció d'altura local V_v (equivalentment, la funció $\hat{h}_v$, relacionada amb $\hat{h}$ per la proposició 4.6) en comptes de la funció d'altura global $\hat{h}$. Específicament, fem servir

- el corollari 4.1 en comptes de (1) de la proposició 4.5
- (2) de la proposició 4.4 en comptes de (2) de la proposició 4.5
- (4) de la proposició 4.4 en comptes de (4) de la proposició 4.5
- la proposició 4.4 en comptes de (4) de la proposició 4.5 per demostrar que el submòdul de torsió de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ és finit

Explicitem el punt del submòdul de torsió. Recordem que, pel lema 5.3, tenim la igualtat $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v) = \phi(L_v/\mathcal{O}_v)$ com a A -mòduls, i per tant tindran el mateix grup de torsió per l'estructura donada per ϕ . Considerem doncs la proposició 4.4. L'apartat (1) ens diu que V_v induïx una funció sobre $L_v/\mathcal{O}_v$. Sigui ara $\bar{x}$ un element de grup de torsió de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$, de representant $x \in \phi(L_v) = L_v$; és a dir, existeix $b \in A \setminus \{0\}$ tal que $\phi_b(\bar{x}) = \bar{0}$. Per tant, per a cada $y \in \mathcal{O}_v$, es compleix $\phi_b(x + y) \in \phi(\mathcal{O}_v) = \mathcal{O}_v$. Per l'apartat (3), això implica que $V_v(x + y) = 0$ per a cada $y \in \mathcal{O}_v$, d'on deduïm que $V_v(\bar{x}) = 0$. Per l'apartat (2), només hi ha un nombre finit d'elements $\bar{x} \in L_v/\mathcal{O}_v$ complint $V_v(\bar{x}) \geq 0$, i per tant, només hi ha un nombre finit d'elements de torsió de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$. $\square$

De fet, veiem que el submòdul de torsió de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ és nul per a tota plaça v menys un nombre finit:

Lema 5.5. *Per a totes les places v de L menys un nombre finit, l' A -mòdul $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ és lliure de torsió.*

Demostració. Sigui $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ i sigui α el coeficient principal del polinomi twistat ϕ_a . Com que a és en particular un element no nul, obtenim que α també és no nul i per tant el conjunt $S_a := \{v \in \mathcal{V}(L) \mid v(\alpha) \neq 0\}$ és finit (pel teorema 1.2). D'altra banda, considerem el conjunt fixat $S \subset \mathcal{V}(L)$ tal que el mòdul de Drinfeld ϕ està definit sobre l'anell de valoració $\mathcal{O}_v$ per a tota plaça $v \in \mathcal{V}(L) \setminus S$, donat pel lema 4.3. Així, el conjunt finit $S' := S \cup S_a$ és tal que, per a tota plaça v fora de S' , ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_v$ i el coeficient principal de ϕ_a és una unitat de $\mathcal{O}_v$ (ja que $v(\alpha) = 0$).

Així doncs, considerem una plaça $v \in \mathcal{V}(L) \setminus S'$ i la funció V_v associada sobre el cos local L_v definida a la proposició 4.1. Per l'apartat (4) de la proposició 4.4, com que el coeficient principal de ϕ_a és per construcció una unitat a $\mathcal{O}_v$, es té $V_v(x) = \tilde{v}(x) = \min\{0, v(x)\}$ per a tot $x \in L$. Per tant, tenim que $V_v(x) = 0$ si i només si $v(x) \geq 0$; és a dir, si i només si $x \in \mathcal{O}_v$. Per tant, per l'apartat (3) de la mateixa proposició 4.4, tenim que existeixen $b \in A \setminus \{0\}$ i $x \in L$ tals que $\phi_b(x) \in \mathcal{O}_v$ (i per tant, $\phi_b(\bar{x}) = 0$) si i només si $x \in \mathcal{O}_v$ (és a dir, si i només si $\bar{x} = 0$), d'on deduïm que la torsió de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ és nul·la. $\square$

Ara, per demostrar que els mòduls que estem considerant tenen rang $\aleph_0$, farem servir el següent lema:

Lema 5.6. *Sigui p un nombre primer i $\alpha \in \mathbb{Q}$. Per a cada natural $k \geq 1$, existeixen enters positius $n_1, \dots, n_k$ tals que els nombres racionals $p^i(\alpha - n_j)$ per a $i \in \mathbb{N}$ i $j \in \{1, \dots, k\}$ són diferents dos a dos i negatius.*

Demostració. Escollim $n_1, \dots, n_k$ com a enters grans consecutius. Aleshores les fraccions $(\alpha - n_j)/(\alpha - n_{j'})$ per a $j, j' \in \{1, \dots, k\}$ estaran a prop de la unitat, sense ser iguals (ja que els enters són diferents), i en particular no seran potències del primer $p \geq 2$. Per tant, totes les potències de la forma $(p^i(\alpha - n_j))/(p^{i'}(\alpha - n_{j'}))$, amb $i, i' \in \mathbb{N}$, seran diferents de 1 si $j' \neq j$ (pel cas $j = j'$, notem que $p^i = p^{i'}$ si i només si $i = i'$). $\square$

Lema 5.7. *Els A -mòduls $\phi(\mathcal{O}_S)$ i $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ (per a $v \notin S$) tenen rang $\aleph_0$.*

Demostració. El conjunt $\mathcal{O}_S \subseteq L$ és numerable perquè L ho és, i $L_v/\mathcal{O}_v$ és numerable perquè és un sumand directe de $L/\mathcal{O}_S$ (i L és numerable). Per tant, els rangs de $\mathcal{O}_S$ i $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ són com a molt $\aleph_0$. Per demostrar que el rang de cada estructura és exactament $\aleph_0$, trobarem k elements independents $x_1, \dots, x_k$ de cada estructura per a $k \geq 1$ arbitrari.

Considerem primer $\phi(\mathcal{O}_S)$. Prenem una plaça w a S i considerem V_w la funció local corresponent. Pel teorema de Riemann-Roch (veure [Lor91, capítol 9], per exemple), existeix un element de L tal que el seu únic pol, que podem escollir d'ordre 1, és a S , i per tant aquest element pertany a $\mathcal{O}_S$ i la imatge $w(\mathcal{O}_S)$ conté tots els enters negatius. Per l'apartat (4) de la proposició 4.1, existeix $\alpha \in \mathbb{Q}$ (corresponent a $v(c)/(d-1)$ en la proposició) tal que $V_w(\mathcal{O}_v)$ conté $\alpha - n$ per a tot natural n . Escollim doncs naturals $n_1, \dots, n_k > 0$ prou grans com al lema 5.6, i considerem elements $x_i \in \mathcal{O}_S$ tals que $V_w(x_i) = \alpha - n_i < 0$ per a $i \in \{1, \dots, k\}$ (i per tant, com que $V_w(0) = 0$, tenim $x_i \neq 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$).

Volem veure que els elements $x_1, \dots, x_k$ són A -independents a $\phi(\mathcal{O}_S)$. Suposem que existeixen elements $a_1, \dots, a_k \in A$ tals que

$$\phi_{a_1}(x_1) + \dots + \phi_{a_k}(x_k) = 0$$

Aleshores, pel corollari 4.1, tenim

$$V_w(\phi_{a_i}(x_i)) = (\deg \phi_{a_i}) V_w(x_i) = (\deg \phi_{a_i}) (\alpha - n_i)$$

per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$. Com que $\phi_A \subseteq L\{\tau\}$, tenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$, o bé $\deg \phi_{a_i} = 0$ (si $a_i = 0$) o bé $\deg \phi_{a_i}$ és una potència positiva de q , que és una potència positiva d'un primer p ; per tant, pel lema 5.6, tots els valors $V_w(\phi_{a_i}(x_i))$ són diferents i negatius quan descartem els possibles $i \in \{1, \dots, k\}$ pels que $a_i = 0$. Si tenim $a_i \neq 0$ per a almenys un $i \in \{1, \dots, k\}$, existeix $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $V_w(\phi_{a_j}(x_j)) < V_w(\phi_{a_i}(x_i)) \leq 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $j \neq i$. Per l'apartat (6) de la proposició 4.1, això implica que $\phi_{a_1}(x_1) + \dots + \phi_{a_k}(x_k) \neq 0$, la qual cosa és una contradicció. Per tant, només pot haver-hi una combinació lineal del tipus $\phi_{a_1}(x_1) + \dots + \phi_{a_k}(x_k) = 0$ si $a_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$, la qual cosa ens diu que hem trobat k elements A -independents per a $k \geq 1$ un enter arbitrari. Així, $\phi(\mathcal{O}_S)$ té rang $\aleph_0$, com volíem.

Fem servir una demostració anàlega per al cas de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$, canviant la funció local V_w per l'associada a v , V_v , i considerant $L_v/\mathcal{O}_v$ com al seu domini en comptes de $\mathcal{O}_S$ (la qual cosa podem fer per l'apartat (1) de la proposició 4.4). Així, com que $v(L_v/\mathcal{O}_v)$ està ben definida i conté tots els enters negatius, podem trobar pels raonaments d'abans un racional $\alpha \in \mathbb{Q}$, enters $n_1, \dots, n_k$ prou grans, i elements $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in L_v/\mathcal{O}_v$ tals

que $n_1, \dots, n_k$ compleixin les condicions del lema 5.6 i $V_v(\bar{x}) = \alpha - n_i < 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$ (i per tant, com que $V_v(\bar{0}) = 0$, tenim $x_i \neq 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$). La resta de pasos segueixen igual per mostrar que $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ són elements A -independents a $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$. Així, $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ també té rang $\aleph_0$, com volíem. $\square$

Així, podem provar el següent teorema d'estructura:

Teorema 5.2. *Cadascun dels A -mòduls $\phi(\mathcal{O}_S)$, $\phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$ i $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ (per a $v \notin S$) és la suma directa d'un A -mòdul de rang $\aleph_0$ i un mòdul de torsió finit.*

Demostració. Els casos de $\phi(\mathcal{O}_S)$ i $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ surten de combinar els lemes 5.4, 5.7 i la proposició 2.1 (notant també, com a la demostració del lema 5.4, que els mòduls de torsió de $\phi(\mathcal{O}_S)$ i de $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$ són finits per l'apartat (3) de la proposició 4.5 i per la proposició 4.4, respectivament).

Remarquem ara que el conjunt de places de L té cardinalitat $\aleph_0$. En efecte, hi ha un nombre numerable infinit de polinomis irreductibles mòncics de $\mathbb{F}_q[a]$, per a $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ qualsevol, i totes les valoracions de L estenen places associades a polinomis irreductibles mòncics de $\mathbb{F}_q[a]$ o la plaça de l'infinit. Ara notem que $\phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$ és la suma directa dels mòduls $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$, per a $v \notin S$, on cadascun d'aquests mòduls és la suma directa d'un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$ i un mòdul de torsió finit; de fet, pel lema 5.5, podem redefinir S perquè el mòdul de torsió sigui nul. Per tant, per la descomposició de l' A -mòdul $\phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$ en termes dels $\phi(L_v)/\phi(\mathcal{O}_v)$, deduïm que $\phi(L)/\phi(\mathcal{O}_S)$ és la suma directa d'un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ i un mòdul de torsió, que també ha de ser finit, com volíem. $\square$

Passem ara a descriure l'estructura d' A -mòdul de $\phi(M)/\phi(L)$, per a M una extensió finita qualsevol de L :

Lema 5.8. *Si M és una extensió separable finita de L . Aleshores $\phi(M)/\phi(L)$ és moderat.*

Demostració. Com que un submòdul d'un mòdul moderat és moderat, podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que M és una extensió de Galois de L . Recordem que, pel lema 5.1, $\phi(M)$ és un mòdul moderat, ja que M és en particular una extensió finita de K . Siguin $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ els elements de $\text{Gal}(M/L)$. Veiem que cada σ_i commuta amb l'acció d' A . En efecte, donat $a \in A$, podem escriure $\phi_a = \sum_{i=0}^d a_i \tau^i$ per a un cert natural d i elements $a_0, \dots, a_d$ de L , per definició del mòdul de Drinfeld ϕ . Així doncs, per a tot $\beta \in M$ i $\sigma \in \text{Gal}(M/L)$, tenim

$$\begin{aligned} \sigma(\phi_a(\beta)) &= \sigma \left(\sum_{i=0}^d a_i \tau^i(\beta) \right) = \sigma \left(\sum_{i=0}^d a_i \beta^{q^i} \right) = \sum_{i=0}^d \sigma(a_i) \sigma(\beta^{q^i}) \\ &= \sum_{i=0}^d a_i \sigma(\beta)^{q^i} = \sum_{i=0}^d a_i \tau^i(\sigma(\beta)) = \phi_a(\sigma(\beta)) \end{aligned}$$

Així doncs, el següent morfisme d' A -mòduls està ben definit:

$$\begin{aligned} \phi(M) &\longrightarrow \phi(M) \oplus \dots \oplus \phi(M) \\ x &\longmapsto (\sigma_1(x) - x, \dots, \sigma_n(x) - x) \end{aligned}$$

i té nucli $\phi(L)$, ja que l'extensió és de Galois. Així, pel teorema de l'isomorfisme, el quocient $\phi(M)/\phi(L)$ és isomorf a la imatge del morfisme, que és un submòdul d'una suma directa finita de mòduls moderats, i per tant moderat. Per tant, $\phi(M)/\phi(L)$ és un A -mòdul moderat, com volíem veure. $\square$

Necessitarem també el següent lema:

Lema 5.9. *Sigui M una extensió separable finita no trivial de L . Aleshores $\phi(M)/\phi(L)$ té rang $\aleph_0$.*

Demostració. Pel teorema 5.1, sabem que $\phi(M)$ té rang $\aleph_0$. Per tant, el rang de $\phi(M)/\phi(L)$ és com a molt $\aleph_0$. Així, tenim prou amb veure que, per a cada nombre enter $k > 0$, existeixen elements $x_1, \dots, x_k \in \phi(M)$ amb imatges A -independents a $\phi(M)/\phi(L)$.

Pel lema 4.3, existeix un conjunt finit S de valoracions de L tal que ϕ està definit sobre $\mathcal{O}_S$. Prenem $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$ i redefinim S si és necessari perquè contingui també les valoracions necessàries perquè el coeficient principal de ϕ_a sigui una unitat a $\mathcal{O}_S$, com a la demostració del lema 5.5. Així, per l'apartat (4) de la proposició 4.4, si w és una extensió d'una plaça de L que no pertany a S , la funció local V_w corresponent és igual a $\tilde{w} = \min\{0, w\}$ sobre M .

Pel teorema de densitat de Čebotarev per a cossos de funcions (veure [Jar82]), existeixen ideals maximals $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ de L tals que no es corresponen amb places de S i que descomposen completament en M . Per a cada $i \in \{1, \dots, k\}$, prenem dos primers $\mathfrak{q}_i$ i $\mathfrak{r}_i$ de la descomposició de $\mathfrak{p}_i$ sobre M . Després, per algun algorisme d'aproximació (com [Sti09, capítol 1, teorema 1.6.5]), podem trobar per a cada $i \in \{1, \dots, k\}$, elements $x_i \in M$ tals que x_i és enter a les valoracions associades a tots els primers $\mathfrak{q}_j$ i $\mathfrak{r}_j$ per a $j \in \{1, \dots, k\}$ excepte a la associada a $\mathfrak{q}_i$, on x_i no és enter.

Considerem ara una relació de dependència lineal per a les imatges de $x_1, \dots, x_k$ sobre $\phi(M)/\phi(L)$; és a dir, considerem elements $a_1, \dots, a_k \in A$ i $y \in L$ tals que

$$\phi_{a_1}(x_1) + \dots + \phi_{a_k}(x_k) = y$$

Fixem $i \in \{1, \dots, k\}$. Com que cadascun dels sumands a l'esquerra és enter a $\mathfrak{r}_i$, també ho és y . Com que y és un element de L , i $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{r}_i \cap L = \mathfrak{q}_i \cap L$, això implica que y és enter a $\mathfrak{p}_i$, i per tant també a $\mathfrak{q}_i$. D'altra banda, per a $j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$, tenim que x_j és enter a $\mathfrak{q}_i$ per construcció, i, com que ϕ està definit sobre l'anell de valoració corresponent a $\mathfrak{q}_i$ (perquè hem agafat la plaça de $\mathfrak{p}_i$ fora de S), tenim que $\phi_{a_j}(x_j)$ també és enter a $\mathfrak{q}_i$. En deduïm que $\phi_{a_i}(x_i)$ també ha de ser enter a $\mathfrak{q}_i$. Per tant, si w i V_w són la valoració i funció d'altura local associades a $\mathfrak{q}_i$, respectivament, com que $V_w = \tilde{w}$, obtenim $V_w(\phi_{a_i}(x_i)) = 0$ i $V_w(x_i) < 0$, perquè x_i no és enter a $\mathfrak{q}_i$ per construcció. Ara bé, pel corollari 4.1, tenim la relació $V_w(\phi_{a_i}(x_i)) = (\deg \phi_{a_i})V_w(x_i)$, d'on s'ha de complir que $\deg \phi_{a_i} = 0$, la qual cosa només és possible per a $a_i = 0$. Com que aquest argument és vàlid per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$, concloem que les imatges de $x_1, \dots, x_k$ a $\phi(M)/\phi(L)$ són A -independents, com volíem. Així, $\phi(M)/\phi(L)$ té rang $\aleph_0$. $\square$

Teorema 5.3. *Sigui M una extensió separable finita no trivial de L . Aleshores $\phi(M)/\phi(L)$ és la suma directa d'un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$ i un mòdul de torsió finit.*

Demostració. Pels lemes 5.8 i 5.9, l' A -mòdul $\phi(M)/\phi(L)$ és moderat i té rang $\aleph_0$, respectivament. Per tant, per la proposició 2.1, $\phi(M)/\phi(L)$ és isomorf a la suma directa d'un A -mòdul lliure i del seu submòdul de torsió. Com que $\phi(M)/\phi(L)$ és moderat (pel lema 5.8), tenim que el seu submòdul de torsió és finitament generat; per tant, pel teorema 10.15 de [Jac89], l' A -submòdul de torsió de $\phi(M)/\phi(L)$ és isomorf a una suma directa del tipus

$$A/I_1 \oplus \cdots \oplus A/I_n$$

amb $I_1 \subset \cdots \subset I_n$ ideals no nuls d' A . Així, com que tot ideal no nul d' A té índex finit, deduïm que l' A -submòdul de torsió de $\phi(M)/\phi(L)$ és finit, la qual cosa conclou la demostració. $\square$

Notem que la hipòtesi de separabilitat és necessària perquè el teorema 5.3 funcioni. En efecte, si prenem $M = L^{1/p}$, que és una extensió purament inseparable sobre L de grau p , qualsevol potència positiva del morfisme de Frobenius τ actua com el morfisme zero sobre M/L , de manera que un polinomi twistat $a_0 + a_1\tau + \cdots + a_d\tau^d$, on $a_i \in A$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, actua només amb el seu terme constant sobre M/L . En altres paraules, com, per definició de mòdul de Drinfeld, el terme constant del polinomi twistat ϕ_a és a per a tot $a \in A$, tenim que l'estructura d' A -mòdul de $\phi(M)/\phi(L)$ és la mateixa que la de M/L . Ara bé, amb aquesta estructura d' A -mòdul usual, M/L és un espai vectorial de dimensió finita sobre K .

Ara, per determinar l'estructura d' A -mòdul de Drinfeld de la perfecció L^{perf} de L , fem la següent observació:

Lema 5.10. *Sigui F un cos de característica p . Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $F^{\text{perf}}/F^{1/p^n}$ és una extensió purament inseparable.*

Demostració. Recordem que, en característica p , els elements de F^{perf} són les arrels p -èsimes d'elements de F . Tenim de fet la igualtat $F^{\text{perf}} = \sum_{i=0}^{\infty} F^{1/p^i}$, i remarquem que $F^{1/p^i} \subseteq F^{1/p^j}$ si i només si $i, j \in \mathbb{N}$ són tals que $i \leq j$. Així, donat $n \in \mathbb{N}$, si $\alpha \in F^{\text{perf}} \setminus F^{1/p^n}$, aleshores existeix $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ tal que $\alpha \in F^{1/p^m}$. Per tant, tenim que $(\alpha^{p^{m-n}})^{p^n} = \alpha^{p^m} \in F$, d'on $\alpha^{p^{m-n}} \in F^{1/p^n}$. Així, α és solució del polinomi $x^{p^{m-n}} - \alpha^{p^{m-n}} = (x - \alpha)^{p^{m-n}}$ inseparable sobre F^{1/p^n} , i, com que $\alpha \notin F^{1/p^n}$, deduïm que aquest és el seu polinomi irreductible sobre F^{1/p^n} . Per tant, α és inseparable sobre F^{1/p^n} , d'on concloem que l'extensió $F^{\text{perf}}/F^{1/p^n}$ és purament inseparable. $\square$

Així, podem demostrar l'últim teorema d'estructura que donarem:

Teorema 5.4. *$\phi(L^{\text{perf}})$ és la suma directa d'un A -mòdul lliure de rang $\aleph_0$ i un mòdul de torsió finit.*

Demostració. El rang de $\phi(L^{\text{perf}})$ és almenys el de $\phi(L)$, que és $\aleph_0$ pel teorema 5.1, i és de fet igual a $\aleph_0$ perquè L^{perf} és numerable con a conjunt. Provem ara que $\phi(L^{\text{perf}})$ és moderat. Sigui M un A -submòdul de $\phi(L^{\text{perf}})$ de rang finit r . Siguin $m_1, \dots, m_r$ elements de M tals que la seva imatge al K -espai vectorial $M \otimes_A K$ en forma una base. Aleshores, com que estem en característica p , els elements $m_1, \dots, m_r$ i doncs l' A -submòdul N que generen pertanyen a L^{1/p^n} per a un cert $n \geq 1$. Notem que M/N

és un A -mòdul de torsió, ja que M i N tenen el mateix rang. Per tant, per a tot $\alpha \in M$ existeixen $a \in A$ i $m \in N$ tals que α és arrel del polinomi $\phi_a(x) - m$, que és separable. Com que, pel lema 5.10, L^{perf} és purament inseparable sobre L^{1/p^n} , això implica que tot element de M ha de pertànyer a L^{1/p^n} ; és a dir, M és un A -submòdul de $\phi(L^{1/p^n})$. Ara bé, com que L^{1/p^n} és un cos de funcions global, i, per la mateixa demostració del lema 5.1, tenim que l' A -mòdul $\phi(L^{1/p^n})$ és moderat, deduïm que M és finitament generat.

Així, hem demostrat que $\phi(L^{\text{perf}})$ és moderat i té rang $\aleph_0$. A més, com que tot element de torsió $\phi(L^{\text{perf}})$ és un element de torsió d'un cert cos de funcions global $\phi(L^{1/p^k})$ (amb k natural), i hem vist que l' A -submòdul de torsió de $\phi(L^{1/p^k})$ és finit per l'apartat (3) de la proposició 4.5, deduïm que l' A -submòdul de torsió de $\phi(L^{\text{perf}})$ és finit. Així, concloem amb aplicar la proposició 2.1 a $\phi(L^{\text{perf}})$. $\square$

6 Comparació amb l'estructura multiplicativa d'un cos de nombres

Considerem ara F un cos de nombres i i denotem per $\mathcal{O}$ el seu anell d'enters. Es sap que l'estructura de F^* com a $\mathbb{Z}$ -mòdul és anàlega a l'estructura d' A -mòdul de L donada per un A -mòdul de Drinfeld sobre L , descrita al teorema 5.1:

Proposició 6.1. *Com a grup abelià abstracte, F^* és isomorf al producte del seu subgrup de torsió (és a dir, el grup d'arrels de la unitat de F) i un grup abelià lliure de rang $\aleph_0$.*

Demostració. Sigui U el grup d'unitats d' $\mathcal{O}$ i sigui $\mathfrak{B}$ el grup d'ideals fraccionaris principals. Tenim una successió exacta del tipus

$$0 \rightarrow U \rightarrow F^* \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow 0 \quad (12)$$

Per la finitud del nombre de classes, el grup $\mathfrak{B}$ té índex finit en el grup d'ideals fraccionaris, que s'identifica amb el grup abelià lliure de divisors de F . Per tant, $\mathfrak{B}$ també és un grup lliure de rang $\aleph_0$, i doncs la successió (12) escindeix:

$$F^* \cong U \times \mathfrak{B}$$

Pel teorema de les unitats de Dirichlet, tenim que U és producte del grup d'arrels de la unitat de F i un grup abelià finit, d'on obtenim el resultat. $\square$

També tenim els següents anàlegs als teoremes 5.2 i 5.3:

Proposició 6.2. *Sigui S un conjunt finit de places de F (incloent les infinites), i sigui $\mathcal{O}_S$ l'anell de S -enters en F . Aleshores es compleixen*

- (1) $\mathcal{O}_S^*$ és un grup abelià finitament generat.
- (2) $F^*/\mathcal{O}_S^*$ és un grup abelià lliure de rang $\aleph_0$.

- (3) Si E és una extensió finita de F , aleshores el quocient E^*/F^* és isomorf al producte d'un grup abelià lliure de rang $\aleph_0$ amb un grup de torsió finit.

Demostració.

- (1) És conseqüència del teorema de les S -unitats de Dirichlet ([Lan96, capítol 5, secció 1, pàgines 104-105])
- (2) La demostració és anàlega a la de la proposició 6.1 anterior considerant $\mathcal{O}_S$ en comptes d' U i el grup d'ideals principals corresponents a places de S , identificant aquest últim dins del grup de divisors amb suport S .
- (3) Es demostra com al teorema 5.3, amb una demostració anàlega al lema 5.8, amb una estructura de $\mathbb{Z}$ -mòdul multiplicativa (en efecte, aquesta demostració per als cossos de nombres va inspirar a Poonen per a la prova del lema 5.8).

□

A Dominis de Dedekind

Aquesta secció segueix les definicions del capítol 1 de [Lor91], i també hem considerat el capítol 10 de [Jac89].

Definició A.1. Sigui A un subanell d'un anell B . Es diu que un element α de B és **integral sobre** A si és arrel d'un polinomi mònic $f(y)$ en $A[y]$. Es diu que l'anell B és **enter sobre** A o una **extensió entera d'** A si tot element de B és enter sobre A .

Definició A.2. Sigui A un subanell d'un cos L . La **clausura entera** B d' A en L és l'anell format pels elements de L integrals sobre A . Es diu que un domini A és **íntegrament tancat** si és igual a la seva clausura entera al seu cos de fraccions.

Definició A.3. Un anell es diu **noetherià** si tot ideal de l'anell és finitament generat.

Definició A.4. Sigui A un anell. Una **cadena d'ideals primers de llargada** n en A és un conjunt de $n + 1$ ideals primers $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ tals que $\mathfrak{p}_n \subset \dots \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_0$.

L'**altura** d'un ideal primer $\mathfrak{p}$, denotat per $\text{ht}(\mathfrak{p})$, és el suprem de totes les llargades de cadenes d'ideals primers en A amb $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. La **dimensió de Krull d'** A es defineix com

$$\dim(A) := \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primer d}'A\}$$

Definició A.5. Sigui D un domini d'integritat. Es diu que l'anell D és un **domini de Dedekind** si té les següents tres propietats:

- (i) D és noetherià.
- (ii) D té dimensió de Krull 1.
- (iii) D és íntegrament tancat.

Tenim el següent teorema demostrat al llarg del capítol 10 de [Jac89]:

Teorema A.1 ([Jac89, capítol 10]). *Sigui D un domini. Aleshores les següents propietats són equivalents:*

- D és un domini de Dedekind.
- Tot ideal fraccionari no nul de D és invertible.
- Tot ideal propi de D es pot escriure de manera única com a producte d'ideals primers.
- D és noetherià i $D_{\mathfrak{m}}$ és un anell de valoració discreta per a tot ideal maximal $\mathfrak{m}$ de D .

B Una prova de finitud de generació

Aquest apartat es centra en provar l'assertió del lema 4.3 que l'anell A és un $\mathbb{F}_q[a]$ -mòdul finitament generat per a qualsevol $a \in A \setminus \mathbb{F}_q$. Veurem que aquesta prova no depèn de la finitud del cos $\mathbb{F}_q$, així que ho provarem per a un cos de constants k arbitrari. Recordem que, en aquest context de cossos de funcions, les valoracions d'una extensió finita $L/k(t)$ són les trivials sobre k (la qual cosa és automàticament certa quan k és finit).

Farem servir els següents dos lemes que hem considerat implícitament a la secció 1 i un teorema de [Lor91]; la nostra prova principal serà un corollari.

Lema B.1. *Siguin k un cos, t un element transcendent sobre k , i $L/k(t)$ una extensió finita tal que k és algebraicament tancat a L . Aleshores, per a tot $a \in L \setminus k$, $L/k(a)$ és una extensió finita.*

Demostració. Donat $a \in A \setminus k$, considerem el morfisme d'anells $\varphi : k[t] \rightarrow k[a]$ definit com $\varphi(p(t)) = p(a)$ per a tot $p(t) \in k[t]$. Veiem que aquest morfisme té nucli no nul. En efecte, si $p(t)$ és un polinomi no nul de $k[t]$ tal que $\varphi(p(t)) = p(a) = 0$, aleshores a és algebraic sobre k . Però, per hipòtesi, els únics elements de L algebraics sobre k són els elements de k , i tenim $a \in L \setminus k$. Per tant, arribem a contradicció, d'on φ ha de ser injectiu. D'altra banda, el morfisme és clarament exhaustiu, ja que qualsevol polinomi $p(a)$ de $k[a]$ és imatge del polinomi $p(t)$ de $k[t]$. Per tant, $k[t]$ i $k[a]$ són anells isomorfs, i doncs $L/k(a)$ també és una extensió finita. $\square$

Lema B.2 ([Jac89, capítol 10, teorema 10.8]). *Sigui A un subanell d'un cos K . Aleshores la clausura entera d' A en K és la intersecció de tots els anells de valoració de K que contenen A .*

El teorema clau és el següent:

Teorema B.1 ([Lor91, capítol X, teorema 1.7]). *Siguin k un cos, t un element transcendent sobre k , $L/k(t)$ una extensió finita, i B la clausura entera de $k[t]$ en L . Aleshores B és un $k[t]$ -mòdul finitament generat.*

Corollari B.1. *Siguin k un cos, t un element transcendent sobre k i $L/k(t)$ una extensió finita tal que k és algebraicament tancat a L . Sigui v_∞ una plaça no trivial de L que és trivial en k . Sigui A l'anell format pels elements de L enters a totes les places menys potser v_∞ ; és a dir*

$$A = \bigcap_{v \in \mathcal{V}(L/k) \setminus \{v_\infty\}} \mathcal{O}_v$$

Sigui $a \in A \setminus k$. Aleshores A és un $k[a]$ -mòdul finitament generat.

Demostració. Veiem que, donat $a \in A \setminus k$, la clausura entera de $k[a]$ és precisament A . En efecte, per construcció, per a tota plaça v diferent de v_∞ , tenim $A \subseteq \mathcal{O}_v$, i per tant $k[a] \subseteq \mathcal{O}_v$. D'altra banda, pel lema B.1, l'element a és transcendent sobre k , i per tant, pel teorema 1.2, té com a mínim un zero i un pol. Per tant, com que, per construcció de l'anell A , l'únic pol possible d' a és v_∞ , s'ha de complir que $v_\infty(a) < 0$;

és a dir, $a \notin \mathcal{O}_{v_\infty}$. Així, hem vist que $k[a]$ està contingut a tots els anells de valoració de L menys $\mathcal{O}_{v_\infty}$. Per tant, pel lema B.2, la clausura entera de $k[a]$ en L és precisament igual a A . Ara bé, pel teorema B.1 (i perquè $L/k(a)$ també és una extensió finita pel lema B.1), aquesta clausura entera A és un $k[a]$ -mòdul finitament generat, com volíem provar. $\square$

Notem que, pel teorema de la base de Hilbert, $R[t]$ és un anell noetherià si l'anell R ho és, que un cos és en particular un anell noetherià, i que tot mòdul finitament generat sobre un mòdul noetherià és noetherià. Per tant, el corol·lari (B.1) implica que l'anell A definit és un anell noetherià. Així, juntament amb l'observació 1.9 i el teorema A.1, hem donat una prova alternativa que l'anell A és un domini de Dedekind.

Bibliografia

- [AW45] Emil Artin and George Whaples. Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. *Amer. Math. Soc.*, 51(7):469–492, 1945.
- [Den92] Laurent Denis. Hauteurs canoniques et modules de Drinfeld. *Math. Ann.*, 294:213–223, 1992.
- [DF04] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons, Inc., 3 edition, 2004.
- [Dri74] V. G. Drinfeld. Elliptic modules. *Math. USSR Sbornik*, 23(4):561–592, 1974.
- [Gos96] David Goss. *Basic Structures of Function Field Arithmetic*. Springer-Verlag, 1 edition, 1996.
- [Jac89] Nathan Jacobson. *Basic Algebra II*. W. H. Freeman and Company, 2 edition, 1989.
- [Jar82] Moshe Jarden. The Čebotarev density theorem for function fields: an elementary approach. *Math. Ann.*, 261:467–475, 1982.
- [Kap52] Irving Kaplansky. Modules over Dedekind rings and valuation rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:327–340, 1952.
- [Keu99] Frans Keune. *Number Fields*. Springer-Verlag, 1 edition, 1999.
- [Lan96] Serge Lang. *Cyclotomic Fields I and II*. Springer-Verlag, 2 edition, 1996.
- [Lor91] Dino Lorenzini. *An Invitation to Arithmetic Geometry*. American Mathematical Society, 1 edition, 1991.
- [Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Springer-Verlag, 1 edition, 1999.
- [Poo95] Bjorn Poonen. Local height functions and the Mordell–Weil theorem for Drinfeld modules. *Compos. Math.*, 97:349–368, 1995.
- [Ros02] Michael Rosen. *Number Theory in Function Fields*. Springer, 1 edition, 2002.
- [Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*, volume 67. Springer, 1 edition, 1979.
- [Sti09] Henning Stichtenoth. *Algebraic Function Fields and Codes*. Springer-Verlag, 2 edition, 2009.
- [Tae10] Lenny Taelman. A Dirichlet unit theorem for Drinfeld modules. *Math. Ann.*, 348:899–907, 2010.
- [ZS58] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative Algebra*. Princeton, N.J., Van Nostrand, 1 edition, 1958.