Exponencial de Carlitz: sobre certs anàlegs dels nombres e i π sobre el cos de funcions d'una variable sobre un cos finit

Universitat Autónoma de Barcelona

Grau de Matemàtiques

Tutor:
Francesc Bars Cortina

Autor:
Fernando Alaejos García

Glossari de Notacions

- R: Designa un anell, usualment commutatiu (en cas que no es digui el contrari).
- N: Designa un cos qualsevol.
- $\bar{N}$: és la clausura separable fixada del cos K.
- $\mathbb{N},\ \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: Designen els conjunts dels naturals, enters, racionals, reals i complexos respectivament. On designarem per $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N}\ :\ p\ primer\ \}$.
- p: Un primer fixat ($p \in \mathbb{P}$).
- q: Denota una potència d'un primer fixat ($q = p^n$ per $p \in \mathbb{P}$).
- $\mathbb{Z}_p = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\ :\ a_i \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ p-1\}\ tal\ que\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $\mathbb{Q}_p = \left\{\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i\ :\ a_i \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ p-1\}\ tal\ que\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \left\{\sum_{i=-k}^{\infty} a_i T^{-i}\ :\ a_i \in \mathbb{F}_q\ amb\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $S_\infty = \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{Z}_p$.
- $\mathbf{ch}(\bullet)$: Funció característica

$$\begin{aligned} \mathbf{ch} : \mathbb{Z} &\longrightarrow R \\ n &\longmapsto\ 1_R +\ \cdots\ + 1_R \end{aligned}$$

  Designarem per $\mathbf{ch}(R) := Ker(\mathbf{ch})$ per R un anell, la característica de K.
- $\mathbf{deg\_tr}_K(\bullet)$, $deg(\bullet)$: Grau de trascendència respecte K i grau d'un polinomi respectivament.
- $\exp(\bullet)$: Funció exponencial complexa usual.
- e_C: Funció exponencial de Carlitz. Una definició d'aquesta es dóna en la pàgina 7.
- $\mathbb{F}_q$: Grup finit amb ordre q.
- $\mathbb{A} := \mathbb{F}_q[T]$. És l' anell de polinomis en variable T amb coeficients a $\mathbb{F}_q$.
- $\mathcal{A}(d) := \{a \in \mathbb{A}\ :\ deg(a) < d\} \subset \mathbb{A}$. Per conveni $\mathcal{A}_0 = \{0\}$. Observem que $\mathbb{A} = \bigcup_{d \geqslant 0} \mathcal{A}(d)$.
- $\mathcal{A}^+(d) := \{a \in \mathcal{A}(d)\ :\ a\ monic\ \} \subset \mathcal{A}(d)$.
- K : Designa una extensió finita de $\mathbb{F}_q(T)$ on $\mathbb{F}_q(T)$ és el cos de fraccions de $\mathbb{A}$.
- $[i] := T^{q^i} - T \in \mathbb{A}$ amb $i \in \mathbb{N}_0$.
- $L_i := \prod_{j=1}^{i} [j]$, on per conveni $L_0 = 1$ i per $i \in \mathbb{N}_0$.
- $D_i := \prod_{j=0}^{i-1} T^{q^i} - T^{q^j}$ on per conveni $D_0 = 1$ i per $i \in \mathbb{N}_0$.
- $\begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix} = \dfrac{D_d}{D_i L_{d-i}^{q^i}}$
- $\prod(k) := \prod_{j=0}^{M} D_j^{k_j}$ on k_j expressió $q-$àdica de $k \in \mathbb{N}$. $\prod(k)$ s'anomena el factorial de Carlitz.
- $\Lambda := Ker(e_C) \subset \mathbb{C}_\infty$.
- v: Designa una valoració.
- $R_v\ :=\ \{a \in K(x)\ :\ |a| \leqslant 1\}$ on v és una valoració i $|\bullet|$ és un valor absolut no arquimedià associat a v.
- $R_v^\times\ :=\ \{a \in K(x)\ :\ |a| = 1\}$ on v és una valoració i $|\bullet|$ és un valor absolut no arquimedià associat a v.
- $M_v\ :=\ \{a \in K(x)\ :\ |a| < 1\}$ on v és una valoració i $|\bullet|$ és un valor absolut no arquimedià associat a v. M_v és ideal maximal de R_v.

- $\kappa_v := R_v \diagup_{M_v}$ on v és una valoració.
- $K < x >= \{p(x) \in K[x] \ : \ p(x+y) = p(x) + p(y) \ a \ K[x,y]\}$ on $K < x > \subset K[x]$ (polinomis lineals de $K[x]$).
- $\zeta, \ \zeta_q$: denota la funció ζ de Riemann i la funció ζ_q de Carlitz-Goss respectivament.
- **spdg:** Sense pèrdua de generalitat (en anglès "wlog").

Índex

Exponencial de Carlitz: sobre certs anàlegs dels nombres e i π sobre el cos de funcions d'una variable sobre un cos finit

NIU: 1388470
Alaejos.2@protonmail.com
Tutor: Francesc Bars Cortina
Autor: Fernando Alaejos Garcia

Introducció

En la construcció usual (completació per sèries de Cauchy) dels racionals, apareixen els reals com a cos complet i aquest conjunt el podem trencar en dos, els nombres algebraics i els nombres trascendents. Els nombres trascendents sobre un cos K arbitrari, són aquells que no són solució de cap equació polinómica amb coeficients a K. Aquest concepte només depén de cossos, per tant una pregunta natural és que passa si el cos K té catacterística positiva.

Al llarg del treball presentarem anàlegs als enters, racionals i als complexos. Per nosaltres l'anàleg als enters serà $\mathbb{F}_q[T]$. Com és usual, donat un anell, el que voldrem és el cos de fraccions que per $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ i per $\mathbb{F}_q[T]$ és $\mathbb{F}_q(T)$, que serà l'anàleg als racionals. El següent pas és completar per successions de Cauchy per expandir $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, i en la nostre analogia, el paper de $\mathbb{R}$ el fa k_∞. La construcció de $\mathbb{C}$ és per completar algeraicament les equacions amb coeficients a $\mathbb{R}$, i de forma similar, volem un anàleg dels complexos però el problema és que la clausura algebraica separable de k_∞ no és completa, per tant, completant la clausura algebraica de k_∞ obtenim un cos complet i algebraicament tancat que farà el paper de $\mathbb{C}$ i el denotarem per $\mathbb{C}_\infty$. Per veure formalment aquestes construccions pot consultar-se els apèndixs (C.1).

En aquest treball, per la gran quantitat de conceptes previs per poder demostrar la trascendència sobre cossos de funcions, cal afegir gran quantitat d'apèndixs. Els apèndixs contenen teoria necessària per la definició, construcció i treball sobre aquest cossos de nombres però que no està encarada estrictament amb la línea del treball (que s'enfoca en trascendència). Es recomanable que el lector llegueixi els apèndixs prèviament (en especial D.1, C.1) per tenir un fonament d'anàlisis no arquimedià que serà utilitzada al llarg del treball.

Ara cal definir els objectius del treball, el treball està enfocat a la trascendència en cossos de característica positiva però, en especial en presentar tres conceptes:

1. Trascendència de certs elements algebràics sobre $\mathbb{F}_q(T)$: Presentar uns anàlegs a e i π amb propietats similars i trascendents sobre $\mathbb{F}_q(T)$.

2. Conjectures de trascendència a $\mathbb{F}_q(T)$: Presentar anàlegs de conjectures de trascendència sobre $\mathbb{Q}$ que tenen una versió a $\mathbb{F}_q(T)$ on algunes han sigut provades i fins i tot generalitzades.

3. Presentar el teorema de Yu: Un resultat molt important sobre trascendència d'un anàleg de la funció ζ de Riemann en característica possitiva i la seva trascendència evaluant-la als enters.

Malauradament, per simplicitat, aquest treball obvia la part més purament geomètrica i també la part topològica (per exemple, el concepte de topologia límit inferior).

L'estructura del treball comença atacant el primer objectiu directament, on aconseguim veure que les quantitats ξ i $e_C(1)$ són els anàlegs que busquem (secció 2). Aquesta secció es basa en els treball ([11, Wade]) de L. Wade, un alumne de Carlitz i també en el treball [7, Trascendencia-pi] per provar la trascendència de π.

Proseguim amb la secció 1, on aprofundim en un anàleg de l'exponencial complexa amb molt bones propietats que permetrà definir un anàleg als nombres de Bernoulli i un anàleg a la funció ζ de Riemann, la funció ζ_q de Goss (secció 4). Aquí ens basem en els treballs del matemàtic americà David Goss (treball [3, Goss])

A la secció 1.3 expandirem el concepte de mòdul de Carlitz (induït per $e_C(z)$), i que farà de pont amb la secció 4 en la que, com hem mencionat, tractarem el segon objectiu del treball. Ja que un cop introduïda la funció ζ_q de Goss podrem presentar formalment el teorema de Yu (teorema 16) del qual la demostració es troba en el treball [12, Yu].

El tercer objectiu del treaball és tracta en la secció (3) abordem directament els resultats anàlegs que coneixem de $\mathbb{Q}$ com la conjectura de Schunuel i Lindermann-Weisesstrauss i presentem els seus anàlegs a $\mathbb{F}_q(T)$. Aquesta part és basa en els treballs del matemàtic françes L. Dennis (treball [2, Dennis]) i el seminari de Teoria de Galois impartit per en Francesc Bars (treball [1, Bars])

1 Exponencial de Carlitz

El matemàtic Leonard Carlitz va ser un matemàtic nortamericà d'origen ucranià que va desemvolupar un anàleg a l'exponencial complexa per cossos de nombres (per coneixer més la biografía consultar [6, Biografia-Carlitz]). L'objectiu és construïr un anàleg a la funció exponencial als complexos, és a dir, que verifiqui la següent igualtat al cos adient:

$$exp(nx) = (exp(x))^N \quad per\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Veurem que $\mathbb{A}$ fa el paper anàleg a $2\mathbb{Z}$ peró a la xarxa de zeros de $e_C(x)$. On e_C indueix el següent isomorfisme $\mathbb{C}_\infty / _\Lambda \cong^{e_C} \mathbb{C}_\infty$. Per fer-ho caldrà introduïr els polinomis additius. També veurem resultats sobre l'exponencial introduïts pel matemàtic americà David Goss en particular i d'altres, que ens permetran factoritzar l'exponencial de forma convenient.

1.1 Polinomis Additius i $\mathbb{F}_q$−lineals

Aquesta subsecció introdueix uns objectes que seràn necessaris per treballar els mòduls de Carlitz en particular, els polinomis additius. L'exponencial de Carlitz és límit de polinomis additius i també és un polinomi aditiu (en el sentit general perquè com a polinomi té grau infinit).

Definició 1. Polinomis additius:
Direm que un polinomi $p(X) \in \mathbb{A}[X]$ és additiu si per X, Y indeterminats:

$$p(X+Y) = p(X) + p(Y)$$

a $K[X,\ Y]$.

Observació 1. Polinomis additius:
Els polinomis a $\mathbb{A}[X]$ de la forma:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i X^{q^i}$$

són sempre polinomis additius perquè per la característica p, per cada monomi del polinomi és verifica $a_i(\alpha+\beta)^{p^i} = a_i\alpha^{q^i} + a_i\beta^{q^i}$ per tot $i \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 1. de caracterització dels polinomis additius:
Si $\mathbf{ch}(K) = 0$ llavors $p(x) \in K[x]$ és additiu si i només si $p(x) = \alpha x$ per a algun $\alpha \in K$.
Si $\mathbf{ch}(K) = p > 0$ llavors $p(x) \in K[x]$ és additiu si i només si $p(x) = \sum_{i=0}^{M} a_i x^{p^i}$ per algun $\alpha \in K$.

Demostració:
Pel cas en $\mathbf{ch}(K) = 0$, la implicació de si es additiu diu que el polinomi és de la forma αx, ja que si suposem que no, llavors $deg(p) > 1$. Però falla perquè per els monomis de grau x^i per $i > 1$ observem que fent inducció sobre i ens surt el resultat perquè ens porta a contradició pel binomi de Newton.

Suposem ara $\mathbf{ch}(K) = p > 0$, per l'observació 1 tenim una implicació, per l'altre, sigui $p(x) \in K[x]$ additiu. Considerem $p(x)$ a la clausura algebraica de K.

Fem inducció sobre $F(n) := \{p(X) \in K[X] \ :\ deg(p) = n\ i\ p\ additiu\}$ on $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Per $n = 1$, $a + Xb = p(X)$, llavors per ser additiu $a + b(a+Y) = a + bX + a + bY$ d'0j $a = 0$ i per tant $p(X) = bX$, per tant és de la forma desitjada ja que és bX^{p^0}.
Suposem cert per grau n i ho provem per grau $n-1$. Fem:

$$f'(X) = na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ \cdots\ + a_1 \in K[x]$$

Per l'igualtat dels polinomis additius tenim:

$$(f(X+Y) = f(X) + f(Y))' \iff f'(X+Y) = f'(X)$$

ja que estem diferenciant respecte de x. Fent $x = 0$ ens queda $f'(y) = f'(0)$ per a tot y, per tant implica que $f'(x)$ és constant.
Per tant, $f(X)$ es pot expressar com:

$$f(X) = aX + \sum_{i=1}^{n} h_i X^i$$

tal que $h_i = 0$ si $p \nmid i$ on $h_i \in K$.
Recordem que en característica p, un polinomi que tots els coeficients no nuls dels seus monómis X^i amb $p \mid i$, en derivar-lo és el polinomi zero.
Escrivim $h(X)$ com:

$$h(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{\frac{1}{p}} X^{\frac{i}{p}} \right)^p =: (g(x))^p$$

Assumint que els coeficients pertanyen a la clausura algebraica de K.
D'on $f(x) = aX + (g(X))^p$ i $(g(X))^p = f(X) - aX$ és additiu perquè és diferència de polinomis additius, d'aquí:

$$(g(X+Y) - g(X) - g(Y))^p = 0$$

Com que el endomorfisme de Frobenius és injectiu en $K^{sep}[X, X]$, obtenim que $g(X)$ és additiu i té grau més petit que n. Per inducció acabem. $\square$

Lema 1. :
Un polinomi $f(X)$ de $K[X]$ és $\mathbb{F}_q-$lineal si i només si és de la forma:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{q^i} \qquad , \text{ on } a_i \in K$$

Demostració:
Consultar el llibre [8, Papikian].

Lema 2. Caracterització dels Polinomis $\mathbb{F}_q-$lineals:
Un polinomi de $K[x]$ és $\mathbb{F}_q-$lineal si i només si és de la forma:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{q^i} \qquad a_i \in K$$

Demostració:
Veure que $f(X)$ és $\mathbb{F}_q-$lineal és fàcil ja que $\alpha^{q^i} = \alpha$ per tot $\alpha \in \mathbb{F}_q$ on $i \geqslant 0$ i $f(X)$ és additiu.

Ara si $f(X)$ és $\mathbb{F}_q-$lineal llavors és additiu. Pel lema 1, $f(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^{p^j}$. Per la condició $f(\alpha X) = \alpha f(X)$ per tot $\alpha \in \mathbb{F}_q$ implica que $b_j \alpha^{p^j} = b_j \alpha$ per tot $0 \leqslant j \leqslant n$ i $\alpha \in \mathbb{F}_q$. Com que $b_j \neq 0$ llavors $\alpha^{p^j} = \alpha$ ja que el podem simplificar (perquè és un element no nul d'un cos i per tant té invers). Per altre banda el fet de que $\alpha^{p^j} = \alpha$ ens diu que $\mathbb{F}_q$ és subcos de $\mathbb{F}_{p^i}$.

Considerant $\mathbb{F}_{p^i}$ com a $\mathbb{F}_q$-espai vectorial obtenim que $p^j = q^i$ per algun $i \geqslant 0$. $\square$

Lema 3. Polinomis $\mathbb{F}_q-$Lineals:
Tot polinomi de $\mathbb{F}_q(X)$ divideix un polinomi lineal:

$$\sum_{j=l}^{m} A_j X^{q^j}$$

on $A_l \neq 0$ i $A_m \neq 0$ i $A_j \in \mathbb{F}_q[T]$.

Demostració:
Sigui f polinomi de grau m, llavors dividint totes les potències t^{q^i} per f, i ens queda:

$$t^{q^i} \equiv C_{m-1}^{(i)} t^{m-1} + \cdots + C_0^{(i)} \quad (mod\ f(t))$$

On $C_j^{(i)} \in \mathbb{F}_q(x)$. Les potències $1,\ t,\ t^2,\ \cdots$, en el RHS per les primeres $v \leqslant m$ congruències poden ser eliminades i en el LHS obtenim un polinomi lineal. Multiplicant per un polinomi apropiat, podem fer que els coeficients siguin de $\mathbb{F}[x]$.

Definició 2. Anell de polinomis $\mathbb{F}_q-$lineals:
Denotem per $K < X > \subset K[X]$ el conjunt dels polinomis $\mathbb{F}_q-$lineals, on és un anell amb l'operació suma i la composició (on X és el neutre de l'operació composició). Aquest anell és no commutatiu en general.

Ara definim un anàleg l'anell anterior però que ens serà d'utilitat de cara a construïr el mòdul de Carlitz.

Definició 3. Anell de polinomis twistats:
Sigui R una $\mathbb{F}_q-$àlgebra commutativa i τ indeterminada, llavors $R\{\tau\}$ és el conjunt dels polinomis $\sum_{i=0}^{n} a_i\tau^i$ on $a_i \in R$ i $\tau^0 := 1$. Hem de pensar que τ és l'endomorfisme de Frobenius i τ^0 és l'endomorfisme identitat. La suma és la natural i la multiplicació de l'anell és via la següent definició:

$$a\tau^i \cdot b\tau^j := ab^{q^i}\tau^{i+j}$$

Aquest anell és no commutatiu i en conseqüència, hem de pensar en les operacions (com la divisió) per l'esquerra i per la dreta. Observem que:

$$\tau a = a^q\tau$$

Poedem relacionar $K < X >$ i $K\{\tau\}$:

$$\begin{aligned} l : K\{\tau\} &\longleftarrow K < X > \\ \sum_{i=0}^{n} a_i\tau^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^{q^i} \end{aligned}$$

Es pot demostrar que l és un isomorfisme de $\mathbb{F}_q$-àlgebras on $l(1) = x$. L'únic que justificarem aquí és $l(f \cdot g) = l(f) \circ l(g)$ suposant vist que l és $\mathbb{F}_q$-lineal.
Per definició del producte a $K\{\tau\}$:

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=0}^{n} f_i\tau^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} g_j\tau^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f_i\tau^i \cdot g_j\tau^j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f_i g_j^{q^i}\tau^{i+j}$$

Per tant, de la l-linealitat:

$$l(f \cdot g) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} l\left(f_i g_j^{q^i}\tau^{i+j}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i \sum_{j=0}^{m}\left(g_j X^{q^j}\right)^{q^i} = \sum_{i=0}^{n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m} g_j X^{q^j}\right)^{q^i} = \sum_{i=0}^{n} f_i (l(g))^{q^i} = l(f) \circ l(g)$$

Definició 4. Altura d'un polinomi:
Sigui $f = a_h\tau^h + \cdots + a_n\tau^n$ on $0 \leqslant h \leqslant n$ i $a_n \neq 0$ i $a_h \neq 0$ definim l'altura de f o de $l(f)$, que denotem per $ht(f)$ o $ht(l(f))$ respectivament. Definim $ht(0) = +\infty$. Observem que si $ht(f) = 0$, el polinomi $l(f)$ és separable sobre $K[x]$.

Siguin $f, g \in K\{\tau\}$,llavors algunes propietats que verifica ht són:

- $ht(fg) = ht(f) + ht(g)$

  Per la definició de producte, el terme de grau en t més petit per a $f \circ g$ serà $f_{ht(f)}g_{ht(g)}^{q^i}\tau^{ht(f)+ht(g)}$, per tant, el terme de menor grau en x del element producte $f \circ g$ és de grau en t $ht(f) + ht(g)$.

- *Fàcilment $ht(f + g) \geqslant min\{ht(f),\ ht(g)\}$*

Lema 4. Algoritme de divisió per la dreta:
Donats $f, g \in K\{\tau\}$ amb $g \neq 0$, $\exists! r, q \in K\{\tau\}$ tals que:

$$f = qg + r$$

on $deg_t(r) < deg_t(g)$ (on deg_t és el grau en t per a polinomis de $K\{\tau\}$).

Observació 2. :
La divisibilitat de monomis de $K\{\tau\}$ queda (per la dreta):

$$(a\tau^m) :_d (b\tau^n) = \frac{a}{b^{q^{m-n}}}\tau^{m-n}$$

on surt de:

$$(a\tau^m) : (b\tau^n) = \frac{a}{b^{q^{m-n}}}\tau^{m-n} \Longleftrightarrow a\tau^m = \frac{a}{b^{q^{m-n}}}\tau^{m-n} \cdot b\tau^n \text{ i això val } \frac{a}{b^{q^{m-n}}}\tau^{m-n} \cdot b\tau^n = \frac{ab^{q^{m-n}}}{b^{q^{m-n}}}\tau^{m-n} \cdot \tau^n = a\tau^m$$

A continuació veurem els graus de certs polinomis a $\mathbb{F}_q[T]$ perquè ens seràn útils per calcular de forma més àgil certs resultats de convergència de l'exponencial de Carlitz.

1.2 Exponencial de Carlitz: primers resultats

Definició 5. :
Definim i denotem els següents objectes:

1. $[i] := T^{q^i} - T \in \mathbb{A}$ *(per i>0)*
2. $L_0 := 1$ *i* $L_i := \prod_{j=1}^{i}[j]$
3. $D_0 := 1$ *i* $D_i = \prod_{j=0}^{i-1}(T^{q^i} - T^{q^j})$
4. $\begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix} := \dfrac{D_d}{D_i L_{d-i}^{q^i}} \in \mathbb{A}$

Observació 3. Graus de la definició 5:
Calculem els graus de certs polinomis de $\mathbb{A}$*, on deg vol dir el grau en la variable* T*.*

1. $deg([i]) := deg(T^{q^i} - T) = q^i$
2. $deg(L_i) = q\dfrac{q^i - 1}{q - 1}$ *de* $deg(L_i) = deg\left(\prod_{j=1}^{i}[j]\right) = \sum_{j=1}^{i} deg([j]) = \sum_{1=j}^{i} q^j = q\dfrac{q^i - 1}{q - 1}$.
3. $deg\left(\prod_{j=1}^{i}(T^{q^i} - T^{q^j})\right) = iq^i$

En les notacions de 5 introduïm un nou objecte:

Notació 1. :

$$[k,d] := \frac{D_k}{D_{d-1}^{q^{k-d+1}}} = [k][k-1]^q \cdots [d]^{q^{k-d}} \in \mathbb{A}$$

Siguin D i E polinomis en la variable T definits en termes de $[k] = T^{q^k} - T$, denotem per $\epsilon\left(j, \frac{D}{E}\right)$ com la potència entera de $[j]$ en D menys la potència entera de $[j]$ en E.

Exemple 1. :
Per $j \leqslant k$ *tenim:*

- $\epsilon(j, D_k) = q^{k-j}$
- $\epsilon\left(j, \frac{D_k}{L_k}\right) = q^{k-j} - 1$
- $\epsilon(k, L_{2k}) = 1$

Les demostracions són directes de les definicions. $\square$

Proposició 1. :

1. $[i] = \prod \{m(x) \in \mathbb{A}[x]$ *monics irreductibles* $deg(m) \mid i\ \}$
2. $D_i = \prod \{m(x) \in \mathbb{A}[x]$ *monics* $deg(m) = i\ \}$
3. $L_i = $ *mcm* $\{m(x) \in \mathbb{A}[x]$ *monics* $deg(m) = i\ \}$

Demostració:
Només faré la primera. El polinomi $[i]$ *té arrels simples (és separable) perquè* $\frac{d}{dT}[i] = q^i T^i - 1 = -1$ *(proposició 21 de l'apèndix). Ara suposem que* $[i]$ *és producte d'irreductibles mónics on* $deg(m) \mid i$*, on* α *és una arrel de* m*, per* $deg(m) \mid i$ *força que* $\mathbb{F}_{q^{deg(m)}} \subset \mathbb{F}_{q^i}$*, i per tant, és arrel de* $X^{q^i} - X$*.*

Ara si $\beta \in \mathbb{F}_{q^i}$ *és arrel de* $X^{q^i} - X$ *i* $m(X)$ *el polinomi mínim de* β *sobre* $\mathbb{F}_q$*, llavors:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{F}_{q^i} \arrow[dl, dash, "{[\mathbb{F}_{q^i}:\mathbb{F}_q(\beta)]}"'] \arrow[dd, dash, "{[\mathbb{F}_{q^i}:\mathbb{F}_q]}"] \\
\mathbb{F}_q(\beta) \arrow[dr, dash, "{[\mathbb{F}_q(\beta):\mathbb{F}_q]}"'] & \\
 & \mathbb{F}_q
\end{tikzcd}$$

per la fórmula de les torres $deg(m) = [\mathbb{F}_{q^i} : \mathbb{F}_q(\beta)][\mathbb{F}_q(\beta) : \mathbb{F}_q] = i$, *i per tant, per tenir els dos polinomis arrels simples, dividir-se i ser del mateix grau, són el mateix.* $\square$

Definició 6. :
El nombre e de Carlitz (que denotarem per $e_C(1)$*) es defineix per* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{q^k}}{D_k}$ *a* $\mathbb{C}_\infty$ *on la sèrie convergeix perquè* $\lim_{k\to\infty} |D_k| \to 0$ *(veure el capítol 2 del llibre d'en Goss [3, Goss] o en aquest treball, al apèndix C.1 com a definició 9).*

Lema 5. Sèrie Convergent
La sèrie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j}$ *és convergent cap a un element de* $\mathbb{C}_\infty$ $\forall x \in \mathbb{C}_\infty$*, per tant, és una funció entera (com es defineix una funció entera a la definició 51).*

Demostració:
Utilitzant que la convergència la podem reduïr (en anàlisi no arquimedià veient el capítol 2 *del llibre d'en Goss [3]) a veure que el terme general de la sèrie va cap a 0, calculem la seva valoració.*

$$v_\infty\left(\frac{x^{q^i}}{D_i}\right) = v_\infty(x^{q^i}) - v_\infty(D_i) = q^i v_\infty(x) + deg(D_i) = q^i(v_\infty(x) - i)$$

On v_∞ *és la valoració assosiada al* $|\bullet|_\infty$ *en* $\mathbb{C}_\infty$ *on* $v_\infty(T) = -1$ *(veure el apèndix C.1).*
Com que $v_\infty(x)$ *tindrà un valor finit fix i* $v_\infty\left(\frac{x^{q^i}}{D_i}\right) \to -\infty$ *si* $i \to \infty$ *i per tant* $\left|\frac{x^{q^i}}{D_i}\right|_\infty \to 0$ *si* $i \to \infty$ $\square$

Sense dir-ho hem vist que l'exponencial de Carlitz és una funció entera no constant, $\mathbb{F}_q$-lineal i també és polinomi additiu. La següent definició no és més que posar nom a la sèrie que busquem.

Definició 7. Exponencial de Carlitz:

$$e_C(x) \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j} \qquad amb\ x \in \mathbb{C}_\infty$$

Es pot demostrar que $e_C(x)$ *és una funció entera de* $\mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ *(on funció entera vol dir que, com a sèrie, convergeix per tot* $x \in \mathbb{C}_\infty$*).*

Ara veurem que podem definir l'exponencial de Carlitz com a límit d'uns productes.

Notació 2. *Conjunts* $\mathcal{A}(d)$ *i* $\mathcal{A}^+(d)$*:*
Per $d \geqslant 0$ *denotem els conjunts següents, on fent un abús de notació denotem* $deg(a)$ *el grau en* t *de certs polinomis en* $\mathbb{A}$*:*

$$\mathcal{A}(d) = \{a \in \mathcal{A}\ :\ deg(a) < d\} \quad i \quad \mathcal{A}^+(d) = \{a \in \mathcal{A}(d)\ :\ deg(a) < d \text{ amb } a \text{ monic}\}$$

Definició 8. Multiplicativa per a la funció de Carlitz:
Per a $d > 0$ *enter:*

$$e_d(X) := \prod_{a\in\mathcal{A}(d)} (X - a) = \prod_{a\in\mathcal{A}(d)} (X + a) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} X^{q^i} \frac{D_d}{D_i \cdot L_{d-i}^{q^i}}$$

On $e_0(x) = x$*. L'igualtat* $\prod_{a\in\mathcal{A}(d)}(X-a) = \prod_{a\in\mathcal{A}(d)}(X+a)$ *surt de la definició 3.1.3 del capítol 3 del llibre [3, Goss].*

Ara si fem el límit de $d \to \infty$*, en* $e_d(x)$ *amb* $x \in \mathbb{C}_\infty$ *obtenim per una banda la funció* $e_C(x)$*, i per l'altre el producte de tots els polinomis de* $\mathcal{A}$*, per tant hem descrit* $e_C(X)$ *com un producte infinit. Això pot portar-nos problemes de convergència, ja que, si el terme general del producte fos masa gran podria divergir. Per evitar això normalitzem dividint pel coeficient* X *de* $e_d(X)$*, observem que per la proposició 1,* $D_i = \prod_{j=0}^{i-1}(T^{q^i} - T^{q^j}) = \prod\{m(x) \in \mathbb{A}[x]$ *monics* $deg(m) = i$ $\}$*, per tant:*

$$\prod_{deg(g)=i} g = \prod_{deg(g)=i,\ g\ monic} g^{q-1}\left(\prod_{\eta\in\mathbb{F}_q^\times}\eta\right) = \prod_{deg(g)=i,\ g\ monic} -g^{q-1} = (-1)^{q^i}\prod_{deg(g)=i,\ g\ monic} g^{q-1} = -D_i^{q-1}$$

En conseqüència:

$$\prod_{a\in\mathcal{A}(d)\setminus\{0\}} a = (-1)^d(D_0\cdot\ \cdots\ \cdot D_{d-1})^{q-1} = (-1)^d\frac{D_d}{L_d}$$

perquè el polinomi $[i]$ *dins de* $\dfrac{D_d}{L_d}$ *està elevat a la potència* $q^{d-i}-1$ *i si calculem el grau del mateix polinomi pel producte* $D_0\cdot\ \cdots\ \cdot D_{d-1}$ *obtindrem* $\dfrac{q^{d-i}-1}{q-1}$*, que per estar (el producte* $D_0\cdot\ \cdots\ \cdot D_{d-1}$*) elevat a la* $q-1$ *tenen el mateix exponent.*

Surt d'operar inductivament i aplicar $D_i = [i]D_{i-1}^{q-1}$ *on* $D_0 = 1$*:*

$$\prod_{a\in\mathcal{A}(d)\setminus\{0\}} a = (-1)^d\,(D_0\cdot D_1\ \cdots\ D_{d-2}\cdot D_{d-1})^{q-1} = (-1)^d\left(([d-1]D_{d-2}^{q-1})D_{d-2}\ \cdots\ D_2\cdot D_1\right)^{q-1}$$
$$= \left([d-1][d-2]^q[d-3]^{(q-1)()}\ \cdots\ [1]\right)^{q-1}$$

observem:

$$(-1)^d\frac{D_d}{L_d} = \frac{[d][d-1]^q\ \cdots\ [2]^{q^{d-2}}[1]^{q^{d-1}}}{[d][d-1]\ \cdots\ [2][1]} = [d-1]^{q-1}\ \cdots\ [2]^{q^{d-2}-1}[1]^{q^{d-1}-1}$$

d'on:

$$X\prod_{a\in\mathcal{A}(d)}\left(1+\frac{X}{a}\right) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i\frac{X^{q^i}}{D_i}\frac{L_d}{L_{d-1}^{q^i}}$$

On si denotem per $\beta_i := [1]^{\frac{q^i-1}{q-1}}$ *i* $\xi_i := \dfrac{\beta_i}{L_i}$ *podem reescriure l'igualtat anterior com:*

$$X\prod_{a\in\mathcal{A}(d)}\left(1+\frac{X}{a}\right) = \frac{1}{\xi_d}\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\beta_i\xi_{d-i}^{q^i}\frac{X^{q^i}}{D_i}$$

Lema 6. **:**
Tenim:

1.
$$\xi_d = \prod_{j=1}^{d-1}\left(1-\frac{[j]}{[j+1]}\right)$$

2. *Existeix* $\lim_{d\to\infty}\xi_d$ *que anomenarem* ξ_* *i*
$$\xi_* = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{[j]}{[j+1]}\right) \in \mathbb{C}_\infty$$

.

3. *Per a tot* $x \in \mathbb{C}_\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \dfrac{x^{q^i}}{D_i}$ *convergeix a* $\mathbb{C}_\infty$ *on* β_i *és* $\beta_i := [1]^{\frac{q^i-1}{q-1}}$.

4. $x \prod_{a \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \dfrac{x^{q^i}}{D_i}$.

Demostració:
Per la convergència utilitzarem les valoracions,

- $v_\infty \left(\dfrac{[j]}{[j+1]}\right) = q^{j+1} - q^j$ *que va cap a infinit quan* $j \to \infty$
- $v_\infty(\xi_d) = \sum_{j=1}^{d-1} v_\infty \left(1 - \dfrac{[j]}{[j+1]}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{d-1} q^{j+1} - q^j = q^d - q^1$ *que va cap a* ∞ *quan* $d \to \infty$. *Per tant tenim* $v_\infty(\xi_*) = \infty$.
- $v_\infty \left((-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \dfrac{x^{q^i}}{D_i}\right) = -q\frac{q^i-1}{q-1} + q^i + iq^i = \frac{q}{q-1} + q^i\left(i + v_\infty(x) - \frac{q}{q-1}\right)$ *que va a infinit quan* $i \to \infty$, *per tant per les propietats del anàlisi no arquimedià, si el terme general d'una successió té valoració infinita (o equivalentment el seu valor absolut va a zero), llavors la sèrie convergeix.*

Observem que $[j+1] - [j] = T^{q^{j+1}} - T - T^{q^j} + T = T^{q^{j+1} - T^{q^j}} = (T^q - T)^{q^j} = [1]^{q^j}$, *per tant:*

$$\prod_{j=1}^{d-1}\left(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\right) = \prod_{j=1}^{d-1} \frac{[j+1]-[j]}{[j+1]} = \prod_{j=1}^{d-1} \frac{[1]^{q^j}}{[j+1]}$$
$$= \frac{1}{L_d}\prod_{j=1}^{d-1}[1]^{q^j} = \frac{[1]^{q\frac{d-1}{q-1}}}{L_d} = \frac{B_d}{L_d} := \xi_d$$

Teorema 2. :
Sigui $\xi := \lambda\xi_* \in \bar{K}_\infty$ *on* λ *és un element de* $\bar{K}_\infty$ *tal que* $\lambda^{q-1} = -[1] = T - T^q$.
Per a qualsevol $x \in \mathbb{C}_\infty$:

$$e_C(x) = x \prod_{a \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{\xi \cdot a}\right)$$

Demostració:
Al llibre [3, Goss] capítol 3 *("The Carlitz Moduleçom a col·lorari* 3.2.9*).*

Ara, voldrem poder calcular explícitament els e_d, i com veurem a continuació hi ha una recurrència que ens permetrà fer-ho.

Lema 7. :
La següent recurrència és certa per $d \geqslant 1$:

$$e_d(X) = e_{d-1}^q(X) - D_{d-1}^{q-1} e_{d-1}(X)$$

Demostració:
Els dos costats de l'igualtat són polinomis mónics en X *de grau* q^d, *per tant és suficient veure que* $|\mathcal{A}(d)| = q^d$, $e_d(X) = \prod_{a \in \mathcal{A}(d)}(X - a)$ *per definició i argumentant per inducció sobre* d.

Per elements α *de* $\mathcal{A}(d-1)$ *s'anul·la* $e_d(X)$ *ja que,* $e_{d-1}(\alpha) = 0$.
Considerem $\alpha = \eta h$, *on* $\eta \in \mathbb{F}_q$ *i* $h = h(T) \in \mathbb{A}$ *mónic de grau* $d-1$. *Llavors:*

$$e_{d-1}(h) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}(d-1)} (h - \alpha) = \prod \{Pol.\ monics\ grau\ d-1\} = D_{d-1}$$

Per tant:

$$e_{d-1}^q(\xi h) - D_{d-1}^{q-1} e_{d-1}(\xi h) = \xi^q D_{d-1}^q - D_{d-1}^{q-1} \xi D_{d-1} = 0$$

perquè $\eta^q = \eta$. $\square$

Lema 8. **:**
Tenim les següents igualtats:

1. $\begin{bmatrix} d-1 \\ i \end{bmatrix} = \dfrac{D_{d-1}}{D_i L_{d-i-1}^{q^i}}$

   Fàcil a partir de la definició de $\begin{bmatrix} d-1 \\ i \end{bmatrix}$.

2. $D_i = [i] D_{i-1}^q$

   Efectivament:

$$D_i := \prod_{j=0}^{i-1} T^{q^i} - T^{q^j} = \left(T^{q^i} - T\right) \prod_{j=1}^{i-1} T^{q^i} - T^{q^j}$$
$$= [i] \left(\prod_{j=1}^{i-1} T^{q^{i-1}} - T^{q^{j-1}} \right)^q = [i] \left(\prod_{k=0}^{i-1} T^{q^{i-1}} - T^{q^k} \right)^q = [i] D_{i-1}^q$$

3. $\begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{D_d}{D_0 L_d} = \dfrac{D_{d-1}^q}{D_0 L_{d-1}}$

   De la igualtat (2)*:* $\dfrac{D_d}{D_0 L_d} = \dfrac{[i] D_{i-1}^q}{\prod_{j=1}^{i} [j]} = \dfrac{D_{i-1}^q}{\prod_{j=1}^{i-1} [j]}$.

Teorema 3. **de Carlitz:**
Tenim l'expressió següent:

$$e_d(X) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} \begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix} X^{q^i}$$

En conseqüència, $\begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix} \in \mathbb{A}$.

Demostració:
Utilitzem inducció. De $e_{d-1}(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-i-1} \begin{bmatrix} d-1 \\ i \end{bmatrix} X^{q^i}$*, substituïnt-ho en el lema 7 i les igualtats del lema 8 veiem:*

$$e_d(X) = e_{d-1}^q(X) - D_{d-1}^{q-1} e_{d-1}(X) = \sum_{i=0}^{d-1} ((-1)^{d-i-1})^q \frac{D_{d-1}^q}{D_i^q L_{d-i-1}^{q^i}} X^{q^{i+1}} - D_{d-1}^q ((-1)^{d-i-1}) \frac{D_{d-1}}{D_i^{q-1} L_{d-i-1}^{q^i}} X^{q^d}$$

Pels termes de $i = 0$ *i* $i = d-1$*, obtenim (agrupant pel grau):*

$$\begin{bmatrix} d-1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{D_{d-1}^q}{D_0 L_{d-1}} = \frac{D_d}{[d] L_{d-1}} = \frac{D_d}{L_d}$$

$$\begin{bmatrix} d-1 \\ d-1 \end{bmatrix} = \frac{D_{d-1}^q}{D_{d-1}^q L_0^{q^d}} = \frac{D_d}{D_d L_0^{q^d}} = \begin{bmatrix} d \\ d \end{bmatrix} = 1$$

Pel terme de grau i *(on* $1 \leqslant i \leqslant d-1$*):*

$$(-1)^{d-i-1} \frac{D_d}{[d]} \left(\frac{1}{D_{i-1}^q L_{d-i}^{q^i}} + \frac{1}{D_i L_{d-i-1}^{q^i}} \right) = (-1)^{d-i-1} \frac{D_d}{[d]} \left(\frac{[i]}{D_i L_{d-i}^{q^i}} + \frac{[d-i]^{q^i}}{D_i [d-i]^{q^i} L_{d-i-1}^{q^i}} \right)$$
$$= (-1)^{d-i-1} \frac{D_d}{[d]} \left(\frac{T^{q^i} - T + T^{q^d} - T^{q^i}}{D_i L_{d-i}^{q^i}} \right) := (-1)^{d-i} \begin{bmatrix} d \\ i \end{bmatrix}$$

□

Definició 9. Conjunt de zeros de e_C:
Definim:

$$\Lambda := Ker(e_C)$$

Gràcies al teorema 2 és directe que el nucli és $\xi\mathbb{F}_q[T]$ perquè per $\forall b \in \xi\mathbb{A} \setminus \{0\}$, existeix $1 - \frac{b\xi}{a\xi} = 0$ en el producte del teorema 2 per $a = b$.

Teorema 4. :
Sigui $\xi = \lambda\xi_* \in \mathbb{C}_\infty$ amb $\lambda^{q-1} = -[1]$, llavors per $\forall x \in \mathbb{C}_\infty$:

$$x \prod_{\alpha \in \mathbb{A}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\xi} e_C(\xi x)$$

Demostració:
Hem vist que:

$$x \prod_{a \in \mathbb{A}\setminus\{0\}} \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}$$

ara si definim:

$$\beta_i := \left((-\lambda)^{q-1}\right)^{\dfrac{q^i-1}{q-1}} = (-1)^i \lambda^{q^i-1}$$

ara:

$$(-1)^i \beta_i \xi_*^{q^i} = \lambda^{q^i-1} \xi_*^{q^i-1} = \xi^{q^i-1}$$

per tant:

$$x \prod_{0 \neq \alpha \in \mathbb{A}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^{q^i-1} \frac{x^{q^i}}{D_i} = \frac{1}{\xi} e_C(\xi x)$$

□

Observació 4. :
Per $\Lambda = \xi\mathbb{A}$, i $\forall x \in \mathbb{C}_\infty$,

$$x \prod_{\alpha \in \Lambda\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = e_C(x)$$

Demostració:
Pel teorema 4 , pel canvi de variable $y = \frac{x}{\xi}$, i pel fet que $\alpha \in \Lambda$ que permet expressar $\alpha = \xi a$ amb $a \in \mathbb{A}$:

$$x \prod_{\alpha \in \mathbb{A}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{x}{\xi a}\right) = \xi \left(y \prod_{\alpha \in \mathbb{A}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{y}{a}\right)\right) = \xi \frac{1}{\xi} e_C(y\xi) = e_C(x)$$

□

Per tant, gràcies al col·lorari sabem que Λ és exactament $\xi\mathbb{A}$ (el nucli de la funció exponencial de Carlitz), per tant fent quocient per Λ obtindrem un conjunt sobre el que l'exponencial és isomorfisme amb l'imatge, que és pot demostrar que és $\mathbb{C}_\infty$.

Observem els següent diagrama (que conmuta), en els que es pot veure com actua l'exponencial de Carlitz:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty/\Lambda \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_C"'] & \mathbb{C}_\infty/\Lambda \arrow[d, "e_C"] \\
\mathbb{C}_\infty \arrow[r, "\mathcal{C}_a"'] & \mathbb{C}_\infty
\end{tikzcd}$$

Com es veu en l'apèndix B, aquest fet és general dels móduls de Drinfeld, on l'exponencial de Carlitz n'és un cas particular.

1.3 Mòdul de Carlitz: Introducció al mòdul de Drinfeld

La idea ara, un cop definida i explicada que és la funció $e_C(x)$, és definir una acció de $\mathbb{F}_q[T]$ sobre $\mathbb{C}_\infty$. Aquesta acció és el mòdul de Carlitz. Aquesta idea és un cas particular d'una família d'accions més generals que s'anomenan mòduls de Drinfeld (mirar l'apèndix B).

L'estructura de la secció és introduir l'equació funcional del módul de Carlitz i algunes propietats. També donarem un métode per calcular de forma (no computacionalment eficient) recurrent pel càlcul dels coeficients del "polinomi"resultant al aplicar l'acció de modul de Carlitz. També introduirem el concepte dels punts de divisió i el punt de divisió primitiu.

La primera pregunta que ens podem fer és quina és l'acció que verifica l'exponencial de Carlitz que caracteritza el mòdul de Carlitz, un primer resultat en aquesta direcció és el següent.

1.4 Mòdul de Carlitz

Proposició 2. :
Sigui $x \in \mathbb{C}_\infty$, llavors:

$$e_C(Tx) = Te_C(x) + e_C(x)^q$$

Demostració:
Tenim que per la definició de l'exponencial de Carlitz, si evaluem en Tx ens queda:

$$e_C(Tx) = \sum_{i=0}^{\infty} T^{q^i} \frac{x^{q^i}}{D_i}$$

llavors, si fem:

$$e_C(Tx) - Te_C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(T^{q^i} - T\right) \frac{x^{q^i}}{D_i}$$

per tant, com que $D_i = [i]D_{i-1}^q$, ens queda que lo anterior:

$$\begin{aligned} e_C(Tx) - Te_C(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_{i-1}^{q^i}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{q^i}}{D_i}\right)^q \end{aligned}$$

d'on surt el resultat. $\square$

Ara volem estudiar com quedaria un polinomi arbitrari de $\mathbb{F}_q[T]$ sota aquesta equació funcional.

Corol·lari 1. :
Sigui $a \in \mathbb{A}$, on $a = \sum_{j=0}^{d} a_j T^j$ i els coeficients són de $\mathbb{F}_q$, on $a_d \neq 0$, per tal de garantir que és de grau d. Ara sigui $x \in \mathbb{C}_\infty$, llavors:

$$e_C(ax) = ae_C(x) + \sum_{j=1}^{d} C_a^{(j)} e_C(x)^{q^j}$$

on $C_a^{(d)} = a_d$ i $\left\{C_a^{(j)}\right\} \subset \mathbb{A}$.

Demostració:
Per $1 \leqslant i$,

$$e_C(T^i x) = e_C\left(T(T^{i-1}x)\right)$$

això per la proposició 2, tot i que anem a veure-ho explicitament pel cas $i = 2$:

$$\begin{aligned} e_C(T^2x) &= Te_C(Tx) + e_C(Tx)^q \\ &= T\left(Te_C(x) + e_C(x)^q\right) + \left(Te_C(x) + e_C(x)^q\right)^q \\ &= T^2 e_C(x) + (T^q + T)e_C^q(x) + e_C(x)^{q^2} \end{aligned}$$

Ara, podem veure que utilitzant la $\mathbb{F}_q$-linealitat de $e_C(ax)$ podem calcular els coeficients $C_a^{(j)}$ fàcilment. $\square$

Observem que la idea del col·lorari anterior és l'aplicació de e_C a $T^i x$ i ens queden termes de grau $T^i e_C(x)$, termes de graus més petits i $e_C(x)^{q^i}$, i com que el polinomi a és una combinació lineal d'aquestes potències, podem obtenir una expressió de $e_C(ax)$ en termes de $e_C(T^i x)$ (on clarament és la que dóna el col·lorari).

1.5 Equació Funcional del mòdul de Carlitz

La següent definició no és més que denotar de forma més compacte de l'equació funcional del col·lorari 1 en termes de polinomis de l'endomorfisme de Frobenius.

Definició 10. : Equació Funcional Elemental del mòdul de Carlitz:
Siguin $\left\{C_a^{(j)}\right\}$ *els elements del corol·lari 1 on* $\deg(a) =: d$, *(grau en la variable* T*) llavors:*

$$\mathcal{C}_a(\tau) = a\tau^0 + \sum_{j=1}^{d} C_a^{(j)}\tau^j$$

On $\tau^0(X) = X$. *Per tant tenim la següent igualtat funcional per* $\forall x \in \mathbb{C}_\infty$*:*

$$e_C(ax) = \mathcal{C}_a(e_C(x))$$

Ara ja estem en condicions de denotar l'acció de $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{C}_\infty$ que busquem:

Teorema 5. Mòdul de Carlitz:
L'aplicació de $\mathbb{A}$ *a* $k\{\tau\}$ *que assigna a cada* $a \in \mathbb{A}$ *el seu corresponden*t $\mathcal{C}_a$ *és una injecció de* $\mathbb{F}_q$*-àlgebres.*

Demostració:
Que aquesta aplicació és injectiva i $\mathbb{F}_q$*-lineal és fàcil de veure, per tant anem a veure que és aplicació entre àlgebras. Siguin* $a, b \in \mathbb{A}$, *cal veure que*

$$\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{C}_a \cdot \mathcal{C}_b,$$

on el producte de l'esquerra és el de $k\{\tau\}$. *Per tant:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{ab}(e_C(x)) &:= e_C(abx)\\ &= e_C(a(bx))\\ &= \mathcal{C}_a(e_C(bx))\\ &= \mathcal{C}_a(\mathcal{C}_b(e_C(x)))\end{aligned}$$

d'on surt el resultat. $\square$

Definició 11. Mòdul de Carlitz:
L'aplicació que hem vist en el teorema 5 que la designarem per $\mathcal{C}$ *és el mòdul de Carlitz on:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}:\ \mathbb{A} &\longrightarrow k\{\tau\}\\ a &\longmapsto \mathcal{C}_a\end{aligned}$$

Per aquesta definició obtenim directament que $\mathcal{C}_a \in \mathbb{A}\{\tau\}$ per $\forall a \in \mathbb{A}$.
En els mòduls, apareixen punts de divisió (per saber-ne més mirar l'apèndix D.1, sobre mòduls), i pel mòdul de Carlitz els tenim completament caracteritzats.

Definició 12. Valors de Divisió o Punts de Divisió:
Són els valors $\{e_C(a\xi)\ :\ a \in K\} \subset \mathbb{C}_\infty$

Sigui $a = \frac{b}{f} \in K$ per $f \neq 0$ amb $f, b \in \mathbb{A}$, llavors $e_C(a\xi)$ és una arrel de $\mathcal{C}_f(x) = 0$ ja que pertany a la clausura de K en $\mathbb{C}_\infty$

Proposició 3. Resultat feble:
Sigui $L \subset \mathbb{C}_\infty$ *una extensió de* K. *Sigui* $a \in K$ *i sigui* $L_1 := L(e_C(a\xi))$. *Llavors* L_1 *és una extensió abeliana de* L.

Demostració:
Sigui $a = \frac{b}{f}$ *sigui una funció racional irreductible* ($b, f \in \mathbb{A}$ *i* $(f, b) = 1$). *Llavors:*

$$e_C\left(\frac{b}{f}\xi\right) = \mathcal{C}_b\left(e_C\left(\frac{\xi}{f}\right)\right)$$

perquè per l'identitat de Bezout, existeixen $s, h \in\in K$ tals que $sb + fh = 1$ i per tant, $e_C\left(\frac{\xi}{f}\right) = e_C\left(\frac{sb\xi}{f}\right) + \underbrace{e_C\left(\frac{fh\xi}{f}\right)}_{0} = \mathcal{C}_s\left(e_C\left(\frac{b\xi}{f}\right)\right)$, per tant $L_1 \subset L\left(e_C(\frac{\xi}{f})\right)$. Podem assumir que $L_1 = L\left(e_C\left(\frac{\xi}{f}\right)\right)$. Com que els coeficients de $\mathcal{C}_g(\tau)$ són de $\mathbb{A}$ per $\forall g$, directament, L_1 contè tots els valors de $e_C\left(\frac{g}{f}\xi\right)$. És a dir, contè tots els f-punts de divisió.

Com a $\mathbb{A}$-mòdul, l'exponencial de Carlitz ens garanteix que el $\mathbb{A}$-mòdul de f-punts de divisió és isomorf a $(\mathbb{A}/(f))^{\times}$. Com que L_1 contè els f-punts de divisió, és fàcil veure que és Galois sobre L ja que BC_a és irreductible i polinomi separable. Sigui G el grup de Galois, igual que $\mathcal{C}_g(\tau) \in \mathbb{A}\{\tau\}$ per tota g. Observem que l'acció de G sobre els f-punts de divisió commuta amb l'acció de $\mathbb{A}$. Per tant, per $\sigma \in G$, veiem que $\sigma\left(e_C\left(\frac{\xi}{f}\right)\right)$ és també un $\mathbb{A}$-mòdul generador dels f-punts de divisió, per tant d'aquí obtenim una injecció $G \hookrightarrow (\mathbb{A}/(f))^*$.

Definició 13. Mòdul de g-punts de divisió:
Sigui $g \in \mathbb{A}$. Llavors:

$$\mathcal{C}[g] := \left\{e_C\left(\frac{b}{g}\xi\right) : b \in \mathbb{A}\right\} \subset \mathbb{C}_\infty$$

És un $\mathbb{A}$-mòdul isomorf a $\mathbb{A}/(f)$

Definició 14. g-punt de divisió primitiu:
Un generador de $\mathcal{C}[g]$ com a $\mathbb{A}$-mòdul s'anomena primitiu.

Observem que si $\eta \in \mathbb{F}_q^{\times}$ llavors,

$$\mathcal{C}[g] = \mathcal{C}[\eta g]$$

ja que $\mathcal{C}[g]$ depén únicament de l'ideal en $\mathbb{A}$ generat per g. En conseqüència, sigui $I \subset \mathbb{A}$ un ideal. Llavors:

$$\mathcal{C}[I] := \mathcal{C}[i]$$

per tot generador i de I.

Ara volem una fòrmula per a calcular els $\left\{\mathcal{C}_a^{(j)}\right\}$ de $\mathcal{C}_a(\tau)$.
Sigui $a \in \mathbb{A}$ i

$$\mathcal{C}_a(\tau) = a\tau^0 + \sum_{j=1}^{d} \mathcal{C}_a^{(j)}\tau^j$$

Notació 3. :
Per simplificar la notació introduïm:

$$a_j := \mathcal{C}_a^{(j)}$$

Per un polinomi $a \in \mathbb{A}$ voldríem una fórmula per calcular els coeficients d'aquest polinomi $\mathcal{C}_a(\tau)$, i el següent resultat dóna una fórmula recursiva per calcular-los tots:

Proposició 4. :
Siguin a, a_j com els d'adalt i seguint la notació 3, llavors:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a^q - a}{T^q - T} \\ a_2 &= \frac{a_1^q - a_1}{T^{q^2} - T} \\ &\vdots \\ a_i &= \frac{a_{i-1}^q - a_{i-1}}{T^{r^i} - T} \\ &\vdots \end{aligned}$$

fins i tot si $a = \eta f$ per $f \in \mathbb{F}_r^\times$ i f és mónic de grau d, llavors $a_d = \eta$ i $a_{d+j} = 0$ per $j \geqslant 1$.

Demostració:
Escribim $\mathcal{C}_a = a\tau^0 + \chi_a$ on $\chi \in A\{\tau\}$. Com que $\chi T = \tau$. Ara, $\mathcal{C}_a\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_T\mathcal{C}_a$ a $k\{\tau\}$ i per tant:

$$\left(a\tau^0 + \chi_T\right)\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_T\left(a\tau^0 + \chi_T\right)$$

o anàlogament operant:

$$\mathcal{C}_T a\tau^0 - a\tau^0 C_T = \chi_a\mathcal{C}_T - \mathcal{C}_T\chi_a$$

Ara el resultat surt d'igualar els termes de les dues bandes de l'igualtat (els termes de mateix grau pensant-ho com a polinomi en la "variable"τ).

Exemple 2. Exemple de $e_C(x)$:

- *Per $T^2 + 1$:*

  Podem aplicar el resultat anterior i calculem els coeficients, $a_1 = \dfrac{\left(T^2+1\right)^q - T^2 - 1}{T^q - T} = \dfrac{T^{2q} - T^2}{T^q - T} = T^q + T$. Per tant $a_2 = \dfrac{(T^q + T)^q - T^q - T}{T^{q^2} - T} = 1$. Per tant:

  $$e_C((T^2+1)x) = (T^2+1)e_C(x) + (T^q + T)e_C^q(x) + e_C^{q^2}(x)$$

- *Per $T^3 + T + 1$:*

  Obtenim $a_1 = \dfrac{T^{3q} + T^q + 1 - 1 - T - T^3}{T^q - T} = 1 + T^{q+1} + T^{2q} + T^2$,

  $a_2 = \dfrac{1 + T^{q^2+q} + T^{2q^2} + T^{2q} - (1 + T^{q+1} + T^{2q} + T^2)}{T^{q^2} - T} = T^{q^2} + T^q + T$ *i*

  $a_3 = \dfrac{T^{q^3} + T^{q^2} + T^q - (T^{q^2} + T^q + T)}{T^{q^3} - T} = \left(T^{q^3} - T\right)^2$*, per tant:*

  $$(T^3 + T + 1)e_C(x) + (1 + T^{q+1} + T^{2q} + T^2)e_C^q(x) + (T^{q^2} + T^q + T)e_C^{q^2}(x) + \left(T^{q^3} - T\right)^2 e_C^{q^3}(x)$$

Aquest exemple mostra que, tot i tenir una fórmula recursiva per calcular els coeficients, la complexitat computacional de les operacions augmenta ràpidament.

2 Trascendència

En aquesta secció (que es basa en el article [11, Wade]), tractarem la trascendència de certes quantitats sense aprofundir en algunes propietats que tenen més enllà de la seva trascendència (que les veurem més a fons en la secció de l'exponencial de Carlitz (secció 1). Començarem provant la trascendència de π sobre $\mathbb{Q}$, per veure que la seva prova té certes similituts amb la prova de que ξ és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(T)$ (anàleg de $i\pi$). També veurem una demostració més general sobre una família de sèries entre les que s'inclou $e_C(1)$ (anàleg de e).

Aquesta part està separada de l'última part del treball (secció 3) perquè cal introduïr molta teoria prèvia que cal explicar en profunditat abans d'estudiar-ne resultats de trascendència anàlegs als que existeixen sobre els racionals, com per exemple un anàleg de la conjectura de Schanuel.

Començem remarcant que quant parlem de trascendència és molt important parlar sobre on estudiem la trascendència, ja que per exemple π és trascendent sobre $\mathbb{Q}[x]$ peró és algebraic sobre $\mathbb{R}[x]$. Dels primers nombres sobre els que es va provar la trascendència sobre $\mathbb{Q}[x]$ van ser e i π, tot i que la prova de π és més complicada i la farem en el treball, la prova de e es pot trobar en l'apèndix A.1.

2.1 Trascendència de π sobre $\mathbb{Q}$

Teorema 6. Trascendència de π
El real π és trascendent sobre $\mathbb{Q}$.

Demostració:
Suposem que no, π és algebraic, i com que i és algebraic sobre $\mathbb{Q}$, tenim que $i\pi$ és algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Demostrem que $i\pi$ no és algebraic sobre $\mathbb{Q}$.

Sigui $\theta_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ irreductible tal que té per arrel $\alpha_1 := i\pi, \cdots, \alpha_n$ (on $n = deg(\theta_1)$). Com que $e^{i\pi} + 1 = 0$:

$$(e^{\alpha_1} + 1) \cdot \cdots \cdot (e^{\alpha_n} + 1) = 0 \tag{1}$$

Ara construïm una equació polinòmica amb coeficients enters on les arrels siguin els exponents del producte anterior, triem, $\theta_2(x) \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$ tenim que les arrels seràn $\alpha_1 + \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n$. Anàlogament el polinomi que tè per arrels les sumes de tres arrels (és a dir, la primera arrel serà $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ etc...) serà $\theta_3(x) \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$ i així succesivament fins a $\theta_n(x) \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$ de grau 1.

Com que els α_i satisfan $\theta_1(\alpha_i) = 0$, llavors els polinomis simètrics de les arrels (determinats pels coeficients de θ_1) són igual a enters i per tant, els polinomis simètrics de les arrels dels θ_i tambè són racionals, i per tant els $\theta_i \mathbb{Q}[x]$. Considerem:

$$\theta := \prod_{i=1}^{n} \theta_i(x) = \theta_1(x) \cdot \cdots \cdot \theta_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$$

Operant:

$$\theta(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathbb{Q}[x]$$

amb $c_r \neq 0$ i $\mathbb{Q}[x]$. Les arrels (que denotarem per β_i per $i = 1, \cdots, r$) de $\theta(x)$ són els exponents del producte (1) que no són zero, i per tant de (1) tenim:

$$e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + e^0 + \cdots + e^0 = 0 = k + (l+1) + \sum_{i=1}^{r} e^{\beta_i}$$

Definim:

$$f(x) := c^s x^{p-1} \frac{\theta^p(x)}{(p-1)!}$$

Amb $s = rp - 1$ i p un primer que determinarem més endevant i c un enter a determinar també. Observeu que $f(x)$ és de grau $s + p$. Escrivim:

$$F(x) := f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x)$$

Derivant,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}f(x)$$

s'obté en particular que:

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-y}f(y)dy$$

Fent un canvi de variable s'obté:

$$F(x) - e^{-x}F(0) = -x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x}f(\lambda y)d\lambda$$

evaluem x sobre les β_i i sumem, per obtenir:

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + (l+1)F(0) = -\sum_{j=1}^{r}\beta_j\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j}f(\lambda\beta_j)d\lambda \tag{2}$$

Ara afirmem que per a p prou gran LHS de (2) és un enter no nul. Observem que per $0 < t < p$, $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = 0$ ja que les successives derivades no eliminen θ i al evaluar en β_j tot es fa zero.

Ara cada derivada de $f(x)$ de ordre p o més gran té p com a factor c^s i les $f^{(t)}(\beta_j)$ és un polinomi en variable β_j de grau com a molt s (per la definició de $F(x)$ i que les primeres $t < p$ derivades de f són zero evaluades sobre qualsevol β_j).

La suma $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j)$ és simètrica i per tant és un racional peró triem un c per fer-la entera. Això perquè les funcions simètriques són polinomis amb coeficients iguals al polinomis en $\frac{c_i}{c}$ (on c_i coeficients de $\theta(x)$) de grau $\leqslant s$. D'aqui s'obté:

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = pK_t \quad \text{on } t = p, \cdots, p+s$$

Com que LHS = enter $+ (l+1)F(0)$, que val $F(0)$.

- $f^{(t)}(0) = 0$ *per* $t = 0, \cdots, p-2$.
- $f^{(p-1)}(0) = c_r^p c^s$ *on* $c_r \neq 0$.
- $f^{(t)}(0) = pL$ *per* $t \geqslant p$. *On L un enter*

Per tant, LHS de (2) és múltiple de $p + c^s c_r^p k$, que no és divisible per p si triem p prou gran i $p > k', c, c_r$. Per tant, és un enter no nul. peró el RHS de (2) és arbitrariament petit (tendeix a zero si $p \to \infty$), cosa que indueix una contradicció perquè un enter no nul no pot ser igual a una expressió arbitrariament petita.

2.2 Trascendència d'alguns elements de $\mathbb{F}_q(T)$

Ara, passem a treballar sobre la trascendència sobre $\mathbb{F}_q(T)$ que és l'anàleg natural a $\mathbb{Q}[x]$. Com veurem, caldrà introduïr tota una notació prèvia per poder treballar de forma més compacte i que ens servirà també per la resta del treball. Recordem que treballem en característica positiva i que q denotarà sempre una potència fixa d'un primer fix.

El següent lema és útil per demostrar de que ξ i $e_C(1)$ són trascendents sobre $\mathbb{F}_q(T)$ (anàlegs a e i π veure el capítol 1 i el capítol 3 per més informació al respecte). Per fer-ho utilitzarem una família de sèries entre elles una amb propietats anàlogues a $e_C(x)$ que definim a continuació:

Definició 15. :

$$\psi(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{q^k}}{D_k}$$

On ψ verifica:

- *$\psi(\xi E) = 0$ per tot $E \in \mathbb{A}$.*
- *$\psi(Mx) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{D_k} \psi_j(M)\psi^{q^j}(x)$ on M polinomi de grau m de $\mathbb{F}_q(T)$. On $\psi_j(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{D_k}{D_j \prod_{i=0}^{k-j} [i]^{q^j}} x^{q^j}$*

Lema 9. Reordenació especial:
La següent igualtat és pot fer i és coherent amb els subíndexs:

$$\sum_{j=l}^{m} A_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{D_k^{q^j}} \right)$$

Existeix $S_k = \sum_{i+j=k} \frac{(-1)^i A_j D_k}{D_i^{q^j}}$ amb $A_j \in \mathbb{A}$ on:

$$\sum_{j=l}^{m} A_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{D_k^{q^j}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{D_k} = 0$$

Demostració:
Tenim

$$\frac{S_{\tilde{k}}}{D_{\tilde{k}}} = \sum_{i+j=\tilde{k}} \frac{(-1)^i A_j}{D_i^{q^j}} = \begin{cases} \sum_{j=\ell}^{m} \frac{A_j(-1)^{\tilde{k}-j}}{D_{\tilde{k}-j}^{q^j}} & if \;\; \tilde{k} \geq m \\ \sum_{j=\ell}^{\tilde{k}} \frac{A_j(-1)^{\tilde{k}-j}}{D_{\tilde{k}-j}^{q^j}} & if \;\; m \geq \tilde{k} \geq \ell \\ 0 & if \;\; \ell > \tilde{k} \end{cases}$$

Escrivim

$$\sum_{j=\ell}^{m} A_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{D_k^{q^j}} \right) = \sum_{j=\ell}^{m} A_j \left(\sum_{\tilde{k}=\ell}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{k}-\ell}}{D_{\tilde{k}-\ell}^{q^j}} \right) =$$

Ara volem intercanviar sumatoris, si ho fem directament surt

$$\sum_{\tilde{k}=\ell}^{\infty} \left(\sum_{j=\ell}^{m} A_j \frac{(-1)^{\tilde{k}-\ell}}{D_{\tilde{k}-\ell}^{q^j}} \right)$$

però fem una reordenació diferent,

$$A_\ell \cdot \left(\frac{1}{D_0^{q^\ell}} + \frac{(-1)^1}{D_1^{q^\ell}} + \frac{(-1)^2}{D_2^{q^\ell}} + \frac{(-1)^3}{D_3^{q^\ell}} + \dots \right)$$

$$A_{\ell+1} \cdot \left(\frac{1}{D_0^{q^{\ell+1}}} + \frac{(-1)^1}{D_1^{q^{\ell+1}}} + \frac{(-1)^2}{D_2^{q^{\ell+1}}} + \frac{(-1)^3}{D_3^{q^{\ell+1}}} + \dots \right)$$

$$A_{\ell+2} \cdot \left(\frac{1}{D_0^{q^{\ell+2}}} + \frac{(-1)^1}{D_1^{q^{\ell+2}}} + \frac{(-1)^2}{D_2^{q^{\ell+2}}} + \frac{(-1)^3}{D_3^{q^{\ell+3}}} + \dots \right)$$

$$\vdots$$

$$A_m \cdot \left(\frac{1}{D_0^{q^m}} + \frac{(-1)^1}{D_1^{q^m}} + \frac{(-1)^2}{D_2^{q^m}} + \frac{(-1)^3}{D_3^{q^m}} + \dots \right)$$

i reordenant amb diagonal aquests sumatoris, i com tenim $m-\ell+1$ files, a partir de $\tilde{k} \geq m$ hi ha en $D_{\tilde{k}}/D_{\tilde{k}}$ $m-\ell+1$ factors sumands, on s'obté l'igualtat desitjada.

Teorema 7. $\mathbf{e_C(1)}$ és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(t)$:
Suposem que és algebraic i per tant solució d'un polinomi lineal $A_l x^{q^l} + \cdots + A_m x^{q^m}$ amb $A_i \in \mathbb{A}$ (pel lema 3):

$$S_k = \sum_{i+j=k} \frac{(-1)^i A_j D_k}{D_i^{q^j}}$$

i

$$\sum_{j=l}^{m} A_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{D_k^{q^j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{D_k} = 0$$

Similarment a la demostració de que e és trascendent (veure apèndix A.1 per la prova), definim:

$$I \quad := D_\beta \textstyle\sum_{k=0}^{\beta} \dfrac{S_k}{D_k}$$

$$Q \quad := D_\beta \textstyle\sum_{k=\beta+1}^{\infty} \dfrac{S_k}{D_k}$$

On $I + Q = D_\beta \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{S_k}{D_k}$.
Per tant, si fem mòdul $[\beta - l]$ *a* $I + Q$*, ens queda que els sumands de* Q *són tots zero perquè* $\frac{S_k D_\beta}{D_k}$ *per* $k > \beta$*, no es cancel·len al numerador tots els* $[\beta - l]$*, i per* I *veiem que no tots els sumands són zero. Observem que per construcció* $I + Q = 0$*. Clarament* I *és de* $\mathbb{A}$ *per la definició de* D_k*. A més, l'únic sumand de* I *no nul mòdul* $[\beta - l]$ *és l'últim* $\left(\frac{S_\beta D_\beta}{D_\beta} = S_\beta\right)$ *perquè la resta de quocients de* $\frac{D_\beta}{D_k}$ *per* $k < \beta$ *és un polinomi de* $\mathbb{A}$ *on té l'expressió següent:*

$$\frac{S_k D_\beta}{D_k} = [\beta][\beta-1]^q \ \cdots \ [\beta-k+1]^{q^{k-1}} [\beta - l]^{q^{k-1}} \ \cdots \ [1]^{q^{k-1}}$$

Per tant, per I *ens queda:*

$$\begin{aligned} I &\equiv S_\beta \quad (mod\ [\beta - l]) \\ &\equiv (-1)^{\beta-l} A_l [\beta] \ \cdots \ [\beta - l + 1]^{q^{l-1}} \equiv (-1)^{\beta-l} A_l D_l \neq 0 \quad (mod\ [\beta - l]) \end{aligned}$$

per a β *suficientment gran,* $I \neq 0$*. Per l'altre banda, obtenim:*

$$deg(S_\beta) \leqslant max_j (j q^\beta + deg(A_j)) = m q^\beta + deg(A_m)$$

i per N *un terme qualsevol de* Q *obtenim:*

$$deg(N) \leqslant \beta q^\beta - (\beta+1) q^{\beta+1} + m q^{\beta+1} + deg(A_m)$$

Triant β *que faci que tots els graus dels termes de* Q *siguin negatius (on hi ha un nombre finit de* A_i*'s) força una contradicció, ja que* $I \neq 0$ *(conté almenys un terme que no té grau negatiu) i contradiu* $I + Q = 0$. $\square$

Teorema 8. Generalització per més sèries:
Sigui $\{\tilde{B}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *polinomis de* $\mathbb{F}_q[x]$*, que satisfan les tres condicions següents:*

1. $\tilde{B}_j$ *són polinomis.*

2. *Un nombre infinit dels* $\tilde{B}_j$*'s no són zero.*

3. $deg(\tilde{B}_k) \leqslant (q-1)(k-1)q^{k-1} - b_k q^k$ *per* k *prou gran, on* $b_k \to \infty$ *si* $k \to \infty$.

llavors la sèrie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k}{D_k} \in \mathbb{F}_q((T))$$

és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(t)$.

Demostració:
Suposant que és algebraic amb equació $f(X) = \sum_{i=0}^{m} A_j X^j$*. Pel lema 9 obtenim:*

$$\sum_{j=l}^{m} A_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k^{q^j}}{D_k^{q^j}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{D_k}$$

On:

$$M_k = \sum_{i+j=k} \frac{A_j \tilde{B}^{q^j} D_k}{D_i^{q^j}} \tag{3}$$

Ara, definim I i Q com en la demostració de la trascendència per la sèrie evaluada en 1. Per construcció $I + Q = 0$, on β serà triant més endavant.

És evident que I és en $\mathbb{F}_q[t]$ perquè els $\tilde{B}_k$ per la condició 3 verifiquen:

$$\begin{aligned}
deg(M_k) &\leqslant \max_j \left(q^j \cdot deg(\tilde{B}_i) + jq^k + deg(A_j) \right) && (4)\\
&\leqslant \max_j \left((q-1)(i-1)q^{k-1} - b_i q^k + deg(A_j) + jq^k \right) && (5)\\
&\leqslant (q-1)(i-1)q^{k-1} + mq^k - b_k^{'} q^k && (6)
\end{aligned}$$

per k suficientment gran, on

$$b_k^{'} = \min_{k \geqslant j \geqslant k-m} b_j$$

Com hem vist abans, estudiem el grau d'un terme arbitrari de Q que denotarem per Arb (de arbitrari):

$$\begin{aligned}
deg(Arb) &\leqslant \beta q^{\beta} - (\beta+1)q^{\beta+1} + (q-1)\beta q^{\beta} + mq^{\beta+1} - b_{\beta+1}^{'} q^{\beta+1} && (7)\\
&\leqslant -q^{\beta+1} + mq^{\beta+1} - b_{\beta+1}^{'} q^{\beta+1} && (8)
\end{aligned}$$

que va a $-\infty$ si $\beta \to \infty$. Per tant, per β prou gran, tots els termes de Q tenen grau negatiu, i per tant, per ser I de $\mathbb{A}$, perquè $I + Q = 0$ caldria $I = 0$ i $Q = 0$.

Ara com que per β prou gran

$$I \equiv M_{\beta} \qquad \mod \left(\frac{D_{\beta}}{D_{\beta-1}} \right)$$

A més:

$$\begin{aligned}
\deg \left(\frac{D_{\beta}}{D_{\beta-1}} \right) - \deg(M_{\beta}) &\geqslant \beta q^{\beta} - (\beta-1)q^{\beta-1} - (q-1)(\beta-1)q^{\beta-1} - mq^{\beta} + b_{\beta}^{'} q^{\beta}\\
&\geqslant q^{\beta}(1 - m + b_{\beta}^{'})
\end{aligned}$$

que si $\beta \to \infty$ va cap a ∞. Ara, per $I = 0$ i $Q = 0$ i $I \equiv M_{\beta}$ força que $M_{\beta} = 0$.

Com que existeix $\alpha > deg(A_l)$ tal que per tot $k \geqslant \alpha + l$, $M_k = 0$.

Ara, tenim que per la definició dels D_k i per l'equació (3)

$$\frac{D_{\alpha}^{q^l}}{D_{\alpha+l}} \cdot M_{\alpha+l} \equiv A_l B_{\alpha}^{q^l} \qquad \mod [\alpha]^{q^l}$$

ja que si desemvolupem:

$$\begin{aligned}
\frac{D_{\alpha}^{q^l}}{D_{\alpha+l}} \cdot M_{\alpha+l} &= \sum_{i+j=\alpha+l} \frac{A_j B_i^{q^j} D_{\alpha+l} D_{\alpha}^{q^l}}{D_i^{q^j} \cdot D_{\alpha+l}}\\
&= \sum_{i+j=\alpha+l} A_j B_i^{q^j} \frac{D_{\alpha}^{q^l}}{D_i^{q^j}}
\end{aligned}$$

Com que $j = l, \cdots, m$ si veiem que per $j > l$ això és múltiple de $[\alpha]^{q^l}$ ja estarà. Pel cas $j = l$, tenim $\frac{D_\alpha^{q^l}}{D_\alpha^{q^l}} = 1$ i no es cancel·la al aplicar mòdul $[\alpha]^{q^l}$. Per $j > l$ llavors si fem $j = l + r$, $i = \alpha - r$ per $r \geqslant 1$, $\frac{D_\alpha^{q^l}}{D_{\alpha-r}^{q^{l+r}}}$ ens queda:

$$\frac{D_\alpha^{q^l}}{D_{\alpha-r}^{q^{l+r}}} = \frac{[\alpha]^{q^l} \cdot [\alpha-1]^{q^{l+1}} \cdots [\alpha-r]^{q^{l+r}} \cdots [1]^{q^{l+\alpha-1}}}{[\alpha-r]^{q^{l+r}} \cdots [1]^{q^{\alpha+l-r+r-1}}}$$

On clarament tenim sempre un $[\alpha]^{q^l}$ no nul.

Ara, $[\alpha]^{q^l} \mid A_l B_\alpha^{q^l}$ per ser $M_\alpha = 0$. Ara fent inducció, suposem que $[k,\alpha]^{q^l}$ divideix $A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} B_k^{q^l}$ per $\beta - 1 \geqslant k \geqslant \alpha$:

$$A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} \frac{D_\beta^{q^l}}{D_{\beta+l}} M_{\beta+l} = A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} \sum_{j=l}^{m} \frac{A_j B_{\beta+l-j}^{q^j} D_\beta^{q^l}}{D_{\beta+l-j}^{q^j}} \tag{9}$$

$$\equiv A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} B_\beta^{q^l} \qquad \mathrm{mod}\ [\beta,\ \alpha]^{q^l} \tag{10}$$

On per veure l'igualtat 10 surt de que si agafem un dels termes del sumatori de l'igualtat 9 desenvolupant:

$$A_l B_\beta^{q^l} \frac{D_\beta^{q^l}}{D_\beta^{q^l}} + A_{l+1} B_{\beta+l-l-1}^{q^{l+1}} \frac{D_\beta^{q^{l+1}}}{D_{\beta-1}^{q^{l+1}}} + A_m B_{\beta+l-m}^{q^m} \frac{D_\beta^{q^m}}{D_{\beta+l-m}^{q^m}}$$

Com que $\frac{D_\beta}{F_{\alpha-1}^{q(\beta-\alpha+1)}} = [\beta,\ \alpha]$ per la definició de $[k,\ d]$, veurem que per $A_{l+1} B_{\beta+l-l-1}^{q^{l+1}} \frac{D_\beta^{q^{l+1}}}{D_{\beta-1}^{q^{l+1}}}$ és zero $\mathrm{mod}\ [\beta,\ \alpha]^{q^l}$ (i el raonament és anàleg per la resta de termes):

$$\begin{aligned} \frac{D_\beta^{q^l}}{D_{\beta-1}^{q^{l+1}}} &= \left(\frac{[\beta] \cdots [1]^{q^{\beta-1}}}{[\beta-1] \cdots [1]^{q^{\beta-2}}} \right)^{q^{l+1}} \\ &= \left([\beta] \cdot [\beta-1]^{q-1} \cdot [\beta-2]^{q(q-1)} \cdots [1]^{q^{\beta-2}(q-1)} \right)^{q^{l+1}} \\ &= [\beta,\ \alpha]^{q^l(q-1)} [\alpha-1]^{q^{\beta-\alpha+1}(q-1)} \cdots [1]^{q^{\beta-1}(q-1)} \end{aligned}$$

d'on surt el que volíem i per tant, $\mathrm{mod}\ [\beta,\ \alpha]^{q^l}$ divideix $A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} B_\beta^{q^l}$ per tot $\beta \geqslant \alpha$.

Ara, B_β és zero o el seu grau verifica que:

$$q^l \cdot \deg(B_\beta) \geqslant \deg\left([\beta,\ \alpha]^{q^l}\right) - \deg(A_l) \cdot \frac{q^{\beta-\alpha+1}-1}{q-1} \tag{11}$$

$$\geqslant (\beta - \alpha + 1) q^{\beta+l} - q^{\beta-\alpha+1} \cdot \deg(A_l) \tag{12}$$

$$\geqslant (\beta - \alpha) q^{\beta+l} \tag{13}$$

$$> (q-1)(\beta-1) q^{\beta-1+l} - b_\beta q^{\beta+l} \tag{14}$$

per β prou gran, on anem a detallar les desigualtats, la desigualtat 11 surt de que per ser divisible per $[\beta,\alpha]^{q^l}$, llavors

$$r(x) \cdot [\beta,\ \alpha]^{q^l} = A_l^{\frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1}} B_\beta^{q^l}$$

Per tant, si apliquem graus i aïllem el grau de $B_\beta^{q^l}$ obtenim:

$$\deg(r(x)) + q^l \deg([\beta,\ \alpha]) - \deg(A_l) \cdot \frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1} = \deg(B_\beta) q^l$$

Per tant, com que $\deg(r(x)) \geqslant 0$, llavors:

$$q^l \deg([\beta,\ \alpha]) - \deg(A_l) \cdot \frac{q^{k-\alpha+1}-1}{q-1} \leqslant \deg(B_\beta) q^l$$

La desigualtat 12 surt de calcular explícitament el grau de $[\beta,\ \alpha]$ *que és:*

$$\deg([\beta,\ \alpha]) := \deg\left(\frac{D_\beta}{D_{\alpha-1}^{q^{\beta-\alpha+1}}}\right)$$

$$= \beta q^\beta - q^{\beta-\alpha+1}(\alpha-1)q^{\alpha-1}$$

Per tant, operant i perque el grau de A_l *és com a mínim* q^l*, acotem i el resultat surt directe.*

Per 13 el que utilitzem és que si provem que $q^{\beta+l} - q^{\beta-\alpha+1} \cdot \deg(A_l) \geqslant 0$ *tindrem que directament treient-li aquesta quantitat a 12 obtindrem el que volem. Llavors acotant* $\deg(A_l) \geqslant q^l$*:*

$$q^{\beta+l} - q^{\beta-\alpha+1} \cdot \deg(A_l) = q^\beta \left(q^l - \deg(A_l) q^{-\alpha+1}\right)$$

$$\geqslant q^{\beta+l}\left(1 - q^{-\alpha+1}\right)$$

On clarament veiem que per $\alpha > 1$ *això és sempre positiu perquè* $q = p^k$ *per algun* k *i el primer més petit és* 2*, i nul per* $\alpha = 1$*. Per tant tenim el que volíem.*

Ara per la desigualtat 14, veurem que partit de la la linea 14 la podem acotar per superiorment per 13. Per tant desenvolupant i reagrupant:

$$(q-1)(\beta-1)q^{\beta+l-1} - b_\beta q^{\beta+l} = (\beta - b_\beta - 1)\, q^{\beta+l} + \underbrace{(1-\beta)q^{\beta+l-1}}_{<0}$$

$$\leqslant (\beta - 1 - b_\beta) q^{\beta+l} \leqslant (\beta - b_\beta)\, q^{\beta+l} < (\beta - \alpha)\, q^{\beta+l}$$

on per l'últim pas hem utilitzat que α *és un valor fixat i* b_β *per* β *prou gran superarà* α*, ja que* $b_\beta \to \infty$ *si* $\beta \to \infty$*.*

Això ja porta a contradicció amb la segona propietat (perquè seràn zero un nombre infinit) i tercera propietat (perquè el grau dels B_k *és més petit o igual que la linea* (10) *però tenim justament el contrari) que verifiquen els* B_k*'s, i per tant, tenim el resultat.* $\square$

Observació 5. :
Pel teorema anterior $e_C(1)$ *és trascendent sobre* $\mathbb{F}_q(T)[x]$ *ja que és el cas particular en que:*

- $B_j = 1$ *per tot* $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- *Tots són diferènts de zero (en particular un nombre infinit).*
- *El grau de 0 és més petit igual que la cota que dóna el teorema anterior (teorema 8).*

Lema 10. :
Si

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} < q^\beta \tag{15}$$

per $k_0 \geqslant \cdots \geqslant k_r$*, i a més:*

$$\frac{r+1}{q-1} \leqslant d < \frac{r+1}{q-1} + 1$$

llavors

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} \leqslant (q-1)q^{\beta-1} + \cdots + (q-1)q^{\beta-d}$$
$$= q^\beta - q^{\beta-d}$$

Demostració:

Escrivim novament $q^{k_0}+\ \cdots\ +q^{k_r}=\delta_0 q^{\beta-s_0}+\ \cdots\ +\delta_j q^{\beta-s_j}$. *Per tal que la desigualtat (15) romangui certa, cal que* $s_0\geqslant 1$, *ja que, en cas contrari* $q^{\beta-s_0}=q^{\beta}$ *i per seguir sumant les potències* $q^{\beta-s_i}$ *això trenca la desigualtat. Ara el RHS de (15) té el màxim valor per* $\delta_i=q-1$, *i* $s_i=i+1$ *(per* $i\in\{0,\ \cdots\ ,\ j\}$*). Ara veurem que* $j+1\leqslant\dfrac{r+1}{q-1}$, *ja que si fem* $j+1\geqslant\dfrac{r+1}{q-1}$, *com per construcció* $r+1\geqslant j+1$, *dividint per* $q-1$ *obtindriem* $j+1\leqslant\dfrac{r+1}{q-1}$ *i per tant* $j+1=\dfrac{r+1}{q-1}$.
Per tant:

$$\delta_0+\delta_1+\ \cdots\ +\delta_j=(j+1)(q-1)\leqslant\frac{r+1}{q-1}\cdot(q-1)\leqslant d(q-1) \tag{16}$$

d'on, el resultat és qüasi directe, ja que $j+1\leqslant d$, *i per tant:*

$$\begin{aligned} q^{k_0}+\ \cdots\ +q^{k_r} &\leqslant (q-1)\left(q^{\beta-1}+\ \cdots\ +q^{\beta-(j+1)}\right)\\ &\leqslant (q-1)\left(q^{\beta-1}+\ \cdots\ +q^{\beta-d}\right)=q^{\beta}-q^{\beta-d}\end{aligned}$$

Teorema 9. ξ **és trascendent sobre** $\mathbb{F}_q(t)$**:**
ξ *és trascendent sobre* $\mathbb{F}_q[T]$ *on:*

$$\xi:=\lim_{k\to\infty}\frac{[1]^{\frac{q^k}{q-1}}}{\prod_{j=0}^{k}[j]}$$

Demostració:
Suposem que és algebraic. Podem suposar que ξ *verifica un polinomi de la forma*

$$\sum_{j=0}^{r+1}C_{r+1-j}t^j\ \in\mathbb{F}_q(x)[t]$$

on $\alpha_0=\xi$ *i* $\alpha_1,\ \cdots\ ,\alpha_r$ *la resta d'arrels. Suposem que* $r+1=q^s$. *Escrivim:*

$$\gamma_i=E\alpha_i$$

per $i=0,\ \cdots\ ,r$ *on* E *és un polinomi irreductible a* $\mathbb{F}_q[t]$ *de grau* $e>d$ *on* d *verifica la desigualtat del lema 10, i* $d>\deg(C_{r+1})$. *Fiquem*

$$\begin{aligned} S(k_0,\ \cdots\ ,k_r)&=(-1)^{k_0+\ \cdots\ +k_r}\sum\gamma_0^{q^{k_0}}\cdot\ \cdots\ \cdot\gamma_r^{q^{k_r}}\\ \bar{S}(k_0,\ \cdots\ ,k_r)&=(-1)^{k_0+\ \cdots\ +k_r}\sum\alpha_0^{q^{k_0}}\cdot\ \cdots\ \cdot\alpha_r^{q^{k_r}}\end{aligned}$$

on les sumes són sumes simètriques de les quantitats involucrades. Tenim

$$S(k_0,\ \cdots\ ,k_r)=E^{q^{k_0}+\ \cdots\ +q^{k_r}}\bar{S}(k_0,\ \cdots\ ,k_r) \tag{17}$$

Per la propietat de ψ *que és zero sobre* $E\xi$, *obtenim*

$$0=\psi(E\xi)=\psi(E\alpha_0)=\psi(\gamma_0)$$

Com que:

$$0=K_\beta\prod_{i=0}^{r}\psi(\gamma_i)=K_\beta\prod_{i=0}^{r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma_i^{q^k}}{D_k} \tag{18}$$

$$=K_\beta\sum_{k_0\geqslant\ \cdots\ \geqslant k_r}\frac{S(k_0,\ \cdots\ ,k_r)}{D_{k_0}\cdot\ \cdots\ \cdot D_{k_r}} \tag{19}$$

on $K_\beta;=K_\beta(r):=\prod_{j=0}^{r}D_{\beta-r}$ *(per* $\beta\leqslant r$*). Per més propietats de* K_β *mirar els apèndix A.1. Ara l'equació (19) la trenquem en* I *i* Q.
En el troç I *consisteix en els termes tal que*

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} \leqslant q^{\beta} + \cdots + q^{\beta - r}$$

i els de Q són els que

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} > q^{\beta} + \cdots + q^{\beta - r}$$

on β enter per determinar. Ara l'equació (19):

$$I + Q = 0$$

Hem provat (pels lemes de l'apèndix de la secció) que tots els integrants de I són polinomis de $\mathbb{F}_q[x]$ (pels lemes 14,17 i 19) i que per β prou gran tots els integrants de Q són de grau negatiu. Això sumat a que $I + Q = 0$ força que $I = 0$ i $Q = 0$.

Provem que $I \neq 0$ obtenim la contradicció suposant $I = 0$. Sigui $I = I_1 + I_2$ on I_1 és la suma dels termes de l'equació (19) complint:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} < q^{\beta}$$

i I_2 són els termes que:

$$q^{\beta} + \cdots + q^{\beta - r} \geqslant q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} \geqslant q^{\beta}$$

Per ser $I = 0$, obtenim $I_1 + I_2 = I = 0$. També per M definida en el lema 16 divideix cada terme de I_1, però per altre banda, per β suficientment gran, el $\deg(M)$ és més gran que el grau de I_2. Per tant, implica que $I_1 = 0$ i $I_2 = 0$. Però per una tria adecuada de β, existeix H un terme de I_2 que no és zero i té la propietat de ser divisible per E. $\square$

3 Conjectures sobre transcendència

En aquesta secció, parlarem sobre resultats que permeten extendre (de forma anàloga als cossos de funcions) resultats i/o conjectures tals com el teorema de Lindermann-Weierstrauss. També, veurem resultats conjecturats sobre $\mathbb{Q}$, que estàn provats sobre cossos de funcions com la conjectura de Schanuel. Per poder veure alguns d'aquest resultats i generalitzacions més en profunditat, es recomenable llegir el capítol 10 de [10, Thakur] i l'article [2, Dennis].

Com veurem, resultats de trascendènica que involucren la funció exponencial evaluada en nombres algebraics (i supossant la conjectura de Schanuel certa), tenen un anàleg per la funció $e_C(z)$ i fins i tot més generals (involucrant les derivades formals de la funció $e_C(z)$) com el teorema 11. Fet que novament reforça les bones propietats dels cossos de funcions per provar resultats que encara no s'han provat sobre $\mathbb{Q}$. Per veure resultats sobre $\mathbb{Q}$ (pagant el preu de supossar certa la conjectura de Schanuel) es pot veure el treball [1, Bars].

Començarem introduïrem el concepte de grau de trascenencia (definició 17), que ens permetrà parlar de si un nombre és trascendent no sobre el cos base sinó sobre extensions trascendents del cos base. Aquest concepte està molt lligat a ser algebràicament independent. Desprès presentarem Lindemann-Weierstrauss i la conjectura de Schanuel "originals", i els seus anàlegs a $\mathbb{F}_q(T)$. Per concluïr la secció, probarem l'independència algebràica de $e_C(1)$ i ξ per $q > 2$ sobre $\mathbb{F}_q(T)$ (corol·lari 3).

Definició 16. **algebraicament independets sobre F/N:** *. Sigui F/N una extensió de cossos. Triem $a_1, \cdots, a_m \in F$. Diem que $a_1, \cdots, a_m$ són algebraicament independents sobre N si $\forall f \in N[x_1, \cdots, x_m]$ es verifica $f(a_1, \cdots, a_m) = 0$ llavors f és el polinomi nul.*

Definició 17. **grau de trascendència:**
Definim el grau de trascendència de un subconjunt $A \subset L$ on L/M extensió de cossos com el nombre màxim d'elements algebraicament independents de A sobre el cos N. Ho denotarem per $\mathbf{deg\_tr}_N(A)$

Exemple 3. **Grau de trascendència:**
El grau de trascendència de π i de $\sqrt{2}i$ és 1 perque $\sqrt{2}i$ és algebràic sobre $\mathbb{Q}$ i π és trascendent, per tant si $p \in \mathbb{Q}[X,Y]$ és un polinomi que té per arrels π i $\sqrt{2}$, força que sigui el polinomi identicament zero, ja que, en cas contrari, π seria solució d'un polinomi a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)[Y]$, cosa que contradiu la trascendència de π sobre $\mathbb{Q}$ perque per la fórmula de les torres, llavors tindriem que $[\mathbb{Q}(\pi,\sqrt{2}i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\pi,\sqrt{2}i) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)][\mathbb{Q}(\sqrt{2}i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\pi,\sqrt{2}i) : \mathbb{Q}(\pi)][\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] < \infty$!!!. Per tant, per un raonament anàleg, tenim que el grau de trascendència entre un element algebràic i un trascendent és 1, pel cas que el cos base $\mathbb{Q}$.

Teorema 10. **de Lindemann-Weierstrauss:**
Siguin $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre $\mathbb{Q}$ diferents, llavors $\{e^{\alpha_j}\}_{j=1}^n$ verifiquem que són algebraicament independents.

En el article [1], podem trobar resultats importants (utilitzant el teorema de Lindermann-Weierstrauss) sobre la trascendència de les funcions trigonométriques i les funcions $log()$ i $exp()$ evaluades sobre nombres algebraics. peró en aquesta secció ens centrarem en la conjectura de Schanuel.

Conjectura 1. **de Schanuel:** *Siguin $y_1, \cdots, y_m \in \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}-$independents. Llavors com a mínim, m dels nombres $y_1, \cdots, y_m, e^{y_1}, \cdots, e^{y_m}$ són algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.*

Aquesta conjectura té un anàleg amb ξ i $e_C(1)$ i en característica positiva és pot demostrar. Novament el cas de característica zero no podem afirmar-ho però en característica p sí. El resultat no és només l'anàleg sino que té una traducció d'un enunciat més general i aquest enunciat es pot demostrar.
Per la definició de sèrie absolutatment convergent de $e_C(z)$ podem parlar de la seva derivada (en aquest cas la considerem respecte la variable z). On hi ha resultats de trascendència que relacionen la derivada amb l'exponencial en un anàleg a la conjectura de Schanuel. Per tant primer cal veure com és la derivada j-ésima de l'exponencial de Carlitz. Té la forma següent per $j \in \{1, \cdots p-1\}$:

$$e_C^{(j)}(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j! \cdot Z^{q^i}}{[i]^j D_i} \tag{20}$$

on per $j \geqslant p$ la derivada és nul·la de la característica p de $\mathbb{C}_\infty$. Fem el càlcul de la primera derivada i la segona per exemplificar la fórmula (20). Com cal derivar terme a terme:

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{Z^{q^i}}{D_i} = \frac{Z^{q^i} D_i'}{D_i^2} = \frac{Z^{q^i}\left(D_{i-1}^q + 0\right)}{D_i^2} = \frac{Z^{q^i}\frac{D_i}{[i]}}{D_i^2} = \frac{Z^{q^i}}{[i]D_i}$$

Si tornem a derivar respecte T i aprofitant els càlculs anteriors:

$$\frac{Z^{q^i} 2[i]\frac{D_i}{[i]}}{[i]^2 D_i^2} = \frac{2Z^{q^i}}{[i]^2 D_i}$$

Teorema 11. de Schanuel a $\mathbb{F}_q(T)$:
Siguin $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q\bar{(T)}_\infty$ $\mathbb{F}_q(T)$-linealment independents, aleshores:

$$\mathbf{deg\_tr}_{\mathbb{F}_q(T)}\left(z, e_C(\alpha_1 z), \cdots, e_C(\alpha_n z), \cdots, e_C^{(p-1)}(\alpha_1 z), \cdots, e_C^{(p-1)}(\alpha_n z),\right) = np + 1$$

Una pregunta natural sobre transcendència és que si π és trascendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ i viceversa. Si suposem certa la conjectura de Schanuel podem donar una resposta afirmativa en cas de característica zero.

Corol·lari 2. :
Sota la conjectura de Schanuel, obtenim que π és trascendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ i e és trascendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.

Demostració: *Triem 1 i $i\pi$ que són $\mathbb{Q}-$independents, llavors considerem $1, i\pi, e, e^{i\pi}$, llavors com a mínim hi han dos valors algebraicament independents hi per força han de ser e i $i\pi$. Per tant $\nexists f \in \mathbb{Q}[x,y] \setminus \{0\}$ tal que $f(e, i\pi) = 0$. Per tant ja hem acabat perquè si suposem π algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ $i\pi$ és producte d'algebraic i per tant algebraic a $\mathbb{Q}(e)$ cosa que acabem de veure que no pasa.* $\square$

Un cop més l'analogia entre l'exponencial de Carlitz i l'exponencial complexa és notable perquè podem definir un anàleg del Teorema de Lindemann-Weierstrauss en termes de e_C, però en característica positiva és un teorema.

Teorema 12. Lindemann-Weierstrauss a $\mathbb{F}_q(T)$:
Siguin $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q\bar{(T)}$ $\mathbb{F}_q(T)$-linealment independents, aleshores $e_C(\alpha_1) \cdots, e_C(\alpha_n)$ són algebraicament independents sobre $\mathbb{F}_q(T)$.

Per probar el següent teorema (teorema 3 del article d'en L. Denis ([2])), assumirem certs resultats que requeririen de teoria de t-moduls i que no introduïré en aquest treball perquè és un tema molt extens. Per a un lector que vulgui més informació sobre t-mòduls es pot consultar el llibre ([3, Goss], capitol 5).

Introduïm la següent notació.

Notació 4. :
Sigui $\eta \in \mathbb{F}_q^\times$, designem per σ_η l'únic automorfisme continu de k_∞ tal que $\sigma_\eta(T) = \eta T$. Aquest automorfisme el podem extendre a $\bar{F}_q((\frac{1}{T}))$, decretant que $\sigma_\eta|_{F_q} \equiv Id$.

Recordem que $\sigma_\eta(T) = \eta T$ (un automorfisme). On $\eta \in \mathbb{F}_q^\times$.

Lema 11. :
Obtenim:

$$\sigma_\eta(D_i) = \eta^i D_i$$

Demostració:
Per la recurrència $D_i = [i]D_{i-1}^q$ obtenim el resultat per inducció peró també ho podem provar fent els càlculs:

$$\begin{aligned}\sigma_\eta(D_i) = \sigma_\eta\left(\prod_{j=0}^{i-1} T^{q^i} - T^{q^j}\right) &= \prod_{j=0}^{i-1} \sigma_\eta(T^{q^i}) - \sigma_\eta(T^{q^j}) = \prod_{j=0}^{i-1} \eta^{q^i}T^{q^i} - \eta^{q^j}T^{q^j} \\ &= \prod_{j=0}^{i-1} \eta\left(\eta^{q^i-1}T^{q^i} - \eta^{q^j-1}T^{q^j}\right) = \eta^i \prod_{j=0}^{i-1} \eta^{q^i-1}T^{q^i} - \eta^{q^j-1}T^{q^j} \\ &= \eta^i \prod_{j=0}^{i-1} T^{q^i} - T^{q^j} := \eta^i D_i\end{aligned}$$

On hem utilitzat per $i \geqslant j > 1$ que $\eta^{q^j-1} = \dfrac{\eta^{q^j}}{\eta} = \dfrac{\eta}{\eta} = 1$. El cas $j = 0$ és directe perquè és $\sigma_\eta([i]) = \left(\eta^{q^i-1}T^{q^i} - T\right)\eta = \eta[i]$ tal i com volem. $\square$

Lema 12. :

1. *Sigui μ una arrel del polinomi $X^{q-1} - \frac{1}{\eta}$, aleshores $\mu \in \bar{\mathbb{F}}_q \setminus \mathbb{F}_q$ i per $\forall z \in \mathbb{F}_q\bar{(T)}_\infty$, obtenim $e_\eta(z) = \frac{e_C(\mu z)}{\mu}$.*
2. *$e_\eta(z)$ és la funció exponencial de T-modul ϕ_η de rang 1 definit per l'equació funcional $\phi_\eta(T) = T\tau^0 + \eta^{-1}\tau$.*
3. *$\sigma_\eta(e_C(z)) = e_\eta(\sigma_\eta(z))$*

Demostració:

1. *Observem que $\mu \notin \mathbb{F}_q$ perquè η no és 1 i per tant, $\mu^{q-1} \neq 1$ i en conseqüència $\mu \notin \mathbb{F}_q^\times$ i zero tampoc per raons òbvies. Ara estudiem les potències de $\frac{1}{\eta}$ i per recurrència trobem que $\mu^{q^h-1} = \eta^{-h}$. Per tant, per el resultat que hem obtingut per les potències de μ i $\frac{1}{\eta}$ aplicant-ho:*

$$e_\eta(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{D_i \eta^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{q^i} Z^{q^i}}{\mu D_i} = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu Z)^{q^i}}{D_i} = \frac{1}{\mu} e_C(\mu Z)$$

   tal i com volíem.

2. *Comprovem que $e_\eta(Z)$ verifica l'equació funcional:*

$$e_\eta(TZ) - Te_\eta(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{Z^{q^i} T^{q^i}}{\eta^i D_i} - \frac{Z^{q^i} T}{\eta^i D_i} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{\eta^i D_{i-1}^q} = \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{\eta^{i-1} D_{i-1}^q} = \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{\eta^{(i-1)q} D_{i-1}^q}$$

   on hem utilitzat que $\eta \in \mathbb{F}_q^\times$ i per tant $\eta^i = \eta^{q(i-1)}$. Ara:

$$\frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{\eta^{(i-1)q} D_{i-1}^q} = \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{Z^{q^{i-1}}}{\eta^{(i-1)} D_{i-1}} \right)^q = \frac{1}{\eta} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z^{q^{i-1}}}{\eta^{(i-1)} D_{i-1}} \right)^q = \frac{1}{\eta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{q^k}}{\eta^k D_k} \right)^q = \frac{1}{\eta} e_\eta(Z)^q$$

3. *Operant i aplicant el lema 11:*

$$\sigma_\eta(e_C(Z)) = \sigma_\eta \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z^{q^i}}{D_i} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_\eta \left(Z^{q^i} \right)}{\eta^i D_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_\eta \left(Z \right)^{q^i}}{\eta^i D_i} = e_\eta(\sigma_\eta(Z))$$

Proposició 5. mòdul de Carlitz Twistat:
Sigui e_C^Δ (per $\Delta \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \mathbb{F}_q$ un polinomi irreductible) la sèrie de Carlitz Twistada, és a dir l'exponencial que té per acció:

$$e_C^\Delta(TX) = \Delta e_C^\Delta(X)^q + Te_C^\Delta(X)$$

Demostració:
Començem definint $e_C^\Delta(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{a_i \Delta^i Z^{q^i}}{D_i}$, i volem trobar una recurrència per els coeficients, i per fer-ho utilitzem l'acció que volem que verifiqui:

$$\begin{aligned} e_C^\Delta(TZ) - Te_C^\Delta(Z) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\frac{(TZ)^{q^i} \Delta^i}{D_i} - \frac{TZ^{q^i} \Delta^i}{D_i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Delta^i \frac{Z^{q^i} \left(T^{q^i} - T \right)}{D_i} \\ &= \Delta \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1} \Delta^{(i-1)q} \frac{Z^{q^i}}{D_{i-1}^q} \end{aligned}$$

Agrupant pel grau obtenim:

$$a_i \Delta^i \frac{[i]}{D_i} = a_{i-1}^q \Delta^{(i-1)q+1} \frac{1}{D_{i-1}^q} \iff a_i = a_{i-1}^q \Delta^{(q-1)(i-1)}$$

Necessariament la condició inicial de la recurrència és $a_0 = 1$.

Ara estudiem la convergència d'aquesta sèrie. Primer calculem la valoració dels coeficients a_i.

$$v_\infty(a_i) = qv_\infty(a_{i-1}) + (i-1)(q-1)v_\infty(\Delta) = q^i v_\infty(a_0) + \sum_{j=0}^{i-1} q^j (i-1)(q-1) v_\infty(\Delta) = \frac{q^i - 1}{q-1}(i-1)(q-1)v_\infty(\Delta)$$

Ara:

$$\begin{aligned} v_\infty\left(a_i \Delta^i X^{q^i}\right) - v_\infty\left(D_i\right) &= v_\infty\left(a_i\right) + i v_\infty\left(\Delta\right) + -q^i + iq^i \\ &= (q^i-1)(i-1)v_\infty\left(\Delta\right) + iv_\infty\left(\Delta\right) + (i-1)q^i \\ &= (i-1)q^i\left(v_\infty\left(\Delta\right)+1\right) + v_\infty\left(\Delta\right) \end{aligned}$$

Teorema 13. :
Sigui $\gamma \in \mathbb{F}_q\bar{(T)}$ i sigui el grau $c \geqslant 3$ a $\mathbb{F}_q(T)$, si $u \in \mathbb{F}_q\bar{(T)}^\times{}_\infty$ tal que $\mathbb{F}_q(T)(\gamma) \cap 1/u(\Upsilon) = \{0\}$, aleshores:

$$\mathbf{deg\_tr}_{\mathbb{F}_q(T)}(e_C(u),\ e_C(u\gamma),\ \cdots\ ,e_C(u\gamma^{c-1})) \geqslant 2$$

Teorema 14. :
Siguin $\alpha, \beta \in k_\infty \setminus \{0\}$ Si suposem que existeix un $\eta \in \mathbb{F}_q^\times$ i $a, b \in \mathbb{Z}$ tals que $\sigma_\eta(\eta^a \alpha)$ i $\sigma_\eta(\beta) = \eta^b \beta$.

1. *Si $\eta \notin \{-1, 1\}$ aleshores $e_C(\alpha)$ és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(T)(\beta)$.*

2. *Si $\eta \neq 1$ i si α és algebraic, aleshores $e_C(\alpha)$ és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(T)(\beta)$.*

Demostració:
Siguin $\alpha, \beta \in k_\infty$ no nuls verificant les hipòtesis de l'enunciat. Suposem que $e_C(\alpha)$ és algebraic sobre $k(\beta)$. Per provar el primer apartat del teorema, apliquem el teorema 13 de l'apèndix on $\gamma = \mu$ i $\alpha = u$. L'hipòtesi sobre α està ben verificada perquè un element diferent de zero de la xarxa de períodes Λ no es troba a $\bar{F}_q((\frac{1}{T}))$ perquè $q \neq 2$ (per com és la xarxa de zeros de l'exponencial de Carlitz). Demostrar que μ té grau més gran o igual que 3. S'ha de demostrar que μ no es troba en una extensió de grau 2 de $\mathbb{F}_q$, que equival a $\mu^{q^2-1} = \frac{1}{\eta^2}$, n'hi ha prou que η sigui diferent de $0, \pm 1$.

Per provar el segon apartat, utilitzem que $\eta \neq 0, 1$ força que $\mu \notin \mathbb{F}_q$, pel raonament anterior si la conclusió del teorema és falsa, aleshores $e_C(\alpha)$ i $e_C(\mu\alpha)$ són algebraicament dependents. Això porta a contradicció amb el teorema 12 (l'anàleg a Lindemann-Weierstrauss). □

Un resultat que surt del teorema 14 és el següent:

Corol·lari 3. :

1. *Si $q \geqslant 3$ aleshores ξ i $e_C(1)$ són algebraicament independents sobre $\mathbb{F}_q(T)$.*

2. *Si $q \geqslant 4$ llavors:*

   (a) *Sigui $P \in \mathbb{F}_q[X]$ i no nul, llavors $e_C(P(\xi))$ i ξ són algebraicament independents sobre $\mathbb{F}_q(T)$.*

   (b) *$\forall \alpha \in \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T^{q-1}}\right)\right)$ no nul, $e_C(\alpha)$ és trascendent sobre $\mathbb{F}_q(T)(\xi)$.*

Demostració:
Gràcies al teorema 14 les demostracions són directes.

1. *Com que $\xi = \prod_{i=0}^\infty \left(1 - \frac{[i]}{[i+1]}\right)$ i els polinomis en variable T $[i]$ són invariants per tot σ_η, si apliquem el cas 2 del teorema 14 per $\alpha = 1$ i $\beta = \xi$ amb $a = b = 0$ obtenim el resultat.*

2. *Aplicar 1 del teorema 14 amb $\alpha = \beta = P(\xi)$.*

3. *α és invariant per tot σ_η. Triant $\beta = \xi$, pel teorema 14 $e_C(\alpha)$ és trascendent sobre l'extensió $\mathbb{F}_q(T)(\xi)/\mathbb{F}_q(T)$.*

□

Novament hi ha una diferència entre el cas de caracterísitca zero i el nostre cas, perquè sobre $\mathbb{Q}$ no se sap si e i π són algebraicament independents peró els seus anàlegs si gràcies al corol·lari.

4 Funció ζ_q de Carlitz-Goss, resultats de trascendència. Anàlogia amb la ζ de Riemann

A continuació, definirem un anàleg a la funció ζ de Riemann amb característica positiva, la funció ζ_q de Carlitz-Goss. Com en el cas de la funció ζ de Rienamm, aquestes funcions són exemples de $L-$funcions, una família més general que s'extén a través d'anàlegs als caràcters de Dirichlet.

Tot i això, aquesta secció no sortirem de ζ_q i ζ de Riemann i donarem un anàleg als números de Bernulli (els nombres de Bernulli-Carlitz) que juguen un paper important en la descripció dels valors en els enters de la funció ζ de Riemann pels parells i els senars.

Un petit conveni que cal remarcar és que seguint l'analogia de l'introducció del treball, ens referirem molts cops als enters pensant en els elements de $\mathbb{F}_q[T]$ ja que són els que fan el paper de $\mathbb{Z}$ en aquest treball. Una primera observació és que $\mathbb{Z}$ és pot trencar en dos conjunts disjunts (els parells i els senars) on si ens fixem, el nombre d'elements invertibles a $\mathbb{Z}$ són dos (± 1), per tant podem pensar que estem trencant-los en $|\mathcal{U}(\mathbb{Z})|\mathbb{Z} \oplus (|\mathcal{U}(\mathbb{Z})|\mathbb{Z}\oplus)^c$ (on c denota el complementari). Aquesta idea de trencar en els parells i els senars l'extendrem també a $\mathbb{F}_q[T]$, on el nombre d'unitats de $\mathbb{F}_q[T]$ és $q-1$ i els parells a $\mathbb{F}_q[T]$ seràn els múltiples de $q-1$ (veure la notació 5).

Tancarem la secció parlant d'un resultat que torna a posar de relleu les difrències entre el cas de característica zero i el de característica positiva, que és el teorema de Yu (teorema 16) que caracteritza la trascendència de ζ_q de Goss evaluada en el anàleg dels enters.

4.1 Funció ζ de Carlitz-Goss

Començem presentant formalment l'anàleg de la ζ de Riemann a $K = \mathbb{F}_q(T)$ (en tot aquest capítol).

Definició 18. Valors especials de ζ_q:

Sigui $k \in \mathbb{N}$, definim:

$$\zeta_q(k) := \sum_{a\in\mathcal{A}^+} \frac{1}{a^k}$$

que convergeix en K_∞. Com per la funció ζ de Riemann, per $k \in \mathbb{N}$ la podem reescriure via un producte d'Euler:

$$\zeta_q(k) = \prod_{f\in\mathcal{A}^+} \frac{1}{1-\frac{1}{f}}$$

De forma anàloga a la funció ζ de Riemann, la tenim inicialment definida per $\mathfrak{Re}(z) > 1$ per $z \in \mathbb{C}$ i el que fem és prolongar-la a tot el pla complex, voldrem extendre la següent funció que, gràcies als treballs de David Goss, va trobar una expressió alternativa de ζ_q que extén la funció inicialment a tot enter:

Definició 19. Funció ζ de Carlitz-Goss per $\mathbb{F}_q[T]$ extesa als enters:

$$\zeta_q(n) := \sum_{d\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \sum_{a\in\mathcal{A}_d^+} \frac{1}{a^n}$$

A priori aquesta sèrie no té perquè convergir per $n < 0$ però, com veurem més endevant, a partir d'un cert n prou gran, $\sum_{a\in\mathcal{A}_d^+} a^{-n} = 0$, per tant hi ha una suma finita i per tant convergència.

Observació 6. :

Per $k \in \mathbb{N}$ la sèrie $\sum_{a\in\mathcal{A}^+} \frac{1}{a^k}$ convergeix, ja que podem reordenar i la podem expressar com:

$$\sum_{a\in\mathcal{A}^+} \frac{1}{a^k} = \sum_{d\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left(\sum_{a\in\mathcal{A}_d^+} \frac{1}{a^k} \right)$$

El següent resultat és la proposició 26 de l'apèndix peró cal enunciar-la (prova a l'apèndix) per demostrar la convergència de ζ_q.

Proposició. :

Sigui $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, W un $\mathbb{F}_q-$espai vectorial de dimensió finita d sobre un cos $F/\mathbb{F}_q$. Si agafem $f \in F \setminus W$, si $d > \dfrac{l_q(k)}{q-1}$ (on $l_q(k) = M$ on M és el superíndex de $\sum_{i=0}^M k_i q^i$ (expressió q-àdica de k) per $k_M \neq 0$), llavors:

$$\sum_{w\in W} (f+w)^k = 0$$

Teorema 15. sobre la convergència de ζ_q:
Si $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ verifica que $d > \dfrac{l_q(k)}{q-1}$, aleshores:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_d^+} a^k = 0$$

Demostració: *Amb les notacions de la proposició anterior (demostrada com a proposició 26 del apèndix): Agafant $W = \mathcal{A}_d$, $F = \mathbb{F}_q(T)$ i $f = T^d \in F \setminus \mathcal{A}_d$, per la proposició anterior,*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_d^+} a^k = \sum_{w \in \mathcal{A}_{d-1}} (T^d + w)^k = 0$$

per $d > \frac{l_q(k)}{q-1}$. $\square$

Aquest resultat força que, a partit d'un cert punt la funció ζ_q no estigui afegint res (a la seva expressió com a sèrie), per tant és una suma finita i per tant la sèrie numèrica és absolutament convergent.

4.2 Números de Bernoulli-Carlitz

Notació 5. :
En aquesta secció ens referirem a parell i senar per denotar els múltiples de $q-1$ o no, respectivament.

Això es deu a que el número d'invertibles de $\mathbb{F}_q[t]$ és igual al nombre d'invertibles de $\mathbb{F}_q$ que és $q-1$. En el cas de caracterítica zero el nombre d'invertibles de $\mathbb{Z}$ és 2 (pels valors ± 1) i com veurem a continuació és important distingir els dos casos.

Cal presentar els números de Bernoulli pel cas de característica zero i el seu anàleg em característica positiva, els nombres de Bernoulli-Carlitz.

Definició 20. Números de Bernoulli:
Sigui $m \in \mathbb{N}\{0\}$, definim els següents $B_m \in \mathbb{C}$ a través de la següent funció (on l'igualtat té sentit al seu radi de convergència) per expandir-la com a sèrie de potències en t:

$$\frac{t}{e^t - e^0} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$$

On els B_m's són els coeficients de la sèrie, i es prova que $B_m \in \mathbb{Q}$

Aquest nombres són molt importants perquè permeten expressar la funció ζ de Riemann per gairabé tot enter:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

i via equació funcional,

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \text{ i } k \geqslant 2$$

Per poder definir els nombres de Bernoulli-Carlitz cal definir un anàleg al factorial a $\mathbb{F}_q(T)$ que permeti expressar-los de forma compacta.

Definició 21. Factorial de Carlitz:
Sigui $k \in \mathbb{N}$ i k_i el coeficient i-èssim de la seva expressió q-àdica $\left(\sum_{i=0}^{M} k_i q^i\right)$. Llavors definim:

$$\prod(k) := \prod_{j=0}^{M} D_j^{k_j}$$

Observem que com el factorial, $0! = 1$ i $\prod(0) = 1$, $1! = 1$ i $\prod(1) = 1$. A més $\prod(q^j) = D_j$ (perquè $D_k^0 := 1$).

Ara de forma anàloga, pel cas de $\mathbb{F}_q(T)$, utilitzant l'anàleg de l'exponencial (l'exponencial de Carlitz) podem definir un anàleg als números de Bernoulli.

Definició 22. Números de Bernoulli-Carlitz:
Similarment a la definició anterior, definim els $BC(m) \in \mathbb{C}_\infty$ (números de Bernoulli-Carlitz) com els coeficients de la sèrie en z següent,

$$\frac{z}{e_C(z) - e_C(0)} = \frac{z}{e_C(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{BC(m)}{\prod(m)} z^m$$

Observem que hem utilitzat que $e_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{D_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{\prod(q^j)}$, i es comprova que $BC(m) \in \mathbb{F}_q(T)$.

Podríem preguntar-nos si els coeficients d'aquesta sèrie són de K, però observem que $\frac{z}{e_C(z)} = \left(\frac{e_C(z)}{z}\right)^{-1}$ on $\frac{e_C(z)}{z}$ té coeficient constant invertible, per tant considerar el invers multiplicatiu és una sèrie amb coeficients dins de K també (per la proposició 19 que dóna la condició necessària i suficient per tal que una sèrie sigui invertible).

Remarquem que aquesta definició depen fortament de l'expressió de l'exponencial de Carlitz, és a dir que si fem un twistat d'aquesta (de $e_C(z)$) canviarà l'expressió de ξ (probablement per un $\tilde{\xi}$ i dels D_i's que serà ξ multiplicat per algun algebraic) i farà que els nombres següents siguin també diferents.

La següent pregunta que cal respondre és com calculem aquests $BC(m)$, i la resposta és la següent observació.

Observació 7. Recursivitat dels nombres $BC(m)$: *Per la definició de la sèrie anterior,*

$$\begin{aligned} z &= e_C(z) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{BC(m)}{\prod(m)} z^m \\ &:= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{q^j}}{\prod(q^j)}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{BC(m)}{\prod(m)} z^m \end{aligned}$$

Agrupant pel grau obtenim

- $BC(0) = 1$
- $0 = \sum_{j=0}^{q^j \leqslant k+1} \frac{BC(k+1-q^j)}{D_j \cdot \prod(k+1-q^j)}$ *que si separem la suma en $j = 0$ i la resta i aïllem:*

$$BC(k) = -\prod(k) \cdot \sum_{j=1}^{q^j \leqslant k+1} \frac{BC(k+1-q^j)}{D_j \cdot \prod(k+1-q^j)}$$

Ara veurem un resultat que relaciona els números de Bernulli-Carlitz amb la funció ζ_q:

$$\sum_{m \leqslant 0} \frac{BC(m)}{\prod(m)} z^m = \frac{z}{e_C(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_q(k(q-1))}{\xi^{k(q-1)}} z^{k(q-1)}$$

per tant, si agrupem pel grau, obtenim:

- $BC(m) = \prod(m) \frac{\zeta_q(m)}{\xi^m}$ per $m = k(q-1)$.
- $BC(m) = 0$ si $m \neq k(q-1)$.

Per tant, si per tot $k \in \mathbb{N}$ obtenim (pels valors parells):

$$\boxed{\zeta_q(k(q-1)) = \frac{BC(k(q-1))\xi^{k(q-1)}}{\prod(k(q-1))}} \tag{21}$$

Observació 8. :
Fixem-nos que $\zeta_q(k(q-1))$ és trascendent a K on, la trascendència de $\zeta_q(k(q-1))$ és per tenir el element $\xi^{k(q-1)}$ en la seva expressió (mirar equació (21)).

Als apèndixs sobre la funció ζ_q (apèndix D.2) es pot trobar algun resultat més general sobre aquesta funció i la seva extensió tant com algunes proves i resultats sobre convergència.

4.3 Teorema de Yu

El teorema de Yu és un dels resultats més importants de trascendència per $\zeta_q(z)$ evaluada sobre els enters.

Aquest resultat no té un anàleg per la funció ζ de Riemann (el cas de característica zero). Un cas famòs de la dificultat de determinar la trascendència dels valors $\zeta(2k-1)$ per $k \in \mathbb{N}$ és per $\zeta(3)$ (la constant d'Apéry), de la qual no sabem si és trascendent sobre $\mathbb{Q}$, només s'ha provat l'irracionalitat. Aquest resultat que enunciem requereix d'una teoria molt més general que els mòduls de Drinfield, els t-mòduls (per més informació veure [3, Goss], capítol 5).

Teorema 16. Yu:
Per $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

1. *$\zeta_q(k)$ és trascendent sobre K.*
2. *$\dfrac{\zeta_q(k)}{\xi^k} \in K^\times$ si k és parell.*
3. *$\dfrac{\zeta_q(k)}{\xi^k}$ és trascendent sobre K si k és senar.*

Demostració:
Per el cas 2 del teorema de Yu, la prova és la observació 8. La prova de 1 i 3 és l'article [12, Yu] pel qual, és necesari entendre t-mòduls i productes tensorials de t-mòduls per la demostració. Els t-móduls són una generalització dels móduls de Drinfeld (veure apèndix B). Els móduls de Drinfeld són el cas general dels móduls de Carlitz (on és un módul de Drinfeld de rang 1).

Detalls de trascendència

Els apèndixs estàn distribuits en tres blocs:

- El primer bloc contè una prova de la trascendència de e sobre $\mathbb{Q}$. Desprès conté una segona part sobr trascendència, ja mès centrada en els cossos de nombres (en extensions de $\mathbb{A}$), on podem trobar un conjunt de lemes tècnics de l'article [11, Wade], que són necesaris per les de mostracions del capítol 2 però que no són estrictament resultats per provar la trascendència.

- En el següent bloc he ficat dos conceptes interesants peró que s'allunyaven dels objectius del treball com són les fraccions continues a $\mathbb{A}$ i els móduls de Drinfeld (una petíta introducció). En el cas dels móduls de Drinfeld presentarem com són la generalització natural dels móduls de Carlitz i com pot relacionar-se les xarxes de zeros, les exponencials i els móduls de Drinfeld.

  També introduirem el concepte d'autómata i alguns resultats sobre com discernir si una seqüència és algebràica o no.

- L'ultim bloc és un recull de teoria prèvia sobre anàlisis no arquimedià, que hem utilitzat implicitament al llarg del treball, peró, no aporten directament als objectius del treball. També introuim alguns conceptes sobre móduls en anells i alguns resultats que són d'utilitat pel treball. És recomenable pensar aquest bloc com una petita introducció opcional (si el lector està familiaritzat amb el tema).

A Apèndix Detalls de trascendència

A.1 Trascendència I

La prova de que e és trascendent sobre $\mathbb{Q}$ és gràcies al matemàtic françès Charles Hermite. La demostració presentada en aquest treball està extreta del llibre [9, Spivak].

Teorema 17. Trascendència de e
El número real e és trascendent sobre $\mathbb{Q}$.

Demostració:
Siguin $k, n \in \mathbb{N}$ i $p \in \mathbb{P}$ (on la tria de p dependrà de n) definim els següents reals:

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left(\prod_{i=1}^n (x-i)\right)^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}\left(\prod_{i=1}^n (x-i)\right)^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

observem que M, M_k, depenen de la tria de p i de n. El següent real possitiu:

$$\epsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}\left(\prod_{i=1}^n (x-i)\right)^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

On per definició:

$$M_k + \epsilon_k = e^k M \tag{22}$$

Volem calcular més explícitament M. Denotem:

$$\left(\prod_{j=1}^n (x-i)\right)^p := \sum_{i=0}^{np} C_i x^i,$$

on $C_{np} = 1$ i $C_i \in \mathbb{Z}$ denota el coeficient del terme de grau i. Per tant podem escriure M com:

$$M = \sum_{i=0}^{np} \frac{1}{(p-1)!} C_i \underbrace{\int_0^\infty x^{p-1+i} e^{-x} dx}_{A} \tag{23}$$

Ara, integrant per parts iteradament, l'integral A dóna $(p-1-i)!$ d'on:

$$M = \sum_{i=0}^{np} \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!} C_i$$

Sigui p primer amb $p > n$ llavors no és divisible per p peró si $i > 0$ tenim:

$$\frac{(p-1+i)!}{(p-1)!} C_i = C_i (p+i-1) \cdot \ \cdots \ \cdot p$$

Per tant clarament $p \mid C_i \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!}$ per $i > 0$ peró $p \nmid C_0 = n!$, per tant $p \nmid M$.

Ara anem a desenvolupar M_k :

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1} \left(\prod_{i=1}^n (x-i)\right)^p e^{-x}}{(p-1)!} dx = \int_k^\infty \frac{x^{p-1} \left(\prod_{i=1}^n (x-i)\right)^p e^{k-x}}{(p-1)!} dx$$

$$= \int_k^\infty \frac{(u+k)^{p-1} \left(\prod_{i=1}^n (u+k-i)\right)^p e^{u}}{(p-1)!} du$$

On hem fet el canvi de variable $u = x - k$ i aconseguim que M_k sigui més similar a M. La gran diferència entre M_k i M és que el terme entre parèntesis conté factors u en comptes de k. D'on:

$$(u+k)^{p-1} \cdot \left(\prod_{i=1}^n (u+k-i) \right)^p$$

és un polinomi de coeficients enters, diguem-los-hi D_α, amb cadascun dels termes més grans o iguals que p. D'aqui:

$$M_k = \sum_{\alpha=1}^{np} \frac{D_\alpha}{(p-1)!} \int_0^\infty u^{p-1+\alpha} e^{-u} du = \sum_{\alpha=1}^{np} D_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}$$

i per tant, tots els sumants $D_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}$ són divisibles per p. Per tant $p \mid M_k$ per tot k amb $1 \leqslant k \leqslant n$. De l'igualtat (22):

$$\boxed{e^k = \frac{M_k + \epsilon_k}{M}}$$

Per tant si denotem per $q(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ amb $a_n \neq 0$ el polinomi del que e és una arrel, per l'expressió que hem trobat de les potències de e podem dir:

$$0 = \underbrace{a_0 M + \sum_{i=1}^n a_i M_i}_{(*)} + \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i$$

Ara que hem fixat n podem determinar $p \in \mathbb{P}$. Volem p que verifiqui $p > n$ i que $|a_0| < p$ (per garantir que $p \nmid a_0$). Per tant, $p \nmid (*)$ i per tant $(*) \neq 0$.
Ara veurem que l'altre troç és arbitràriament petit i per això el podem fer més pètit que $\frac{1}{2}$ i això ens donarà la contradicció perquè no hi ha cap enter que restant-li o afegint-li $\frac{1}{2}$ sigui 0.

$$|\epsilon_k| \leqslant e^k \int_0^k \left| \frac{x^{p-1} e{-x} \prod_{i=1}^n (x-i)}{(p-1)!} dx \right| \leqslant e^n \int_0^n \left| \frac{n^{p-1} e{-x} \prod_{i=1}^n (x-i)}{(p-1)!} dx \right|$$

On l'última desigualtat és perquè els ϵ_n són monotons creixents i x^{p-1} $x \in [0,n]$ té un màxim al extrem de l'intèrval. Ara:

$$\frac{e^n n^{p-1}\left(\max_{x\in[0,n]}(p(x))\right)^p}{(p-1)!}\int_0^n e^{-x}dx \leqslant \underbrace{\int_0^\infty e^{-x}dx}_{1}\frac{n^{p-1}e^n\left(\max_{x\in[0,n]}(p(x))\right)^p}{(p-1)!}$$

Però per $p\to\infty$ va a 0 per tant $|\epsilon_k|\leqslant\frac{1}{2k}$ (o qualsevol cosa que tendeixi tant ràpidament com volguem a 0) i per això $\sum_{i=1}^n|a_i\epsilon_i|\leqslant n\cdot max(a_i)|\epsilon_n|<\frac{1}{2}$ (si triem $|\epsilon_n|<\frac{1}{2n\cdot max(a_i)}$). L'única cosa a tenir en compte és la tria de p prou gran. Per tant tenim la contradicció. □

A.2 Trascendència II

En aquest apèndix expliquem un conjunt de lemes tècnics que serveixen per provar la trascendencia de ξ sobre $\mathbb{F}_q(T)$. Per tant, aquest apèndix sobre trascendència hi ha resultats tècnics que provenen de l'article [11, Wade] (pàg. 709-712).

Lema 13. **:** *Suposem que tenim la desigualtat:*

$$q^{k_0}+q^{k_1}+\ \cdots\ q^{k_r}\leqslant q^\beta+q^{\beta-1}+\ \cdots\ q^{\beta-r}\tag{24}$$

amb k_i enters i $\beta\in\mathbb{Z}$ on $k_0\geqslant k_1\geqslant\ \cdots\ \geqslant k_r$. Si $k_i\geqslant\beta-l$ llavors:

$$q^{k_0}+q^{k_1}+\ \cdots\ +q^{k_i}\leqslant q^\beta+q^{\beta-1}+\ \cdots\ +q^{\beta-l}$$

Demostració:
Escrivim:

$$q^{k_0}+q^{k_1}+\ \cdots\ +q^{k_i}=\delta_0q^{\beta-s_0}+\delta_1q^{\beta-s_1}+\ \cdots\ +\delta_jq^{\beta-s_j}$$

On $0<\delta_i\leqslant q-1$ i $0\leqslant s_0<s_1\ \cdots\ <s_j\leqslant l$. Ara tenim dos casos:
Si $s_v=v$ per $v\in\{0,\ \cdots\ j\}$ llavors $j\leqslant l$ ja que $s_j\leqslant l$ i $v=s_v<v+1\leqslant s_{v+1}<\ \cdots\ <j-1\leqslant s_{j-1}<j\leqslant s_j$. A més, els δ_i han de ser tots 1 perquè en cas contrari, si un fós més gran estricte que 1, llavors per

$$2q^k>q^k+q^{k-1}+\ \cdots\ +q^0$$

la desigualtat (24) és trenca. Contradient les hipòtesis.

En aquest cas el lema és inmediat, perquè $v+i\leqslant s_{v+i}$ per $i=1,\ \cdots\ ,j-v$, i per tant $q^{\beta-v-i}\geqslant q^{\beta-s_{v+i}}$, i per els s_k amb $k<v$ tenim que $k\leqslant s_k$ ja que $0\geqslant s_0$ i $s_k<s_{k+1}$ (són creixents) per tant:

$$\begin{aligned}\delta_0q^{\beta-s_0}+\delta_1q^{\beta-s_1}+\ \cdots\ +\delta_jq^{\beta-s_j}&=q^{\beta-s_0}+q^{\beta-s_1}+\ \cdots\ +q^{\beta-s_j}\\&=q^\beta+q^{\beta-1}+\ \cdots\ +q^{\beta-l}\end{aligned}$$

Per el altre cas, sigui s_v el primer dels s_j tal que $s_v>v$, per ser $s_v\leqslant l$, força que $v<l$ que és el mateix $v+1\leqslant l$. Llavors pel mateix argument que avanç els δ_i són sempre 1 per $i<v$ i per $i\geqslant v$ acotem $\delta_i\leqslant(q-1)$, obtenint:

$$\begin{aligned}q^{k_0}+q^{k_1}+\ \cdots\ +q^{k_i}&=\delta_0q^{\beta-s_0}+\delta_1q^{\beta-s_1}+\ \cdots\ +\delta_jq^{\beta-s_j}\\&\leqslant q^\beta+\ \cdots\ +q^{\beta-v+1}+(q-1)\left(q^{\beta-v-1}+\ \cdots\ +q^{\beta-l}\right)\\&=q^\beta+\ \cdots\ +q^{\beta-v+1}+q^{\beta-v}-q^{\beta-l}\\&<q^\beta+\ \cdots\ +q^{\beta-v+1}+q^{\beta-v}+\ \cdots\ +q^{\beta-l}\end{aligned}$$

i ja ho tenim provat. □

Lema 14. **:**
Si

$$D_{\beta,r}:=D_\beta\cdot D_{\beta-1}\ \cdots\ D_{\beta-r}$$

i els estaments del lema 13, escrivim les notacions:

$$K^{'} = \frac{D_{\beta,r}}{D_{k_0} \cdots D_{k_r}}$$

on $k_0 \geqslant \cdots \geqslant k_r$. *Llavors* $K^{'} \in \mathbb{F}_q[T]$, *és diu un polinomi.*

Demostració:
Considerem tots els cops que apareix $[j]$ *en* $K^{'}$ *per tot* j, *llavors si* $j \leqslant \beta - r$, $k_i \geqslant j$ *i* $k_{i+1} < j$, *obtenim operant que:*

$$\begin{aligned}\epsilon(j,\ K^{'}) &= q^{\beta-j} + \cdots + q^{\beta-r-j} - \left(q^{k_0-j} + \cdots + q^{k_i-j}\right)\\ &\geqslant q^{\beta-j} + \cdots + q^{\beta-r-j} - \left(q^{k_0-j} + \cdots + q^{k_r-j}\right) \geqslant 0\end{aligned}$$

El que ens permet garantir que és més gran o igual que zero és l'equació 24 que és dóna per hipòtesis. Ara, si $j = \beta - l$ *per* $l < r$,

$$\epsilon(j,\ K^{'}) = q^{\beta-j} + \cdots + q^{\beta-l-j} - \left(q^{k_0-j} + \cdots + q^{k_i-j}\right)$$

Que torna a ser més gran o igual que zero perquè $k_i \geqslant \beta - l$ *i* $k_{i+1} < \beta - l$, *pel lema 13 la diferència és possitiva o zero. Per tant, com que tots els termes que formen* $K^{'}$ *són de grau possitiu o zero fan que el grau sigui possitiu o zero i per tant que* $K^{'} \in \mathbb{F}_q[T]$. □

Lema 15. :
Si la desigualtat (15) es verifica i $k_i \geqslant \beta - l$ *(on* $l < d$*) llavors;*

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} \leqslant q^{\beta} - q^{\beta-l}$$

Demostració:
Novament escrivim $q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} = \delta_0 q^{\beta-s_0} + \cdots + \delta_j q^{\beta-s_j}$, *i com que* $s_j \leqslant l$ *i per 10 tenim* $s_0 \geqslant 1$. □

Lema 16. :
Si es dóna la desisgualtat 15, llavors $K^{'}$ *(del lema (14)) és divisible per*

$$M := \frac{K_\beta}{D_{\beta-1}^{q-1} \cdots D_{\beta-d}^{q-1}}$$

on d *és la del lema 10.*

Demostració:
Hem de veure que

$$M^{'} := \frac{K^{'}}{M} \in \mathbb{F}_q[T]$$

Considerem quans cops surt $[j]$ *en* $M^{'}$ *i veurem que tots tenen* $\epsilon(j,\ M^{'}) \geqslant 0$ *forçant que* $M^{'}$ *sigui enter.*
Sigui $j \leqslant \beta - d$, *llavors:*

$$\epsilon(j,\ M^{'}) \leqslant (q-1)\left(q^{\beta-1-j} + \cdots + q^{\beta-d-j}\right) - \left(q^{k_0-j} + \cdots + q^{k_r-j}\right) \qquad \leqslant 0$$

pel lema 10. Ara, si $j = \beta - l$ *on recalquem que* $l < d$, *llavors:*

$$\epsilon(j,\ M^{'}) \leqslant (q-1)\left(q^{\beta-1-j} + \cdots + q^{\beta-l-j}\right) - \left(q^{k_0-j} + \cdots + q^{k_i-j}\right)$$

on $k_i \geqslant \beta - l$ *i* $k_{i+1} < \beta - l$. *Això novament és més gran o igual que zero pel lema 15.* □

Lema 17. :
Si $\alpha_0, \cdots, \alpha_r$ *són arrels de l'equació:*

$$\sum_{j=0}^{r+1} C_{r+1-j} t^j \tag{25}$$

on els $C_{r+1-j} \in \mathbb{F}_q[T]$ *i* $C_0 = 1$ *i* $C_{r+1} \neq 0$. *Si* $c = \max\left(\deg_T(C_1), \cdots, \deg_T(C_{r+1})\right)$, *llavors la suma simètrica*

$$\sum \alpha_0^{q^{k_0}} \cdots \alpha_r^{q^{k_r}}$$

on $k_0 \geqslant \cdots \geqslant k_r$ *fixat, és un polinomi a* $\mathbb{F}_q[T]$ *i el seu grau està acotat superiorment per* cq^{k_0}.

Lema 18. :
Si $q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} = q^{\beta}$ amb $k_0 \geqslant \cdots \geqslant k_r$, llavors existeix i on $k_i \geqslant \beta - d$ on d és la del Lema 10.

Demostració:
Suposem que $k_i < \beta - d$. Com que:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} < q^{\beta}$$

ja que sinò $q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} > q^{\beta}$ cosa que contradiuria una de les hipòtesi, i pel lema 15 obtenim:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} \leqslant q^{\beta} - q^{\beta-d}$$

cosa que porta a contradicció ja que, llavors:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} + q^{\beta-d} \leqslant q^{\beta}$$

cosa que no pot ser perquè per ser $k_i < \beta - d$ llavors $q^{k_i} < q^{\beta-d}$ i per tant $q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} + q^{\beta-d} > q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} = q^{\beta}$
□

Lema 19. :
Si E és polinomi irreductible de grau e en $\mathbb{F}_q[T]$, llavors E divideix $[l]$ si i només si e divideix l. A més $E \nmid [l]$ ($E^2 \nmid [l]$).

Demostració:
Aquest resultat surt de

Lema 20. :
Si $q^{k_0} + \cdots + q^{k_j} \leqslant q^{\beta} + \cdots + q^{\beta-r}$ per $j < r$, llavors:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_j} \leqslant q^{\beta} + \cdots + q^{\beta-j}$$

Demostració:
Escribim $q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} = \delta_0 q^{\beta-s_0} + \cdots + \delta_j q^{\beta-s_i}$ per $\delta_i \in \{1, \cdots, q-1\}$ on $0 \leqslant s_0 < \cdots < s_i$. Ara com que $i \leqslant j$ i el RHS de l'equació anterior té el seu màxim per $\delta_0 = \cdots = \delta_i = 1$, i $s_h = h$ per $h = 0, \cdots, i$ i $j = i$. D'on surt el resultat. □

Lema 21. :
Si $q^{\beta} < q^{k_0} + \cdots + q^{k_r} \leqslant q^{\beta} + \cdots + q^{\beta-r}$ on $k_0 \geqslant \cdots \geqslant k_r$, llavors existeix un i tal que:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} = q^{\beta}$$

Demostració:
Com que $k_0 \leqslant \beta$, i com que aquest lema és inmediat pel cas $k_0 = \beta$, llavors existeix una i tal que:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} < q^{\beta} \leqslant q^{k_0} + \cdots + q^{k_i}$$

per tant existeix $\Omega > 0$ tal que:

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_{i-1}} = q^{\beta} - \Omega \tag{26}$$

Ara, com que $q^{k_{i-1}}$ divideix als q^{k_j} per $j \leqslant i-1$ (perquè els k_j són decreixents i $q^{k_j} \geqslant q^{k_{i-1}}$) força que $q^{k_{i-1}} \mid \Omega$. Pel mateix raonament, com que $q^{k_{i-1}} \mid \Omega$ implica que $q^{k_i} \mid \Omega$
A més,

$$q^{k_0} + \cdots + q^{k_i} = q^{\beta} + B \tag{27}$$

per $B \geqslant 0$. Ara si restem les equacions 26 i 27 llavors obtenim:

$$q^{k_i} = \Omega + B$$

On per $q^{k_i} \mid \Omega$ força que $\Omega = q^{k_i}$ i $B = 0$ i prova el resultat. □

A.3 Fraccions Continues

Un objecte molt interesant de l'aritmètica són les fraccions continues. Aquests objectes permeten donar aproximacions prou bones per racionals dels nombres trascendents i no tant bones per els irracionals algebràics (com per exemple el nombre ϕ). En aquest apèndix introduirem el seu anàleg en cossos de nombres i alguns resultats anàlegs. A diferència de gran part d'aquest treball, aqui els resultats clàssics, tot i tenir resultats anàlegs, la teoria sobre cossos de funcions no està completament coneguda a diferència amb el cas clàssic. Aquest tema es tracta en profunditat al llibre [10, Thakur] durant el capítol 9 (aproximacions diofàntiques).

El problema clàssic, és intentar aproximar nombres algebraics irracionals de forma bona. Implicitament estem aprofitant que $\mathbb{Q}$ és dens en $\mathbb{R}$. Per tant per nosaltres una bona aproximació serà aquella que estigui aprop i no augmenti molt la complexitat del denominador.
Pel cas de cossos de funcions el paper anàleg dels irracionals algebràics el faràn les sèries de Laurent i aproximarem per uncions. Aquesta àrea d'estudi comença amb la tesis de Emil Artin.

Notació 6. :
En aquest apèndix farem un petit abús de notació denotant el numerador i denominador d'un nombre racional per p i q respectivament on $(p,q)=1$. No confondre-ho amb la notació del treball on p denota un enter primer i q una potència d'un primer.

Teorema 18. Lagrange-Dirichlet:
Donat $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ irracional, existeixen infinites aproximacions $\frac{p}{q}$ que satisfàn $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{|q|^2}$

Demostració:

Teorema 19. Khintchine:
Si $\psi(q)$ és una funció possitiva decreixent de q i si $\sum_{q\in I}\psi(q)<\infty$ (on $I\cong\mathbb{N}$ conjunt d'indexos), llavors la desigualtat $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{\psi(q)}{q}$ té unn nombre finit de solucions per quasi tot α (irracional real). Si la suma $\sum_{q\in I}\psi(q)=\infty$, llavors hi ha infinites solucions per quasi tot α.

Demostració:
Al llibre [10, Thakur] al capítol 9, teorema 9.1.2.

Notació 7. :
Denotem $d(\alpha)$ com el grau algebràic de α on $\alpha\in\mathbb{R}$ irracional algebràic.

Teorema 20. Liouville:
Per α algebràic, $d:=d(\alpha)$ i $C(\alpha)$ una constant possitiva que depent de α, tenim:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{C(\alpha)}{|q|^d} \tag{28}$$

Demostració:
Pel cas clàssic , sigui f el polinomi mínim de α ($f\in\mathbb{Q}[X]$), llavors, per $\frac{p}{q}$ proper peró no igual a α obtenim:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\frac{\left|f(\alpha)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(\beta)|}>C(\alpha)\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geqslant\frac{C(\alpha)}{|q|^d}$$

On $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\dfrac{\left|f(\alpha)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(\beta)|}$ és pel teorema del valor mig. Per $\dfrac{\left|f(\alpha)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(\beta)|}>C(\alpha)\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$ utilitzem que $f(\alpha)=0$ i per ser $\mathcal{C}^1$ (en particular ja que els polinomis són $\mathcal{C}^\infty$) i per ser $\beta\in\left(\frac{p}{q},\ \alpha\right)$, podem triar un mínim de $|f'(\beta)|$ en el compacte $\left[\frac{p}{q},\ \alpha\right]$ que denotem per $C(\alpha)$. Per $C(\alpha)\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geqslant\dfrac{C(\alpha)}{|q|^d}$ surt d'operar:

$$C(\alpha)\left|\sum_{i=0}^{d}a_i\frac{p^i}{q^i}\right|\geqslant C(\alpha)\left|\frac{a_0q^d+a_1pq^{d-1}+\ \cdots\ +a_{d-1}qp^{d-1}+a_dp^d}{q^d}\right|\geqslant C(\alpha)\left|\frac{1}{q^d}\right|$$

Pel cas de cossos de funcions consultar la referència [$Mah49$] del llibre [10, Thakur]. □

Definició 23. :
Sigui F cos per un α irracional algebràic de $\mathbb{R}$ (anàlogament per cossos de funcions α un element de $F((\frac{1}{T}))$ algebràic irracional sobre $F(T)$), definim l'aproximació exponent diofàntica $E(\alpha)$ per:

$$E(\alpha) = \limsup_{|Q|} \frac{-\,log\left(\left|\alpha - \dfrac{P}{Q}\right|\right)}{log\,(|Q|)}$$

on P, Q es mouen pels enters (per cosos de funcions són polinomis de $F[T]$ i el valor absolut és el usual on prenem $|Q|$ creixent).

Un resultat directe dels teoremes de Dirichlet i Lioville, és la acotació $2 \leqslant E(\alpha) \leqslant d(\alpha)$. On $2 \leqslant E(\alpha)$ és conseqüència de $\mu \geqslant 2$ (notacions del teorema de Dirichlet-Lioville). Per l'altre és fer $|Q| \to \infty$ i aplicar la cota del teorema de Lagrange-Dirichlet (teorema 18), ja que:

$$E(\alpha) \leqslant \limsup_{|Q|\to\infty} \frac{-\,log\left(\left|\frac{C(\alpha)}{|Q|^{d(\alpha)}}\right|\right)}{log\,(|Q|)} = \limsup_{|Q|\to\infty} \frac{d(\alpha) log\,(|Q|) - log\,(|C(\alpha)|)}{log\,(|Q|)} = d(\alpha)$$

Un resultat interesqant que permet caracteritzar si un nombre és algebràic sobre els nombres reals és el teorema de Roth (i de forma anàloga sobre cossos de funcions el teorema de Uchiyama) afirma que per tot α algebràic, $E(\alpha) = 2$. Mahler va observar que per $q = p^n$ (on p primer) i p la característica de F, llavors $E(\alpha) = d(\alpha) = q$ per $\sum_{i=0}^{\infty} T^{-q^i}$.

A.3.1 Fraccions Continues: bones aproximacions

Notació 8. :
Denotarem una fracció continua per $a_i \in \mathbb{Z}$ (de forma anàloga per cossos de funcions $a_i \in \mathbb{F}_q[T]$) com:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} := [a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

Denotem les convergents d'un nombre α per $c_n := \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ on els a_i són els quocients parcials o complets (si el nombre és racional existirà un cert $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_N = \alpha$). Un petit detall pel cas de cossos de funcions és que els q_i's són polinomis no constants de grau creixent a mesura que i creix (no necesariament mónics).

Notació 9. :
Denotarem $\alpha_n := [a_n, a_{n+1}, \cdots]$ on per construcció $\alpha = \alpha_0$.

Observació 9. :
Si denotem $p_0 = a_0$ i $q_0 = 1$, llavors:

$$p_1 = a_1 a_0 + 1$$
$$q_1 = a_1$$

i per $n > 1$:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Per tant, si fem $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, per l'identitat de Bezout, $(p_n,\ q_n) = 1$.

Pels cosos de funcions observem que tenim per $f \in F[T]$ no constant, llavors $f[a_0, a_1, \cdots,] = [fa_0, f^{-1}a_1, fa_2, f^{-1}a_3, \cdots]$.

Com que $\alpha = \dfrac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$ llavors $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{\left(\alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) q_n^2} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$. On $q_{n-1} q_n = [0,\ a_n,\ a_{n-1},\ \cdots, a_1]$.

Com que tenim $\frac{1}{(a_{n+1}+2) q_n^2} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < c \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$ en el cas clàssic i $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{|a_{n+1}||q_n|^2}$ en el cas de cossos de funcions, podem afirmar els següent:

Si $\alpha_{n+1} = 1$ i α_{n+2} és molt gran, el error de la convergent és molt proper a $\frac{1}{|q|^2}$ (cas clàssic). Per cossos de funcions no és pitjor que $\frac{1}{|T|\cdot|q|^2}$.

Una conjectura no resolta en aquest camp, és la conjectura de Lehmers. Per poder presentar-la, cal introduïr la mesura de Mahler.

Definició 24. Mesura de Mahler:
Sigui $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomi de la forma $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ on θ_i denota les arrels i $a_n \neq 0$. Aleshores definim la mesura de Mahler del polinomi P com:

$$M(P) := |a_n| \prod_{i=1}^{n} \max(|\theta_i|, 1)$$

Conjectura 2. de Lehmers:
Si $\alpha > 1$ tal que la mesura de Mahler del polinomi P és $M(P) > 1$, llavors $M(P) > \alpha$.

Un cas trivial de la conjectura és per $|\bullet|$ el valor absolut de k_∞ (per més informació sobre valors absoluts consultar l'apèndix C.1). Si $M(P) < q$ llavors $|a_n| = 1$ i els coeficients del polinomi són funcions simètriques de les arrels, on per la desigualtat ultramètrica $|a_i| \leqslant M(P) < q$ implicant que $a_i \in \mathbb{F}_q$ cosa que força a les arrels a viure dins de $\bar{\mathbb{F}}_q$ i són arrels de l'unitat.

Paral·lelament al cas clàssic de Krummer, si $M(P) = 1$ llavors les arrels de P són arrels de l'unitat. Pel cas de la desigualtat triangular normal, els coeficients de a_i tenen la següent acotació:

$$a_i = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant n} \theta_{j_1} \cdot \cdots \cdot \theta_{j_i} \leqslant \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant n} |\theta_{j_1} \cdot \cdots \cdot \theta_{j_i}| \leqslant \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant n} M(P) = \binom{n}{i} M(P)$$

Observem que pel cas de la desigualtat ultramètrica, en el pas $|a_i| \leqslant \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant n} |\theta_{j_1} \cdot \cdots \cdot \theta_{j_i}| \leqslant |\theta_{j_1} \cdots \theta_{j_i}| \leqslant M(P)$.

Definició 25. Convergent intermitja:

$$c_{n,r} := \frac{r p_{n-1} + p_{n-2}}{r q_{n-1} + q_{n-2}}$$

on $r \in \{1, 2, \cdots, a_n - 1\}$ pel cas clàssic i pel cas de cossos de funcions r és un polinomi de $F[T]$ on $0 \leqslant deg(r) \leqslant deg(a_n) - 1$ per $0 \neq r \neq a_n$. En aquest segon cas, no hi ha ordre en la tria de les convergents i per tant, no podem dir que triem la convergent intermitja entre dues convergents.

Un altre resultat directe sobre fraccions continues en cossos de nombres és la següent:
Sigui α de la forma següent:

$$\alpha = \left[A_1, \cdots, A_k, A_1^q, \cdots, A_k^q, A_1^{q^2}, \cdots, A_k^{q^2}, \cdots\right] \tag{29}$$

per $A_i \in F[T]$ polinomis no constants, és un nombre algebràic sobre $F(T)$ perque satisfà l'equació:

$$\alpha = [A_1, \cdots, A_k, \alpha^q]$$

Definició 26. :
Introduïm diverses definicions que ens permeten "definir", com de bona és una aproximació per fraccions continues.

- *Bona en un sentit feble: Si $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant |\alpha - \frac{p'}{q'}|$ per $|q'| \leqslant |q|$ si $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$.*
- *Justa: Direm que $\frac{p}{q}$ ho és si $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant |\alpha - \frac{p'}{q'}|$*
- *Millor (respectivament bona): Si $\{q\alpha\} := |q\alpha - p|$, tenim $\{q\alpha\} < \{q'\alpha\}$ per $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$ on $0 < |q'| \leqslant |q|$.*

A primera vista s'observa que, aquestes definicions estàn molt relacionades. Una resposta a això és el teorema 22.

Teorema 21. **:**

1. *Sigui* d_i *el grau del polinomi* $A_i \in \mathbb{F}_q[T]$ *i denotem* $r_i := \dfrac{d_i}{q(d_1 + \cdots + d_{i-1}) + d_i + \cdots + d_k}$, *llavors per* α *de la forma de l'equació (29) obtenim:*

$$E(\alpha) = 2 + (q-1) \cdot \max(r_1, r_2, \cdots, r_k)$$

2. *Donat qualsevol racional* μ *entre* $q^{\frac{1}{k}} + 1$ *(que tendeix a 2 si* $k \to \infty$*) i* $q+1$*, podem trobar una familia de* α*'s com els de l'equació (29) amb* $E(\alpha) = \mu$ *i* $d(\alpha) \leqslant q+1$.

Demostració:
Ficarem una idea de la demostració. Hem vist que les convergents d'una fracció continua donen la millor aproximació. A la definició de $E(\alpha)$ *(definició 23) utilitzem* $\frac{P}{Q}$ *donats per les trucacions de les fraccions continues. Per l'equació* $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{|a_{n+1}||q_n|^2}$ *(vista previament),* $E(\alpha) = 2 + \limsup\left(\dfrac{deg(a_{n+1})}{deg(q_n)}\right)$ *(per la fórmula recursiva de* q_n*). Com el grau de* q_n *és suma dels graus dels* $a_1, \cdots, a_n$ *i per l'equacio (29) el grau de* $a_n = d_{j+1}q^{\frac{n-j}{k}}$ *(on* j *és el míim residu no negatiu de* $n_{mod\ k}$*). Per un càlcul directe surt el resultat* (1)*. La segona es pot consultar a la referència del llibre [10, Thakur] com* [$Tha99b$].

Teorema 22. **:**
En el cas de cossos de funcions tenim:

1. *Les propietats de ser millor, bona, bona en el sentit febles, convergent i aproximació* $\frac{p}{q}$ *amb error mès petit que* $\frac{1}{|t|\cdot|q|^2}$ *són equivalents.*

2. *L'aproximació* $\frac{p}{q}$ *és justa peró no bona si i nomès si és una convergent intermitja* $c_{n+1,r}$ *amb* $|a_{n+1} - r| < |a_{n+1}|$ *(en particular* $|r| = |a_{n+1}|$*)*

3. *Tenim que* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{|q|^2}$ *sí i només si existeix* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $c_{n,r}$ *és convergent intermitja amb* $r \in F^\times$.

Demostració:
La demostració és pot consultar al llibre [10, Thakur] al capítol 9 *com el teorema* 9.2.3.

Lema 22. **Voloch:**
Si $\frac{a_n}{b_n} \to \alpha$ *on* $(a_n,\ b_n) = c \in F[T]$ *(on* $a_n, b_n \in F[T]$ *són polinomis coprimers llevat d'una constant multiplicativa) i satisfàn les següents condicions:*

1. $\limsup \dfrac{\deg(b_{n+1})}{\deg(b_n)} = b$

2. $\dfrac{log\left(\left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right|\right)}{log\left(|b_n|\right)} \to a$

3. $a > b^{\frac{1}{2}} + 1$

llavors $E(\alpha) = a$ *(definit a la definició 23).*

Demostració:
La prova està en la cita [$Vol88$] *del llibre [10, Thakur].*

Teorema 23. **Voloch:** *Per* α *que verifiqui les condicions del teorema 21,* $E(R(\alpha)) = \dfrac{E(\alpha)}{\deg(R)}$*, si* $R \in k(X)$ *té derivada no nul·la i* $E(\alpha) > d \cdot \left(q^{\frac{1}{2}+1}\right)$.

Demostració:
Utilitzant el lema 22 amb el teorema del valor mitjà aplicat sobre les aproximacions $R(r_n)$ *cap a* $R(\alpha)$ *on les* r_n *són aproximacions obtingudes de les truncacions de les fraccions continues de* α*, que aproximen el exponent, per tant* $b = q$.

B Apèndix Móduls de Drinfeld: Petita introducció

Com hem mencionat en la secció 1 el módul de Carlitz és un cas particular de móduls de Drinfeld (en particular el cas mès sencill que és un módul de rang 1).

Els móduls de Drinfeld per rang 1 reflecteixen certes analogies amb la multiplicació complexa (pensada com a grup) i extensions ciclotómiques.
Per rang 2, els anàlegs al cas çlàssic"pasa a ser la teoria de corbes elíptiques. Per desgràcia, per a rangs mès grans que 2 no tenim un candidat clàssic pel que proseguir amb les analogies. Per aquest motiu, l'estructura d'aquest apèndix constarà d'una primera part amb definicions bàsiques sobre que són i com es construeixen els móduls de Drinfeld (principalment els capítols 2 i 3 del llibre [10, Thakur] i el capítol 4 del llibre [3, Goss]) que formen part de la primera meitat del capítol 10 del llibre [10, Thakur]. La segona part involucra novament teoria de t-móduls que no tractarem en aquest treball (per un lector interesat mirar la segona meitat del capitol 10 avanç mencionat, i l'article del teorema de Yu [12, Yu-Article]). Per tancar el apèndix donarem alguns resultats de trascendència dels móduls de rang 2.

Definició 27. Módul de Drinfeld:
Sigui F un A-cos (cos sobre A) i $\iota : A \longrightarrow F$ de característica $\mathcal{P}$. Llavors definim el A-módul de Drinfeld sobre F de característica $\mathcal{P}$ com el homeomorfisme $\rho : A \longrightarrow F\{\tau\}$ que verifica $D \circ \rho = \iota$ (on D denota el operador derivada).

Notació 10. :
Denotem ι_a la imatge de $a \in A$ a traves del homeomorfisme ρ.

B.0.1 Conceptes Generals dels Móduls de Drinfeld

Notació 11. :
En aquest apèndi denotarem per M una extensió completa de $K \subset \mathbb{C}_\infty$.

Definició 28. M-Xarxa:
Un A-submodul $L \subset \mathbb{C}_\infty$ (amb la multiplicació usual de A) és una M-xarxa (o xarxa o A-xarxa si M no s'especifica) si i només si:

1. *L és finitament generat com A-módul*
2. *L és discret sota la topologia usual de $\mathbb{C}_\infty$.*
3. *Sigui $M^{sep} \subset \mathbb{C}_\infty$ la clausura separable de M, llavors cal que $L \subset M^{sep}$ i L estable sota $Gal(M^{sep}/M)$*

El rang de L és el rang com a $\mathbb{C}_\infty$-submódul lliure de torsió.

Exemple 4. Xarxa:
Per $\mathbb{F}_q[T]$ i ξ és té que $L = \xi\mathbb{F}_q[T]$ és una K-xarxa.

A continuació, i de forma similar al módul de Carlitz, volem assosiar una xarxa amb una exponencial, per tant definirem una sèrie que serà la nostre candidata a exponencial donat una xarxa L.

Definició 29. Exponencial assosiada a una xarxa:
Sigui L una xarxa (com la de la definició 28) definim la sèrie:

$$e_L(X) = X \prod_{\alpha \in L, \alpha \neq 0} \left(1 - \frac{X}{\alpha}\right)$$

De forma anàloga a l'exponencial de Carlitz, convergeix per $\forall x \in \mathbb{C}_\infty$, per tant és una funció entera (per veure la prova mirar el llibre [3, Goss], capítol 4, la proposició 4.2.4).

Proposició 6. :
La funció $e_L(X)$ és F_q-lineal.

Demostració:
Descomposem L com l'unió següent, $L = \cup L_i$ on L_i és un F_q-espai vectorial de dimensió finita. Com que $e_L(X) = \lim_{i\to\infty} e_{L_i}(X)$ on $e_{L_i}(X) = X \prod_{\alpha \in L_i \setminus \{0\}}$. El polinomi $e_{L_i}(X)$ és F_q-lineal i pel col·lolari 8 el resultat surt directe.

Corol·lari 4. :
Les funcions $e_L(X)$ pujen a un isomorfisme de grups abelians

$$\mathbb{C}_\infty/L \simeq^{e_L(X)} \mathbb{C}_\infty$$

Demostació:
El nucli d'una aplicació F_q-lineal $e_L(X)$ és nomès L. L'exhaustivitat la tenim perque una funció entera no constant sobre $\mathbb{C}_\infty$ és sempre exhaustiva. Veure que és isomorfisme ara és trivial. □

Ara asosociem un módul de Drinfeld a una xarxa. En aquest apèndix denotarem $d := \ rang_A(L)$.

Teorema 24. :
Tenim la següent equació entre funcions enteres:

$$e_L(aX) = ae_L(X) \prod_{0 \neq \alpha \in \alpha^{-1}L/L} \left(1 - \frac{e_L(X)}{e_L(\alpha)}\right) \tag{30}$$

Demostració:
Denotem per $P(X) = \prod_{0 \neq \alpha \in \alpha^{-1}L/L} \left(1 - \frac{e_L(X)}{e_L(\alpha)}\right)$.
Com que $e_L(X)$ és $\mathbb{F}_q$-lineal, $\{e_L\left(\alpha^{-1}L/L\right)\}$ és un $\mathbb{F}_q$-espai vectorial finit, com que $P(X)$ és un F_q-polinomi lineal. Per tant $P'(X) \equiv 1$. Ara, les funcions enteres $e_L(\alpha X)$ i $aP(e_L(X))$ tenen el mateix divisor. Per tant tenen la mateixa derivada, i per el teorema 28 obtenim l'igualtat. □

Notació 12. : *Denotarem per ϕ_a^L si volem remarcar la xarxa L o si queda clara pel context, només denotarem ϕ_a al polinomi $\prod_{0 \neq \alpha \in a^{-1}L/L} \left(1 - \frac{e_L(X)}{e_L(\alpha)}\right)$*

Pel teorema 24 $\phi_a \in M\{\tau\}$ (mirar la definició 3). Per ser A domini de Dedekind (definició 52) i L un módul lliure de torsió finitament generat (mirar apèndix D.1 la definició 60), per la referència $[CuR1]$ de les referències del llibre [3, Goss], tenim el isomorfisme de A-mòduls següent:

$$L \simeq A^{d-1} \oplus I$$

on I és un ideal no nul de A. Per tant:

$$a^{-1}L/L \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} A/(a)$$

en particular obtenim $q^{d \cdot \ deg(a)}$ elements, per tant $deg(\phi_a(\tau)) = d \cdot \ deg(a)$.

Proposició 7. :
L'aplicació $a \in A \longmapsto \phi_a \in M\{\tau\}$ té les següents tres propietats:

1. *És $\mathbb{F}_q$-lineal.*
2. *Si $a \in \mathbb{F}_q \subset A$ llavors $\phi_a = a\tau^0$.*
3. *$\phi_{ab}(\tau) = \phi_a(\tau)\phi_b(\tau) = \phi_b(\tau)\phi_a(\tau) = \phi_{ba}(\tau)$.*

Demostració:
La prova està en el llibre [3, Goss] al capítol 4, proposició 4.3.2.

Definició 30. Módul de Drinfeld associat a una xarxa:
La injecció $A \longrightarrow M\{\tau\}$ definida per $a \longmapsto \phi_a$ assosiada a L és el módul de Drinfeld associat a L. El seu rang és d.

Definició 31. :
Siguin L_1 i L_2 dos A-xarxes amb el mateix rang. Definim un morphisme de L_1 a L_2 com un element $c \in \mathbb{C}_\infty$ amb $cL_1 \subset L_2$.
En cas que els rangs de les dues xares siguin diferents, llavors el únic morphisme permès és $0 \in \mathbb{C}_\infty$.
Si a més, L_1 i L_2 són M-xarxes per algun cos complet $K \subset M \subset \mathbb{C}_\infty$, llavors un M-morfisme és un morfisme de L_1 a L_2 donat per algún $c \in M \subset \mathbb{C}_\infty$.

Proposició 8. :
Siguin ϕ i ψ dos móduls de Drinfeld assosciats amb les xarxes L_1 i L_2 respectivament (on tenen el mateix rang). Sigui $c \in \mathbb{C}_\infty$ un morfisme de L_1 a L_2, Llavors vis els isomorfismes $e_{L_1} : \mathbb{C}_\infty/L_1 \longleftarrow \mathbb{C}_\infty$, $e_{L_2} : \mathbb{C}_\infty/L_2 \longleftarrow \mathbb{C}_\infty$, el element c correspon al polinomi $P(\tau) := P_c(\tau) \in \mathbb{C}_\infty(\tau)$ amb la propietat:

$$P\phi_a = \psi_a P$$

per tot $a \in A$.

Demostració:
La demostració al llibre [3, Goss] a la pàgina 68, com a proposició 4.3.5.

El següent diagrama mostra que per una xarxa assosiada a ϕ un módul de Drinfeld, el diagrama conmuta (l'acció sobre $a \in A$ via ϕ_a descomposa en el diagrama a través de l'exponencial assosiada a L).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}/L \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_L"'] & \mathbb{C}/L \arrow[d, "e_L"] \\
\mathbb{C}_\infty \arrow[r, "\phi_a"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Aquesta idea la podem pensar també pel cas que tinguem dos xarxes L_1 i L_2 i ϕ i ψ els móduls de Drinfeld assosciats a cada xarxa respectivament, on $c \in \mathbb{C}_\infty$ és un morfisme de L_1 en L_2, llavors obtenim la següent descompossició:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}/L_1 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "e_{L_1}"'] & \mathbb{C}/L_2 \arrow[d, "e_{L_2}"] \\
\mathbb{C}_\infty \arrow[r, "P_c"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Observació 10. :
Sigui L la xara assossiada a ϕ com la del primer diagrama, si afeguim l'hipòtesis de que L és una M-xarxa per algún subcos $M \subset \mathbb{C}_\infty$ i existeix $M_1 \subset M^{sep}$ una extensió finita de M que conté la xarxa L, llavors M_1 conté tots els punts de torsió (definició de punts de torsió a la definició 60) de ϕ. Observem que els punts de torsió estàn caracteritzats també per $\{e_L(b\alpha) \ : \ b \in k \text{ i } \alpha \in L\}$. A més tenim $\phi_a \in M\{\tau\}$.

En aquest punt introduirè una mica del raonament per generalitzar els móduls de Drinfeld per cossos arbitraris de forma analítica a traves d'una xarxa (de forma similar al cas del módul de Carlitz (secció 1)).

Definició 32. :
Sigui $\mathcal{F}$ un A-cos dotat d'un morfisme $\iota : A \longrightarrow \mathcal{F}$. Si $\mathcal{P}$ és el ídeal primer generat per $Ker(\iota)$, direm que $\mathcal{P}$ és la característica de $\mathcal{F}$. Direm que $\mathcal{F}$ té característica genèrica si i només si $Ker(\iota) = (0)$. En cas contrari diem que $\mathcal{P}$ és finit i que $\mathcal{F}$ té característica finita.

Recordem que de forma anàloga pel cas $A = \mathbb{F}_q[T]$, $Df := a_0 = f'(\tau)$ per $f \in \mathcal{F}$
$lbrace\tau\}$ (on D és el operador derivada). L'aplicació de $\mathcal{F}\{\tau\} \longrightarrow \mathcal{F}$ donada per $f \longmapsto Df$ és morfisme de $\mathbb{F}_q$-àlgebras.

Pasem a definir de forma general un módul de Drinfeld (que, obiament casarà amb la definició de módul de Drinfeld (definició 27)) donada anteriorment.

Definició 33. Módul de Drinfeld sobre A-cosos en general:
Sigui $\phi : A \longrightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$ un homeomorfisme de $\mathbb{F}_q$-àlgebras, direm que ϕ és módul de Drinfeld si i només sí es verifiquen les següents condicions:

1. $D \circ \phi = \iota$.

2. $\exists a \in A$ tal que $\phi_a \neq \iota(a)\tau^0$.

Definició 34. :
A través de ϕ qualsevol extensió $\mathcal{L}/\mathcal{F}$ és un A-mòdul. Denotarem aquest mòdul per $\phi(\mathcal{L})$.

Definició 35. Morfismes i isogenies:
Siguin ϕ i ψ dos mòduls de Drinfeld sobre $\mathcal{F}$ un A-cos. Un morfisme de ϕ cap a ψ és el polinomi $P(\tau) \in \mathcal{F}\{\tau\}$ que verifica:

$$P \circ \phi_a = \psi_a \circ P$$

per tot $a \in A$. Els morfismes no nuls reven el nom de isogenies.

Notació 13. :
Sigui ϕ un mòdul de Drinfeld sobre $\mathcal{F}$ i sigui $I \subset A$ un ideal. Per ser A domini de Dedekind, sabem que I estarà com a molt generat per dos elements $\{i_1,\ i_2\} \subset I$, com que $\mathcal{F}\{\tau\}$ té divisió per la dreta (mirar divisió per la dreta dins de la definició 3), llavors existeix el mcd per la dreta a $\mathcal{F}\{\tau\}$. Aquest és el generador mònic del ideal per l'esquerra de $\mathcal{F}\{\tau\}$ generat per ϕ_{i_1} i ϕ_{i_2}.

Definició 36. :
Sigui ϕ_I un generador mònic del ideal per l'esquerra de $\mathcal{F}$ generat per ϕ_{i_1} i ϕ_{i_2}

Definició 37. :
Sigui $\bar{\mathcal{F}}$ una claussura algebràica de $\mathcal{F}$ fixada, definim $\phi[I] \subset \phi(\bar{\mathcal{F}})$ com el grup finit donat per les arrels de ϕ_I. Si $a \in A$, llavors denotem $\phi[a] \ := \ \phi[(a)]$.

B.1 Automatas

En aquest apèndix introduïm el concepte de m-automata (per saber-ne més mirar el capítol 11 del llibre [10, Thakur]), un concepte molt útil en l'estudi de la trascendència de sèries de potències.

Una pregunta natural de si $\mathbb{R}$ és la completació per successions de Cauchy de $\mathbb{Q}$ amb $|\ |$ arquimedià i com saber si $\alpha \in \mathbb{R}$ és trascendent o algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Si ens reduïm al cas $\mathbb{F}_p[T]$, podem plantejar-nos la mateixa pregunta de forma anàloga per $\beta \in \mathbb{F}_p((T))$ (de la completació amb $p = (T)$) si és trascendent sobre $\mathbb{F}_p(T)$ o no.

Observació 11. :
Podem restringir-nos a estudiar $\alpha \in \mathbb{F}_p[[T]]$ és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(T)$ ja que $\tilde{\alpha} \in \mathbb{F}_p((T))$, escrivim $\tilde{\alpha} = X^{-k}\alpha$ i X^{-k} és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(T)$.

Definició 38. m-autòmata:
Considerem $(S, i, \sum^m, t)$, on:

- *S és el conjunt finit de situacions on $S_j \in S$ rep el nom de situació.*
- *t és l'aplicació de transició on:*

$$t : S \times \sum \longrightarrow S$$

  on $\sum = \{0, \cdots, m-1\}$ rep el nom d'alfabet.

  També denotem:

$$\sum^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \sum^n$$

  On $\sum^n$ és el conjunt de seqüències finites d'ordre n d'elements de $\sum$ on per conveni $\sum^0 = \{\emptyset\}$ i $\sum^1 = \sum$.
- *i és l'estat inicial.*

Si $e \in \sum^*$ llavors $e \in \sum^n$ per algun $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Per tant podem definir la longitut d'un element per:

$$|e| = n$$
$$|\emptyset| = 0$$

Denotem també $e(i) \in \sum$ com el element del alfabet que ocupa les primeres i-posicions de la paraula e (per $i \leqslant |e|$).

Ara anem a definir una operació, siguin $u, w \in \sum$ on $u \in \sum^l$ i $w \in \sum^k$ llavors definim l'operació no comutativa de concatenació com $u \cdot w \in \sum_{l+k}$ definida per:

$$(u \cdot w)(n) = \begin{cases} u(n) & si\ 0 \leqslant n < |u| \\ w(n - |u|) & si\ |u| \leqslant n < |u| + |w| \end{cases}$$

Per consolidar aquestes notacions introduim el següent exemple:

Exemple 5. p-autómata amb p primer:
Pensem $l \in \mathbb{N}$ i una expanssió r-àdica:

$$l = \sum_{j=0}^{k} l_j r^j$$

On $l_j \in \sum = \{0, \cdots, p-1\}$ i $l_k \neq 0$. Fixem-nos en que $\prod_{i=0}^{k} l_i := l_k \cdot l_{k-1} \cdot \cdots \cdot l_0 \in \sum^{k+1}$ (l'operació concatenar de $\sum^*$). Aquesta és l'expressió en base r de l.

Pel cas de $p = 2$ el nombre en base 2: $10110 = \prod_{i=0}^{4} l_i$ on $l_0 = 0,\ l_1 = 1 = l_2,\ l_3 = 0,\ l_4 = 1$.

Una petita observació respecte l'operació concatenar no verifica que si $m = n \cdot t$ (producte de naturals per $n, t \in \mathbb{N}$) llavors $m = \prod_{i=0}^{|m|-1} m_i = \left(\prod_{i=0}^{|n|-1} n_i\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{|t|-1} t_i\right)$ on els productes són l'operació concatenar.

Ara parlarem de l'aplicació t, que la podem extendre a $\sum^*$ per la seva imatge (per $l, m \in \sum$):

$$\begin{aligned} t : S \times \sum^{*} &\longrightarrow S \\ (A, l \cdot m) &\longmapsto t(t(A, l), m) \end{aligned}$$

Al llarg del apèndix utilitzarem t sense fer distinció entre la t normal o l'extensió fent un petit abús de notacions.

Per tant si tenim una paraula més llarga, el que farem és iterar aquest raonament i anar trencat-la paraula lletra a lletra de esquerra a dreta de forma recursiva. És a dir (per mida 3), sigui $m = m_2m_1m_0$, llavors:

$$t(A, m) = t(A, m_2m_1m_0) = t(t(A, m_2), m_1m_0) = t(t(t(A, m_2), m_1), m_0)$$

Definició 39. Seqüència m-automata:
Sigui $(u(n))_{n\geqslant 0}$ una seqüència m-automata si existeix un m-automata $(S, \alpha, \sum_m, t)$ i una aplicació $OUT : S \longrightarrow \mathbb{F}_p$ (o en general qualsevol alfabet en comptes de $\mathbb{F}_p$), on:

- $u(0) = OUT(\alpha)$
- $u(n) = OUT(t(\alpha, n_kn_{k-1} \cdots n_0))$ *on* $n = \sum_{j=0}^{k} n_jp^j$ *on* $n_k \neq 0$.

Exemple 6. :
Considerem el següent 2-automata següent, per $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ i $\sum = \{0, 1\}$ i t donada per:

t	S_1	S_2	S_3	S_4
0	S_1	S_3	S_2	S_4
1	S_2	S_4	S_2	S_4

i amb estat inicial $\alpha = S_1$. Observem que $101 \in \sum^*$ llavors:

$$\begin{aligned} t(\alpha, 101) &= t(t(\alpha, 1), 01) \\ &= t(S_2, 01) \\ &= t(t(S_2, 0), 1) \\ &= t(S_3, 1) \\ &= S_2 \end{aligned}$$

Ara considerem la seqüència de 2-automata via

$$\begin{aligned} OUT : S &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ S_1, S_2 &\longmapsto 1 \\ S_3, S_4 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Estudiem la successió $(u(n))_{n\geqslant 0} \in \mathbb{F}_2$ donada per la 2-seqüència d'autómates anterior:

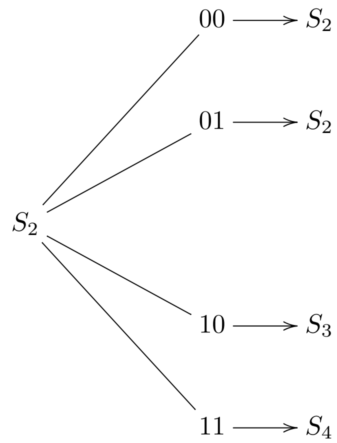
- $u(0) = OUT(S_2) = 1$
- $u(1) = OUT(t(S_1, 1)) = OUT(S_2) = 1$
- $u(2) = OUT(t(S_1, 10)) = OUT(t(t(S_1, 1), 0)) = OUT(t(S_2, 0)) = OUT(S_3) = 0$ *on* 10 *és* 2 *en la concatenació de l'expansió 2-àdica de 2.*
- $u(3) = OUT(t(S_1, 11)) = OUT(t(t(S_1, 1), 1)) = OUT(S_4) = 0$

i així podriem continuar per tot n. Anem a intentar determinar de forma general per tot natural $u(n)$. Observem que:

S_1	*1*			

S_2				

Observem que si les següents possicions despres de un S_2, és a dir:



per tant sortiran uns. Per tant sortirà un 1 si i només sí la seqüència que comença amb S_2, acaba amb 01 o 00. En la resta de casos va a 0.

Per tant $u(n) = 1$ si n té una expressió en base 2 de la forma:

1				

On els "quadradets"estàn ocupats per 00 o per 01. Això ens permet definir el conjunt següent $H = \{n \in \mathbb{N} : n\ forma\ binaria\ anterior\} \cup \{0\}$.

Teorema 25. **Cobhan:**
Els següents enunciats són equivalents:

1. $\sum_{n \geqslant 0} f_n X^n \in \mathbb{F}_q[[X]]$ *és algebraic sobre* $\mathbb{F}_p(X)$.
2. $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *és periódica per una seqüència p-autòmata i* $OUT : S \longrightarrow \mathbb{F}_p$.
3. *Hi ha únicament un nombre finit de subsuccessions de la forma* $f_{p^k n + r}$ *amb* $r = 0, \cdots, p^k - 1$.

Per la demostració, consulteu la referència de l'exemple 6.

Exemple 7. **:**
Considerem la seqüència 2-autómata anterior (el exemple 6).
Observem que $m \in H$ si i només si $4m$ i $4m + 1 \in H$ on recordem $H = \{n \in \mathbb{N} : n\ forma\ binaria\ anterior\} \cup \{0\}$.

Prova:
$(\Rightarrow)$: *Com que $m \in H$, llavors m està formada per paquets de dos bits de la fomra 00 o 01, per tant, observem que $4m = 2^2 m$ o $4m = 2^2 m + 1$ per tant l'espressió en base 2 de $4m$ i $4m + 1$ tenen les següents representacions respectivament (movem totes les possicions dos llocs):*

			0	*1*

			0	*0*

que són de les que tenen els elements de H. #

$(\Leftarrow)$: *Si $4m, 4m + 1 \in H$ cal veure que m és de H. Llavors per $4m$ tenim:*

1		$\cdots$	*0*	*0*

On l'expressió de $m \in H$ són les totes les possicions llevat de les últimes 2.

Ara si $4m$ fós de la forma:

1		$\cdots$	*0*	*1*

forçaria que $4m + 1 \in H$ fós:

1		$\cdots$	*1*	*0*

peró això contradiu que $4m+1 \in H$ cosa que contradiu la hipòtesis i forçá que $4m$ sigui de la forma anterior.# $\square$

Ara considerem $g(X) = \sum_{m\in H} 1\cdot X^m \in \mathbb{F}_2[[X]]$ que pel teorema de Cobhan és algebraica sobre $\mathbb{F}_2(X)$ (teorema 26) Per la caracterització del conjunt H que hem provat sabem que

$$g(X) = \sum_{m\in H} X^m = \left(\sum_{m\in H} X^{4m}\right)(1+X) = g(X^4)(1+X) = g^4(X)(1+X)$$

perquè $\mathbf{ch}(K) = 2$ *i perquè si $m \in H$ equival a que $4m, 4m+1 \in H$. Per tant podem escriure aïllant g de forma compacte $g(X) = (1+X)^{-\frac{1}{3}}$. Per tant ens permet escriure de forma tancada.*

Teorema 26. de Cobhan:
Per seqüències no periòdiques de m-autòmates no es poden produïr per n-automates si m i n són multiplicativament independents.
Per una prova del teorema consultar la referència [10, Thakur] com a teorema 11.1.6.

Exemple 8. :
Siguin $l, p \in \mathbb{P}$ on $l \neq p$, i pensem la trascendència de la següent sèrie sobre $\mathbb{F}_l(X)$:

$$\sum_{n\geqslant 0} X^{p^n} \in \mathbb{F}_l[[X]]$$

Anem a veure que és trascendent. Per fer-ho provem que hi ha una família infinita de k's on $0 < p^m - l^k\mu < l^k$ per algún $m \in \mathbb{N}$ i $0 < \mu < l$, cosa que fa que tinguem infinites subsubseccions de la forma $f_{l^k n + (p^m - l^k\mu)}$ que pren valors 1 per $n = \mu < l$. Pel següent n que es verifica aquesta condició obtenim:

$$l^k n + (p^m - l^k\mu) = p^{m+w}$$

On $w > 0$ i força que $l^k \mid p^w - 1$ cosa que fa que $n = \mu + p^k(p^w-1) > p^m$. Per tant si fem $k \to \infty$ hi han infinits. I pel teorema 25 tenim el resultat. #

Corol·lari 5. :
Sigui $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{F}_p[[X]]$ és algebraica sobre $\mathbb{F}_p(X)$ si i només si $\sum_{a_n=a} X^n$ és algebraic per tot $a \in \mathbb{F}_p$.

Demostració:
($\Leftarrow$): *Suposem que $\alpha_a = \sum_{a_n=a} X^n$ és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(X)$. Llavors fem l'extensió algebraica següent:*

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_p(\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}, X) \\ \Big| \\ \mathbb{F}_p(X) \end{array}$$

i llavors $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1} = f(X) \in \mathbb{F}_p(\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}, X)$ i per tant és un element algebraic.

($\Rightarrow$): *Sigui $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ algebraic a $\mathbb{F}_p(X)$. Considerem:*

$$\sum_{a_n=a} X^n = \sum_{n\geqslant 0}(1-(a_n-a)^{p-1})X^n = \sum_{n\geqslant 0} X^n - \sum_{n\geqslant 0} 1(a_n-a)^{p-1}X^n$$

Fixem-nos que formalment $\sum_{n\geqslant 0} X^n = \dfrac{1}{1-X}$ que és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(X)$, per tant només ens cal provar (per veure l'implicació) que $\sum_{n\geqslant 0}(a_n-a)^{p-1}X^n$ és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(X)$ i per fer-ho veurem dos resultats que provaran el que volem:

- $\sum_{n\geqslant 0}(a_n-a)X^n$ és algebraic sobre $\mathbb{F}_p(X)$.

  Aquest punt és directe, ja que si $\delta := \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ i $\beta := a\sum_{n\geqslant 0} a^n$ que són algebraics, fan que $\delta - \beta$ sigui algebraic sobre l'extensió algebraica $\mathbb{F}_p(X)(\delta, \beta)/F_q(X)$. #

- $\sum_{n\geqslant 0} c_n X^n$ i $\sum_{n\geqslant 0} d_n X^n$ són algebràiques sobre $\mathbb{F}_p(X)$ llavors $\sum_{n\geqslant 0} c_n d_n X^n$ és algebraica sobre $\mathbb{F}_p(X)$.

  Aquesta és una conseqüència del teorema de Cobhan (teorema 26 tercera equivalència) ja que si construïm una seqüència c_n pel p-autómata $\left(S_1,\ \alpha_1,\ \sum_p,\ t_1\right)$ i OUT_1 i construïm una seqüència d_n pel p-autómata $\left(S_2,\ \alpha_2,\ \sum_p,\ t_2\right)$ i OUT_2, obtenim una seqüència $c_n d_n$ pel p-autómata $\left(S_1 \times S_2,\ \alpha_1 \times \alpha_2,\ \sum_p,\ t_1 \times t_2\right)$ i $OUT_1 \cdot OUT_2$. Aquesta, pel teorema de Cobhen, és algebraica.

Gràcies pel que hem provat fins ara, $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - a)^{p-1}$ és algebraica perquè $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - a)$ és algebraica i $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - a)^{p-1}$ és el producte terme a terme de $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - a)$ $p-1$-cops. # Per tant hem provat el resultat. □

C Apèndix Anàlisis no arquimedià

A continuació veurem un resultat que permet exponenciar amb un enter possitiu en base q:

Lema 23. :
Sigui $k \in \mathbb{N}$ i $k = \sum_{i=0}^{N} k_i q^i$ la seva expressió en base q, llavors per a, b indeterminats (on l'expressió pertany a un cos de caracerística p):

$$(a+b)^k = \prod_{t=0}^{N} \left(a^{q^t} + b^{q^t}\right)^{k_t}$$

Demostració:
Primer ho veiem per $N = 1$:

$$(a+b)^{k_0 + k_1 q} = (a^{q^1} + b^{q^1})^{k_1} \cdot (a^{q^0} + b^{q^0})$$

On el resulat és cert, per inducció podem supossar cert per $N = n - 1$ i ho provem per $n = N$:

$$(a+b)^{\sum_{t=0}^{n} k_t q^t} = \prod_{t=0}^{n} (a+b)^{k_t q^t} = \prod_{t=0}^{n} (a^{q^t} + b^{q^t})^{k_t}$$

d'on surt el resultat.

Lema 24. :
Sigui $\lambda \in \mathbb{F}_q$ i $k \in \mathbb{N}$, on $q-1$ no divideix k llavors:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k = 0$$

Demostració:
Com que $\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \lambda^k = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times} \lambda^k$ llavors sigui $\beta \in \mathbb{F}_q^\times$, llavors obenim que:

$$\beta^k \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times} \lambda^k = \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times} (\beta\lambda)^k = \sum_{\omega\in\mathbb{F}_q^\times} \omega^k$$

□

C.1 Valoracions i valors absoluts no arquimedians

Definim valors absoluts discrets en els anells i cossos. Per fer-ho definim les valoracions que permeten definir aquests valors absoluts que seràn no arquimedians. El nostre interés en aquest valors absoluts serà dotar aquests cossos d'una mètrica per poder introduir conceptes d'anàlisis com la convergència i completacions per sèries de Cauchy que ens permetren extendre a cossos complets i algebraicament tancats per definir l'exponencial de Carlitz de forma anàloga a l'exponencial complexa.

Definició 40. Valoracions:
Sigui F cos i $v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que:

- $v(x) = \infty \iff x = 0$

- $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)\ \forall x, y \in F$

- $v(x+y) \geqslant min(v(x),\ v(y))$

Llavors, direm que v és una valoració del cos F. Direm que v és discreta si $v(F) \subset \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Llistem algunes propietats que verifiquen les valoracions:

- $v(1) = 0$: $v(1) = v(1 \cdot 1) = 2v(1)$ on v pren valors a $\mathbb{R}$ que té característica 0.
- $v(\frac{1}{y}) = -v(y)$, amb $y \neq 0$.
- $v(x^n) = nv(x)$.
- $v(-1) = 0$.
- $v(-x) = v(x)$: de $v(-x) = v(x) + v(-1) = v(x)$.
- $v(\frac{x}{y}) = v(x) - v(y)$.
- Si $v(x) \neq v(y)$ llavors $v(x+y) = \min(v(x), v(y))$: Sense pèrdua de generalitat, $v(x) > v(y)$ llavors, per ser v una valoració, obtenim $v(x+y) \geqslant v(y)$. Ara sigui $y = (x+y) - x$, llavors $v(y) \geqslant \min\{v(x+y),\ v(-x)\}$ llavors, clarament $\min\{v(x+y),\ v(-x)\} = v(x+y)$ perquè sino, $v(y) \geqslant v(-x) = v(x)$ cosa que contradiu que $v(x) > v(y)$. Per tant tenim la igualtat provada per doble desigualtat.
- Com aplicació, v defineix un homeomorfisme de grups $v : K^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $(K, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$, on $v(K^{\times}) = \{v(a),\ :\ a \in K^{\times}\}$ amb estructura de subgrup de $\mathbb{R}$. Aquest subgrup de $\mathbb{R}$ rep el nom de **grup de valuació de** v.

Exemple 9. Valoració p-àdica:
Sigui $F = \mathbb{Q}$ i $p \in \mathbb{P}$ fix, on $x \in \mathbb{Q}^{\times}$ llavors:

$$x = p^n y$$

on $v(x) = n$ és la valoració p-àdica per $n \in \mathbb{Z}$ i $y = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ amb $(rs, p) = 1$. És a dir v és la següent aplicació,

$$\begin{aligned} v : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto n \\ 0 &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

La valoració p-àdica la denotarem usualment com $ord_p(x) = n$ on $x \in \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{Z}$ és el exponent de la potència p-èssima de la descomposició anterior.
Donat v un cos i $v(K^{\times}) = 0$ s'anomena **valoració trivial**. En cosos finits l'única valoració possible és la trivial perquè si denotem per K el cos finit, llavors $K^{\times}$ és el conjunt d'arrels de l'unitat de $x^{|K|-1} - 1$.

Exemple 10. Valoració v a $K[T]$:
Sigui $P \in K[T]$ un polinomi mònic irreductible fix, llavors per $\forall f(T) \in K[T] \setminus \{K\}$ podem factoritzar de forma única de la següent forma:

$$f(T) = P^n(T) \cdot g(T)$$

on $g \in K[T]$ i coprimer amb P, i de forma similar al exemple 9 definim:

$$ord_P(f) = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Fàcilment $v = ord_p$ s'extén a $K(T)$, cos de fraccions de $K[T]$.

Exemple 11. Valoració a $\mathbb{F}_q(T)$:
Sigui $\frac{f}{g} \in K(T)$ i $(f, g) = 1$ on $f, g \in \mathbb{F}_q[T]$ amb $g \neq 0$, llavors definim la valoració infinita. Si:

$$v_\infty = \begin{cases} v_\infty\left(\frac{f}{g}\right) & = -\left(deg(f) - deg(g)\right) \\ v_\infty(0) & = 0 \end{cases}$$

i correspon a la valoració associada a $p = \frac{1}{T}$ en $K[\frac{1}{T}]$.

Definició 41. **:**
Sigui v una valoració discreta d'un cos F que no sigui la trivial, llavors definim:

$$R_v \;:=\; \{a \in F \;:\; v(a) \geqslant 0\}$$

On és domini de K, també rep el nom d'anell de valoració discreta. Denotem també el següent ideal

$$M_v \;:=\; \{a \in F \;:\; v(a) > 0\}$$

Que és l'ideal màximal de R_v, per tant tenim el cos anomenat cos resìdual de v:

$$\kappa_v \;:=\; R_v \big/ M_v$$

que rep el nom de cos residu per v.

Exemple 12. **:**
Sigui $v = ord_P$ a $K(x)$ llavors:

$$R_v \;:=\; \left\{ a := \frac{f(x)}{g(x)},\; f(x), g(x) \in K[x] \;:\; P \nmid g \right\}$$

on clarament si $P \nmid g$ llavors $ord_P(a) := ord_P(f) - ord_P(g) = ord_P(f) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

L'ideal maximal és $M_v = P(x)R_v$ on el resultat és directe de que $ord_P(P \cdot a)$ per $a \in R_v$ és $ord_P(a) + 1$ i per tant tenim $v(P \cdot a) > 0$.

Definició 42. **Equivalència de valoracions:**
Siguin v_1, v_2 dos valoracions no trivials sobre $F(x)$, llavors direm que són equivalents si i només si $M_{v_1} = M_{v_2}$.

Definició 43. **Valoració discreta:**
Direm que v una valoració de F és discreta si el grup de valoració $v(F^\times)$ és discret i no trivial respecte la topologia usual de $\mathbb{R}$.
Un resultat que no provaré peró es pot veure en el llibre [4, p-adic-numbers] és que una valoració discreta és equivalent a una valoració amb grup de valuació igual a $\mathbb{Z}$, és a dir $v(F^\times) = \mathbb{Z}$.
Les valuacions que el seu grup de valoració és $\mathbb{Z}$ es denotem per **valuacions amb grup valuació normalitzat**.

Lema 25. **Element uniformador:**
Sigui R un DVR respecte la valuació discreta v, és a dir $R = \{\alpha \in F \;:\; v(\alpha) \geqslant 0\}$. Sigui $\pi \in R$ algun element amb el mínim valor positiu de v, llavors el denotarem com l'uniformador de R. Aquest element verifica les següents propietats:

1. *Qualsevol $a \in R \setminus \{0\}$ pot descomposar-se de forma única com $a = \pi^n u$ on $u \in R^\times$ i $n \geqslant 0$.*

2. *Qualsevol ideal no nul de R és principal i generat per π^n per algun $n \geqslant 0$.*

3. *$M = (\pi)$ és el únic ideal primer no nul de R.*

Demostració:

1. *Després d'escalar v per algún real pensem v amab el grup de valoració normalitzat i podem asumir que $v(\pi) = 1$. Suposem que $a \in R$ té valoració $v(a) = n$, llavors $u := \frac{a}{\pi^n}$ té valoració 0, d'on u és una unitat de R i tenim $a = \pi^n u$.*

2. *Sigui $I \triangleleft R$ un ideal. Sigui $n := min\{v(a) > 0 \;:\; a \in I\}$, que existeix perquè v és discreta i $I \neq (0)$. Sigui $a \in I$ un element amb $v(a) = n$, llavors per (1) tenim $a = \pi^n u$ per $u \in R^\times$, com que $u^{-1}a = \pi^n \in I$ implica que $(\pi^n) \subset I$. Sigui $b \in I$ amb $v(b) = m > n$, per (1) novament, $b = \pi^m u' = \pi^n(\pi^{m-n}u')$. Com que $\pi^{m-n}u' \in R$, $b \in (\pi^n)$, per tant $I = (\pi^n)$. Cal remarcar que no pot existir $m < n$ per la tria de n.*

3. *Com que tot element no nul del anell pot expressar-se com $a = \pi^n u$, i tots els ideals de R són generats per (π^n) per algun $n \geqslant 0$, llavors l'únic element que els divideix a tots és π.* $\square$

C.1.1 Valors absoluts no arquimedians

Definició 44. Valor Absolut:
Sigui F cos, diem que $|\bullet| : F \longrightarrow \mathbb{R}^{\oplus} \cup \{0\}$ és valor absolut de F si compleix les propietats següents:

1. $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$ *per* $\forall x,\ \lambda \in F$
3. *Desigualtats (per $\forall x,\ y \in F$):*
   En aquest cas si compleix la primera serà un valor absolut arquimedià i si verifica la segona serà no arquimedià.
   (a) **Desigualtat Triangular:** $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
   (b) **Desigualtat Ultramètrica:** $|x + y| \leqslant\ max(|x|,\ |y|) \leqslant |x| + |y|$

Ara redefinim els següents conjunts en termes del valor absolut no arquimedià i no de les valoracions:

Definició 45. :
Sigui $|\ |$ un valor absolut ultramètric que no sigui la trivial de F, llavors definim:

$$R_{|\ |} := \{a \in F\ :\ |a| \leqslant 1\}$$

$$R^{\times}_{|\ |} := \{a \in F\ :\ |a| = 1\}$$

$$M_{|\ |} := \{a \in F\ :\ |a| < 1\}$$

$$\kappa_{|\ |} := R_v \diagup M_v$$

Observació 12. :
Els $R_{|\ |}$, $R^{\times}_{|\ |}$, $M_{|\ |}$ de la definició 45 coincideixen amb R_v, $R^{\times}_v$, M_v si $|\ |$ associat a una valoració. Aquests conjunts anteriors, llevat de k_v són clopens a $K(x)$ respecte la topologia mètrica induïda per $|\bullet|$. (la demostració d'aquest resultat es pot trobar al llibre [8, Papikian])

Exemple 13. :
La completació de $K(x)$ respecte a ord_x és $K((x))$ (el conjunt de les sèries de Laurant). L'extensió de ord_x a $K((x))$ que denotarem per v_x assigna:

$$v_x(\beta) = v_x\left(\sum_{n=-N}^{\infty} a_n x^n\right) = -N$$

i $|\beta|_x = c^N$.

Definició 46. Condició de Cauchy:
Una sèrie diem que és de Cauchy si verifica la condició de Cauchy que és la següent:

$$Donat\ \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ tal\ que\ \forall n, m \geqslant n_0,\ m, n, n_0 \in \mathbb{N},\ |a_n - a_m| < \epsilon$$

Proposició 9. Caracterització dels valors absoluts no arquimedians:
Sigui $|\bullet|$ un valor absolut no arquimedià $\iff$ el conjunt $\{|k|\ :\ |1_K + \cdots + 1_K|\}$ té cota superior.

Lema 26. Valor absolut induït per una valoració:
Sigui F cos i v una valoració, llavors per $\forall c > 1$, podem definir $|\bullet|_v : F \longrightarrow \mathbb{R}$ via:

$$|x|_v := c^{-v(x)}$$

On és no arquimedià.

De la propossició anterior anem a provar que verifica la condició ultramètrica:
$|x+y|_v = c^{-v(x+y)} \leqslant c^{-min(v(x),v(y))} = max\left\{c^{-v(x)},\ c^{-v(y)}\right\}$.
El **valor absolut** p**-àdic** per $K=\mathbb{Q}$ no és més que triar com a $c=p\in\mathbb{P}$ amb la valoració p-àdica definida en el exemple 11.
El valor absolut induït en $\mathbb{F}_q[T]$ per v_∞ és $|x|_\infty = q^{-v_\infty(x)}$.

Un fet diferencial de l'anàlisis no arqimedià respecte al anàlisis usual és que tots els punts d'un disc són centre, no existeix un punt "privilegiat". Això és conseqüència de si $D=\{x\ :\ |x-a|<1\}$, llavors per a un $b\in D$ fixat, $|x-b| = |(x-a)+a-b| < 1 \iff x\in D$, ja que per la desigualtat ultramètrica $max\{|x-a|,\{|x-b|\ \} < 1$ per tant la definició del disc no depent de un punt en concret.

Definició 47. Equivalència entre normes:
Direm que $|\bullet|$ *i* $|\bullet|'$ *són equivalents si per* $\forall a\in K$ *i* $s>0$ *fix tenim* $|a|' = |a|^s$

Una cosa natural que es dóna quant tens un cos i un valor absolut és (com en el cas dels racionals amb el valor absolut usual que permet la completació de $\mathbb{Q}$ obtenint $\mathbb{R}$) completar per successions, possant-hi els seus límits.

Exemple 14. :
Sigui $\hat{K}$ *un cos complet respecte a un valor absolut no arquimedià i no trivial. Per simplificar la notació, ens referim al anell d'enters de* $\hat{K}$ *com* $\hat{R}$ *i anàlogament,* $\hat{M}$ *el ideal maximal de* $\hat{R}$*.*
Suposem que $|\bullet|$ *és discret i que* $\exists k\subset\hat{R}$ *un subcos isomorf a* $\hat{R}/_{\hat{M}}$*. Ara fixem un generador de* $\hat{M}$*. Llavors* π *és trascendent sobre* k *on* $\hat{R}\cong k[[\pi]]$ *i* $\hat{K}\cong k((\pi))$*.*
Per veure això, com que $k\cap\hat{M}=\{0\}$ *llavors* $|a|=1$ *per tot* $k^\times$*. Suposem que* π *és algebraic sobre* k*, llavors existeix un polinomi amb coeficients a* k *tal que:*

$$\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \ \cdots\ + a_0 = 0$$

on $a_0\neq 0$*. Com que* $0<|\pi|<1$*, els coeficients verifiquen que* $|a_i|\leqslant 1$ *per* $i>0$ *i* $|a_0|=1$*. Per la desigualtat ultramètrica obtenim que la norma del polinomi evaluat en* π *és* 1 *cosa que contradiu que sigui* 0 *i per tant* π *és trascendent.*
Ara anem a veure els següents resultats:

- **Una seqüència** $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ **a** $(K,\ |\bullet|)$ **és Cauchy si i només si** $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$**.**
  Podem veure que un límit és convergent cap a zero si per $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ *tal que* $|a_{N+1}-a_N|<\epsilon$*, en particular per* $\epsilon=\frac{1}{N}$*.*
  Ara, si la succesió és Cauchy, per $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$*, tal que per* $n,m>N$, $|a_m-a_n|<\epsilon=\frac{1}{n}$*, en particular per* $m=n+1$*, per tant tenim que fent límit surt el resultat.*

  Ara si Suposem que el límit tendeix a zero, cal veure que llavors la successió és Cauchy. Sigui $|a_m-a_n|$ *per* n,m *prou grans i per la desigualtat ultramètrica:*

$$|a_m - a_{m-1} + a_{m-1} + \ \cdots\ + a_{n+1} - a_n| = \ max\ \{|a_{n+1}-a_n|,\ |a_{n+2}-a_{n+1}|,\ \ \cdots\ |a_m - a_{m-1}|\} < \epsilon$$

  que com per hipòtesis $|a_{n+1}-a_n|$ *tendeix a zero, per* n *prou gran* $|a_{n+j+1}-a_{n+j}|<\epsilon$ *per tot* $j=1,\ \cdots\ ,m-n$ *on* ϵ *és el màxim dels* ϵ_j *on* $\epsilon_j > |a_{n+j+1}-a_{n+j}|$*. Per tant éś de Cauchy.*

  Definició 48. :

  Un cos K *és complet per* $|\ |$ *si tota succesió de Cauchy en* K *té límit en* K*.*

- **Una sèrie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **a** $(K,\ |\bullet|)$ **convergeix en** $\hat{K}$ **si i només si** $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$
  Si Suposem que $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ *llavors,* $0=\lim_{x\to\infty}\ max\ \{|a_n|,\ |a_{n+1}|\ \}\geqslant|a_{n+1}-a_n|$ *per la desigualtat ultramètrica. Per tant la sèrie és de Cauchy i si la pensem dintre de* $\hat{K}$ *(que és complet) força que sigui convergent a un element de* $\hat{K}$*.*

  Ara si Suposem que la sèrie convergeix a $\alpha\in\hat{K}$*, obtenim que:*

$$0=\lim_{N\to\infty}\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N}\right| = \lim_{N\to\infty}\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N+1}a_n+\sum_{n=1}^{N+1}a_n-\sum_{n=1}^{N}a_n\right| = \lim_{N\to\infty}\ max\ \left\{\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N+1}a_n\right|,\ \left|\sum_{n=1}^{N+1}a_n-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|\right\}$$

  Per tant el resultat.

Per $R = K[\pi]$ un DVR on π un uniformitzant, la sèrie de la forma $\sum_{n\geqslant 0} a_n\pi^n$ per $a_n \in k$ convergeix en $\hat{R}$, per tant $k[[\pi]] \subset \hat{R}$ i és subanell. Per l'altre inclusió, sigui $\alpha \in \hat{R}$ un element qualsevol, llavors $\exists! a_0 \in k$ i $\exists! \alpha_1 \in \hat{M}$ tals que $\alpha = a_0 + \alpha_1$. Ara $\frac{\alpha_1}{\pi} \in \hat{R}$ hi novament tenim que $\exists! a_1 \in k$ i $\exists! \alpha_2 \in \hat{M}$ tals que $\frac{\alpha_1}{\pi} = a_1 + \alpha_2$ o equivalentment $\alpha_1 = \pi a_1 + \pi\alpha_2$. Expandint iterativament aquest argument obtindrem que $\alpha = \sum_{n\geqslant 0} a_n\pi^n$.
Ara normalitzem v per forçar que $v(\pi) = 1$, llavors si $\alpha \neq 0 = \sum_{n\geqslant N} a_n\pi^n \in \hat{R}$ amb $a_N \neq 0$ peró $a_N \in k^\times$. Ara $\frac{\alpha}{\pi^N} = a_N + \pi\beta$ on pel que hem vist fins ara $\beta = \sum_{n\geqslant 0} b_n\pi^n$ i per tant al dividir el α anterior per π^N ens quedarà una expressió amb terme independent a_N i $\pi\beta$. Ara si calculem la valoració de $\frac{\alpha}{\pi^N}$ ens queda:

$$v\left(\frac{\alpha}{\pi^N}\right) = v(a_N + \beta\pi) = \ min\ \{v(a_N),\ 1 + v(\beta)\} = v(a_N)$$

ja que $v(a_N) = 0$ perquè $a_N \in k^\times$ i el seu valor absolut és 1 i per tant necesariament la seva valoració és 0. Per tant $v(\frac{\alpha}{\pi^N}) = 0$ i $v(\alpha) = N$ (perquè $0 = v(\frac{\alpha}{\pi^N}) = v(\alpha) - Nv(\pi)$). Per tant poden identificar $\hat{K}$ amb $k((\pi))$ i la valoració normalitzada és com la del exemple 13 (v_π). Per tant tenim el isomorfisme.

Definició 49. Cos local:
Un cos que és complet respecte a una valoració no trivial discreta i tingui un cos residual per v finit s'anomena un cos local.

Hi ha resultats més profunts sobre cosos locals peró s'allunyen del objectiu del treball, tot i això, pel lector interesat pot mirar-se més resultats al respecte al llibre [5, Local-Fields].

C.1.2 Completacions respecte un valor absolut no arquimedià

Primer de tot introduïm com ha de ser el valor absolut que extén el valor absolut $|\bullet|$ no arquimedià en K a un cos a L amb L/K extensió finita.

Proposició 10. Extensió del valor absolut:
Sigui L/K una extensió de grau n. Aleshores l'aplicació $|\bullet| : L \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ definida per

$$|a| = \left|Nr_{L/K}(a)\right|^{\frac{1}{n}}$$

és un valor absolut a L/K i extén el de K.

Demostració:
Per veure que és un valor absolut cal verificar les condicions de la definició de valor absolut (definició 44). Les dos primeres són directes perquè $Nr_{L/K}(a)$ és defineix com el determinant de la $K-$transformació lineal a L induïda per multiplicar per a. Com aquesta transformació és invertible (si $a \neq 0$) i el determinant verifica $A, B \in M_n(K)$, llavors $det(AB) = det(A)det(B)$, llavors s'obté les propietats (1) i (2).

Per la desigualtat ultramètrica, per $\forall a, b \in L$, i spdg $|a| \geqslant |b|$ llavors:

$$|a + b| = |a| \cdot \left|1 + \frac{b}{a}\right|$$

on per la suposició $|\frac{b}{a}| \leqslant 1$. Si veiem que $|1 + \frac{b}{a}| \leqslant 1$ llavors segur que $|a + b| = |a|$. Com que assumim $|b| \leqslant 1$ és suficient veure $|1 + b| \leqslant 1$.
Sigui $m_{b,K}(x) = x^t + \ \cdots\ + a_o$ el polinomi mínim de b sobre K. Pel colorari 9, $Nr_{L/K}(b) = (-1)^n a_0^{\frac{n}{t}}$. Per ser $|b| \leqslant 1$, implica que $|a_0| \leqslant 1$. Per un colorari del lema de Hensel (colorari 7) obtenim que:

$$max\ \{|1|, |a_{t-1}|,\ \cdots\ , |a_0|\} = max\ \{|1|,\ |a_0|\}$$

Clarament, el polinomi irreductible de $1 + b$ és $m_{b,K}(x - 1)$, per tant:

$$Nr_{L/K}(1 + b) = (-1)^n m_{b,K}(-1)^{\frac{n}{t}}$$

i per tant:

$$\begin{aligned} |1 + b| &= |Nr_{L/K}(1 + b)|^{\frac{1}{n}} = |(-1)^t + a_{t-1}(-1)^{t-1} + \ \cdots\ + a_0| \\ &\leqslant\ max\{1, |a_{t-1}|,\ \cdots\ , |a_0|\}^{\frac{1}{t}} =\ max\{|1|, |a_0|\}^{\frac{1}{t}} = 1 \end{aligned}$$

Proposició 11. Extensió per successions de Cauchy de K:
Sigui F cos amb $|\bullet|_F$ un valor absolut, llavors $\exists\hat{\hat{F}}$ la completació de la clausura separable de la completació de F i $|\bullet|$ en $\hat{\hat{F}}$ tals que:

1. $\hat{\bar{F}}$ *és complet per* $|\bullet|$

2. $\hat{\bar{F}}$ *conté* F *i* $\forall x \in F$, $|x| = |x|_F$

3. F *és dens en* $\bar{F}$

Si $(\hat{\bar{F}}_1, |\bullet|_1)$ *i* $(\hat{\bar{F}}_2, |\bullet|_2)$ *satisfent les tres condicions anteriors, llavors:*

- $\hat{\bar{F}}_1 \cong \hat{\bar{F}}_2$ *a través d'un* ϕ
- $|\phi(x)|_2 = |x|_1$

Com podem veure això és anàleg a $F = \mathbb{Q}$ *amb el valor absolut usual on s'obtè* $\bar{F} = \mathbb{R}$, $\bar{\bar{F}} = \mathbb{C}$ *i* $\hat{\bar{\bar{F}}} = \mathbb{C}$.

Ara anem a veure de com construïr $\hat{F}$, la completació de F per a $|\ |$. Per la primera, considerem $\mathcal{C}(F)$ l'anell de successions de Cauchy de F. Sigui $I_0(F)$ l'ideal format per les successions de Cauchy que tendeixen a 0, cal veure que és maxial on podem incloure F a $I_0(F)$ a traves de la successió constant $\{x\}_{\mathbb{N}}$ per $\forall x \in F$.

Construïm el següent anell quocient:

$$\tilde{F} = \mathcal{C}(F) \big/ _{I_0(F)}$$

Per la segona, fixem-nos que si $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(F)$ on difereixen per un element de $I_0(F)$ aleshores $\lim |x_n|_F$ i $\lim |y_n|_F$ existeixen i coincideixen a $\mathbb{R}$, per tant podem definir un valor absolut no arquimedià a $\tilde{F}$ per:

$$|\{x_n\}_{\mathbb{N}}| := \lim_{n\to\infty} |x_n|_F$$

On per la forma d'incluïr F en $\bar{F}$ obtenim directament que $|x| = |x|_F$, on $|\bullet|_F$ és el valor absolut

Definició 50. Anàleg de $\mathbb{C}$ per cosos F arbitraris:
La parell $\left(\hat{\bar{F}}, \ |\bullet|\right)$ *que verifiquin la proposició 11 s'anomena el cos complet i algebraicament tancat de* $(F, \ |\bullet|_F)$ *que és única llevat d'isomorfisme.*

Teorema 27. :
Sigui K *un cos amb una valoració* v *no trivial i discreta. Sigui* $\hat{K}$ *la completació per* v. *Si* $\mathbf{ch}(K) = \mathbf{ch}(k) := \mathbf{ch}\left(R_v \big/ _{M_v}\right)$, *llavors* $\hat{K} \cong k((\pi))$ *on* π *és un uniformador de* R_v.

Demostració:
La demostració al llibre [8, Papikian], tot i que ja hem vist una mica en l'exemple 14.

Exemple 15. Cas p-àdics sobre $\mathbb{Q}$ amb $|\bullet|_p$ sobre $\mathbb{Q}$:
Definim els següents conjunts:

$$\mathbb{Q}_p := \hat{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i \ : \ a_i \in \{0, \ 1, \ \cdots, \ p-1\} \text{ tal que } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_p := \{\alpha \in \mathbb{Q}_p \ : \ v(a) > 0\} = \left\{ \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \text{ per } a_i \in \{0, \ \cdots, p-1\} \right\}$$

$\mathbb{Q}_p$ *és la completació* p*-àdica de* $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{Z}_p$ *anell de valoració associat a* $\mathbb{Q}_p$.
Per un enter $k < 0$, *l'expressió* p*-àdica serà per* $j \geqslant 0$ $p^j + k > 0$ *on* j *és el mínim enter possitiu que la seva suma amb* k *sigui possitiva. Llavors per construcció* $p^j + k \in \mathbb{Z}_p$:

$$p^j + k = \sum_{i=0}^{j-1} k_i p^i$$

Per tant:

$$\begin{aligned} k &= (p^j + k) - p^j \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} k_i p^i + \sum_{i=0}^{\infty} (p-1) p^{i+j} \end{aligned}$$

Observem que l'expansió p-àdica de -1 en $\mathbb{Z}_p$ és:

$$-1 = \sum_{i=0}^{\infty}(p-1)p^i$$

Una observació és que els naturals i els enters són densos en $\mathbb{Q}$ i per la proposició 11 $\mathbb{Z}_p$ és dens en $\mathbb{Q}_p$ i per tant els enters són densos en $\mathbb{Q}_p$.

Observem que un cert enter $m \in \mathbb{Z}$ on $m \in \mathbb{Z}_p$ és té que els coeficients de la seva expressió p-àdica és 0 o $p-1$ a partir d'un cert natural j.

Sigui $q = p^l$ on $l \geqslant 0$, llavors l'expressió p-àdica de $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ la podem posar en termes de la base q agrupant els termes de p^0 fins p^{l-1} de l'expressió p-àdica i aquest és el primer coeficient de l'expressió q-àdica de x, pel segon terme agrupem del terme p^l fins al terme p^{2l-1}, i així succesivament.

Exemple 16. Cos de Fraccions de Polinomis i la seva completació:
Sigui $K := F_q(T)$ amb el valor absolut $|\bullet|_\infty$. La completació de K és el conjunt de sèries de Laurant definides sobre $\mathbb{F}_q$ en la variable $\frac{1}{T}$ on introduïm la següent notació:

$$K_\infty := \hat{K} = \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right) = \left\{\sum_{i=-k}^{\infty} a_i T^{-i} \;:\; a_i \in \mathbb{F}_q \text{ amb } n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ara, aquest cos és complet per succesions de Cauchy peró no és algebraicament tancat, i considerem $\bar{K_\infty}$ la clausura separable de K. Triant la completació de $\bar{K}_\infty$ podriem perdre a priori ser separablement tancat però, com veurem (proposició 15), continua sent separablement tancat i complet i és un anàleg de $\mathbb{C}$ corresponent per a K és $\hat{\bar{K}}_\infty$ que per comoditat designarem com $\mathbb{C}_\infty = \hat{\bar{K}}_\infty$.

Proposició 12. :
Sigui V un K-espai vectorial de dimensió finita i $|\bullet|$ una norma a V. Llavors existeixen c_1, c_2 constants positives tals que:

$$c_1|v|_{sup} \leqslant |v| \leqslant c_2|v|_{sup}$$

per tot $v \in V$. On la norma del suprem agafa el valor absolut del màxim coeficient de v expressat en la base de V. A més V és complet respecte $|\bullet|$.

Demostració:
Al llibre [?, $Drinfeld$] es pot trobar el resultat.

Proposició 13. Extensió canònica de v a L:
Sigui L/F una extensió algebraica finita i F cos complet respecte v, $\exists \bar{v}$ en L tal que $\bar{v}(x) = v(x)$ per tot $x \in F$. Aquesta extensió és única llevat d'isomorfisme. Anàlogament, podem enunciar el resultat per a valors absouluts.

Demostració:
Per la propossició 18 aquesta valoració $\bar{v}$ (o equivalentment la norma) associada al valor absolut extén v.
Podem pensar el valor absolut extès com una norma a L com $K-$espai vectorial. Llavors si suposem que $|\bullet|_1$ i $|\bullet|_2$ són dos extensions diferents de $|\bullet|$ a K, llavors hi ha $a \in L^\times$ tal que spdg suposem que $|a|_1 < |a|_2$. Llavors per $c, c' > 0$ fixades i per $m \in \mathbb{N}$ suficientment gran obtenim $c'|a^m|_1 < c|a^m|_2$. Ara per la proposició 12 aplicada a $|\bullet|_1$ i $|\bullet|_2$ obtenim $c|b|_2 \leqslant |b|_{sup} \leqslant c'|b|_1$ per $\forall b \in L$. En particular $c|a^m|_2 \leqslant c'|a^m|_1$ que porta a contradicció. La completitut és per la proposició 12. $\square$

Proposició 14. :
Els elements de $\bar{K}$ que són conjugats respecte K tenen el mateix valor absolut.

Demostració:
Sigui $a \in L$ i sigui $L = K(a,b)$, llavors per ser extenció finita i b el conjugat, tenim $[k(a) : K] = [K(b) : K] = deg(m(x))$ on $m \in K[x]$ el polinomi mínim. Per tant:

$$|a| = |Nr_{L/K}(a)|^{\frac{1}{[L:K]}} = |Nr_{L/K}(b)|^{\frac{1}{[L:K]}} = |b|$$

d'on surt el resultat. $\square$

Lema 27. de Hensel:
Sigui $f(x) \in R[x]$ (on R anell commutatiu) un polinomi obtingut de reduïr els coeficients modul $\mathcal{M}$, Suposem que:

1. $\tilde{f}(x) = g_0(x) \cdot h_0(x)$ *on* $g_0, h_0 \in k[x]$

2. g_0 *móinic*

3. $g_0(x)$ *i* $h_0(x)$ *són coprimers a* $k[x]$.

Llavors $f(x) = g(x)h(x)x$ *per uns únics* $g(x), h(x) \in R[x]$ *tals que* g *és mónic,* $\bar{g}(x) = g_0(x)$ *i* $\bar{h}(x) = h_0(x)$.

Corol·lari 6. Versió alternativa del Lema de Hensel:
Sigui $f(x) \in R[x]$ *amb* R *domini i suposem que* $\bar{f}(x)$ *té una arrel simple* α_0. *Llavors* $\exists! \alpha \in R$ *tal que* α *és arrel de* $f(x)$ *on* $\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\mathcal{M}}$

Lema 28. :
Sigui $g(x), h(x) \in R[x]$ *tal que* g *és mónic i* $\bar{g}, \bar{g} \in k[x]$ *són coprimers. Sigui* $r(x) \in R[x]$ *un polinomi no nul amb* $deg(r) < deg(gh)$. *Llavors* $\exists u(x), w(x) \in R[x]$ *amb* $deg(u) < deg(h)$ *i* $deg(w) < deg(g)$ *tals que:*

$$g(x)w(x) + h(x)w(x) = r(x)$$

El parlar del lema de Hensel en aquest treball és per a obtenir el següent resultat:

Corol·lari 7. :
Sigui $f(x) \in K[x]$ *un polinomi irreductible de grau* n *amb* $|\ |$ *en* K *complet, llavors:*

$$max\ \{|a_n|,\ |a_{n-1}|,\ \cdots\ , |a_0|\} = max\ \{|a_0|,\ |a_n|\}$$

Demostració:
Sigui $n \geqslant 2$, *i Suposem que és falç, llavors* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < k < n$ *on:*

$$|a_m| >\ max\ \{|a_n|, |a_0|\}$$

El polinomi $a_m^{-1} f(x) \in R[x]$ *i la seva reducció* $g_0(x)$ *a* $k[x]$ *és mónic de grau* m. *Possem* $h_0(x) = 1$, *per el lema 28* $a_m^{-1} f(x)$ *factoritza a* $R[x]$ *com* $a_m^{-1} f(x) = g(x)h(x)$ *amb* g *de grau* m. *Això contradiu la hipòtesis de que* f *és irreductible a* $K[x]$. $\square$

Proposició 15. Completació algebraica de cosos complets per succesions:
Sigui F *cos complet respecte* v *una valoració. Sigui* $\bar{F}$ *la clausura separable de* F *amb* v *l'extensió canònica de* v *a* $\bar{F}$. *Sigui* $\hat{\bar{F}}$ *la completació respecte al valor absolut induït per* v, *aleshores* $\hat{\bar{F}}$ *és complet i algebraicament tancat.*

Demostració:
Sigui $p(x)$ *un polinomi mònic de la forma següent:*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{d} p_j x^j \in \hat{\bar{F}}[x] \quad on\ p_d = 1$$

aleshores hem de veure que p *té una arrel a* $\hat{\bar{F}}[x]$. *Sigui* L *una extensió de* $\hat{\bar{F}}$ *que contingui una arrel* α *de* $p(x)$. *Fixem* $m \in \mathbb{N}$, *triem un polinomi:*

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^{d} p_j^1 x^j \in \bar{F}[x]$$

on pel teorema 11 $\bar{F}$ *és dens en* $\hat{\bar{F}}$ *i això ens permet triar* $\left|p_j^1 - p_j\right| < \epsilon_j$ *i tal que* $m <\ \min_j v(p_j - p_j^1)$.
Per tant tenim:

$$p_1(\alpha) = p_1(\alpha) - p(\alpha)$$

$$\sum_{i=0}^{d} (\hat{p_j} - p_j)\alpha^j$$

Sigui $\chi_k =\ \min_j v(\alpha^j) =\ \min_j j \cdot v(\alpha)$ *i*
lbrace} el conjunt de les arrels de $p_1(x)$ *que són elements de* $\bar{F}$ *per ser algebraicament tancat, llavors:*

$$d \cdot v(\alpha - \alpha_j) \geqslant \sum_{j=0}^{d} v(\alpha - \alpha_j) = v\left(\prod_{j=0}^{d}(\alpha - \alpha_j)\right) = v\left(\sum_{j=0}^{d}(p_j^1 - p_j)\alpha^j\right)$$

$$\geqslant \min_j \left\{ v\left((p_j^1 - p_j)\alpha^j\right)\right\} = \min_j v(p_j^1 - p_j) + j \min_j v(\alpha) > \epsilon_\alpha + m$$

En particular per algun j_m tenim que $d \cdot v(\alpha - \alpha_j)$ implica:

$$v(\alpha - \alpha_{j_m}) > \frac{m + \epsilon_\alpha}{d}$$

Amb aquest α_{j_m} construïm una succesió de Cauchy a $\bar{F}$ convergent cap a α. Per tant $\alpha \in \hat{\bar{F}}$. $\square$

C.1.3 Anàlisis No Arquimedià

Per més coneixement sobre funcions enteres en cossos p-àdics i conceptes d'anàlisis no arquimedià sobre $\mathbb{C}_\infty$ és molt recomenable lleguir el capítol 6 del llibre [4, p-adic Numbers].

Observació 13. Condició de Cauchy
Una successió és de Cauchy si i només si $d(a_j, a_{j+1}) \to 0$ si $j \to \infty$. És a dir, només cal veure-la per a consecutius.

Proposició 16. Condició suficient de convergència en cosos complets no arquimedians: *Sigui F un cos complet no arquimedià, llavors:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty \iff \lim_{x \to \infty} a_j = 0$$

Per tant si provem que una sèrie té terme general tendint cap a 0, llavors convergeix. Això contrasta clarament amb el anàlisis arquimedià en el que la sèrie harmònica és clarament divergent peró el tèrme general tendeix a 0.

Definició 51. Sèrie de Potències Entera:
Sigui N un cos complet no arquimedià i $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ on $a_i \in N$, llavors direm que f és entera si convergeix per a $\forall x \in N$ (entera als complexos és una funció holomorfa a tot el pla $\mathbb{C}$).

Teorema 28. Propietat de les funcions enteres:
Sigui F un cos complet no arquimedià i algebraicament tancat i f és entera. Siguin $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$ el conjunt d'arrels no nul·les de f indexat pels naturals, aleshores:

$$f(x) = c \cdot x^n \prod_{t=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{\lambda_t}\right)$$

on $n := ord_{f(x),x=0}(f)$, $c \in K$ (on K algebraicament tancat i complet). El recíproc tambè és cert, és a dir, donats $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,$c \in K$ i $\{\lambda_t\}_I$ (on I conjunt d'indexos) un subconjunt de F i cap d'ells nul, llavors el producte anterior defineix una funció entera. També $\lim_{t\to\infty} v(\lambda_t) = -\infty$.

Demostració:
Sigui $f^*(x) = x^n \prod_{t \in I}\left(1 - \frac{x}{\lambda_t}\right)$, defim $g(x) := \frac{f(x)}{f^*(x)}$ que és una funció entera sense cap zero, llavors és una funció constant $g(x) = c \in K$. $\square$
Aquest resultat utilitza conceptes introduïts al llibre [3, Goss] al capítol 1, en concret la secció 1.7 ("The τ-adjoint of an Additive Polynomial").

D Apèndix Preliminars d'àlgebra

Teorema 29. Multinomial:
Sigui $x_1, \cdots, x_n \in K[x_1, \cdots, x_d]$ variables en l'anell de polinomis amb coeficients en K, per a tot $k \in \mathbb{N}$ llavors:

$$(x_1 + \cdots + x_d)^k = \sum_{i_1 + \cdots + i_d = k} \binom{k}{i_1 + \cdots + i_d} x_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot x_d^{i_d}$$

Demostració:
Pel cas $d = 2$ és el teorema del binomi. Provem per $d = 3$, on per simplicitat denotem $K[x, y, z]$:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^k &= \sum_{i_1=0}^{k} \binom{k}{i_1} (x+y)^{k-i_1} z^{i_1} \\ &= \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} \binom{k}{i_1}\binom{k-i_1}{i_2} x^{k-i_1-i_2} y^{i_2} z^{i_1}\end{aligned}$$

On clarament si denotem $i_3 := k - i_1 - i_2$:

$$\binom{k}{i_1}\binom{k-i_1}{i_2} = \frac{k!}{i_1!(k-i_1)!}\frac{(k-i_1)!}{i_2!(k-i_2-i_1)!} = \frac{k!}{i_1!i_2!(k-i_2-i_1)!} = \frac{k!}{i_1!i_2!i_3!}$$

Gràcies a la definició de i_3 i que és una suma finita (per tant podem reordenar com volguem) obtenim:

$$\sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} \binom{k}{i_1}\binom{k-i_1}{i_2} x^{k-i_1-i_2} y^{i_2} z^{i_1} = \sum_{i_1+i_2+i_3=k} \binom{k}{i_1, i_2, i_3} x^{i_3} y^{i_2} z^{i_1}$$

Per inducció, per cas $d+1$, definim $i_{d+1} = k - \sum_{j=1}^{d} i_j$, el mateix argument del cas anterior i l'hipòtesis d'inducció:

$$(x_1 + \cdots + x_{d+1})^k = \sum_{i_{d+1}=0}^{k} \binom{k}{i_{d+1}} (x_1 + \cdots + x_d)^k x_{d+1}^{i_1} = \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k-i_1} \cdots \sum_{i_{d+1}=0}^{i_{d+1}} \underbrace{\binom{k}{i_1, \cdots, i_d}\binom{k - \sum_{j=0}^{d} i_j}{i_{d+1}}}_{=\binom{k}{i_1, \cdots, i_{d+1}}} x_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot x_{d+1}^{i_{d+1}}$$

Per tant tenim el resultat. $\square$

Definició 52. Domini de Dedekind:
És un domini $\mathcal{D}$ conmutatiu amb el neutre del producte i de la suma diferents, on tot ideal de $\mathcal{D}$ s'escriu com a producte ideal de primers de $\mathcal{D}$.

Proposició 17. :

Demostració:
Sigui I un ideal no trivial de $\mathcal{D}$, un domini de Dedekind. Sigui $I = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{P}_r^{a_r}$ on $\mathfrak{P}_i$ per $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ són ideals primers diferents i $a_i \in \mathbb{N}$. Denotem per $x_i \in \mathbb{P}_i^{a_i} \setminus \mathbb{P}_i^{a_i+1}$. Com que els ideals $\mathfrak{P}_i$ son coprimers dos a dos, podem aplicar el teorema del reste xinès i afirmar l'existència de $x \in \mathfrak{A}$, tal que:

$$x \equiv x_i \mod \mathfrak{P}_i^{a_i+1}$$

en particular:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{P}^{a_i} = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i^{a_i} = I$$

Per tant, podem factoritzar el ideal (x) a $\mathcal{D}$ com:

$$(x) := \mathfrak{P}_1^{b_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{P}_r^{b_r} \cdot \mathfrak{Q}_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{Q}_t^{c_t}$$

on $b_i, c_j \in \mathbb{N}$ i els $\mathfrak{P}_i$ i $\mathfrak{Q}_j$ són ideals primers diferents (on $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ i $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$). Com que $x \in I$, deduïm que $b_i \geqslant a_i$. Per com hem triat els x_i's, força que $x \notin \mathfrak{P}_i^{a_i+1}$, per tant, $b_i = a_i$, per tot $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$. Com que els ideals I i $\mathfrak{Q}_1^{c_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{Q}_t^{c_t}$ són dos a dos coprimers, el teorema del reste xinès diu que $\exists y \in \mathcal{D}$ tal que $y \equiv 0 \mod I$ i $y \equiv 1 \mod \mathfrak{Q}_j$ per $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$. En particular $y \in I$. Ara, afirmem que $I = (x, y)$ (la prova serà per doble inclusió).

- $\supseteq$: $(x) = I \cdot \mathfrak{Q}_1^{c_1} \cdot \ \cdots \ \cdot \mathfrak{Q}_t^{c_t} \subseteq (x,y) \subseteq I$. #
- $\subseteq$: *Denotem* $(x,y) = I \cdot \mathfrak{Q}_1^{d_1} \cdot \ \cdots \ \cdot \mathfrak{Q}_t^{d_t}$ *per* $d_j \leqslant c_j$, *com que* $y \equiv 1 \mod \mathfrak{Q}_j$, *llavors* $y \notin \mathfrak{Q}_j$ *per tant, tots els* d_i *són zero i* $I \cdot \mathfrak{Q}_1^{c_1} \cdot \ \cdots \ \cdot \mathfrak{Q}_t^{c_t} = I$. # $\square$

Exemple 17. Dominis de Dedekind:
Ficarem dos exemples, un per extensions de $\mathbb{Q}$ *i l'altre per cossos de nombres.*

1. $\vartheta_N := \{\alpha \in N \ : \ Irr(\alpha,\ \mathbb{Q})[X] \in \mathbb{Z}[X],$ *amb* $Irr(\alpha,\ \mathbb{Q})[X]$ *monic*$\}$ *on* $\mathbb{Z}[X]$ *és el anell d'enters de* N *i* $N/\mathbb{Q}$ *és finita. Observem que tenim el següent diagrama (on* i *denota la aplicació inclusió):*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, dash] & \vartheta_N \arrow[l, hook', "i"'] \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Z} \arrow[l, hook', "i"] \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

2. $\vartheta_{\mathbb{F}_q[T],\ N} := \{\alpha \in N \ : \ Irr(\alpha,\ \mathbb{F}_q(T))[X] \in \mathbb{F}_q[T][X],$ *amb* $Irr(\alpha,\ \mathbb{F}_q(T))[X]$ *monic*$\}$ *on* $N/F_q(T)$ *és finita. Observem que tenim el següent diagrama (on* i *denota la aplicació inclusió):*

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, dash] & \vartheta_{\mathbb{F}_q[T],\mathbb{N}} \arrow[l, hook', "i"'] \\
\mathbb{F}_q(T) & \mathbb{F}_q[T] \arrow[l, hook', "i"] \arrow[u, hook, "i"'] \\
\mathbb{F}_q\left[\frac{1}{T}\right] \arrow[u, hook, "i"] & \left(\frac{1}{T}\right) \arrow[l, hook', "i"]
\end{tikzcd}$$

on $\left(\frac{1}{T}\right)$ *és el ideal generat per* $\frac{1}{T}$.

Teorema 30. :
Sigui $P(X) \in K[X]$ *separable. Sigui* $\{\omega_1,\ \cdots\ ,\omega_m\} \subset K$ *el conjunt de les arrels de* P. *Llavors* $P(X)$ *és aditiu si i només si* $\{\omega_1,\ \cdots\ ,\omega_m\}$ *és subgrup.*

Demostració:
Al llibre [3, Goss] capítol 1 *"Aditive Polynomials", com teorema* 1.2.1.

Corol·lari 8. :
Sigui $P(X) \in K[X]$ *verificant les hipòtesis de 30. Llavors* $P(X)$ *és* $\mathbb{F}_q$*-lineal si i nomès si les arrles* W *(pensant-les com a subgrup) de* P *un* $\mathbb{F}_q$*-subespai vectorial de* K.

Demostració:
Només cal provar que W *és un* $\mathbb{F}_q$*-subespai vectorial de* K. *Sigui* $\eta \in \mathbb{F}_q$ *i posem* $H(X) := P(\eta X) - \eta P(X)$. *Sigui* $|W| = q^j$, *llavors* $\deg(P(X)) = q^j$. *Com que* $\eta^{q^i} = \eta$ *podem concloure que* $\deg(H(X)) = q^j$, *pero també,* $H(\omega) = 0$ *per* $\forall \omega \in W$. *Per tant, força que* $H(X) \equiv 0$ *d'on surt el resultat.* $\square$

D.1 Mòduls: petita introducció

En aquesta apèndix rescriurem alguns resultats vist en cursos anteriors (de Galois, estructures algebràiques i àlgebra comutativa) i expandim a altres centrant-nos en $\mathbb{A}$.

Lema 29. Condició de separabilitat:
Sigui $f(X) \in K[X]$ *on* K *cos, llavors sigui* $f'(X) \in K[X]$ *la derivada formal del polinomi, aleshores* $f(X)$ *és separable si i només si* $(f(X), f'(X)) = c$ *on* $c \in K$.

Sigui L/K extensió de grau n, pensem L com un K-espai vectorial l'aplicació K-lineal donada per la multiplicació induïda per la $K-$transformació lineal $l \to \alpha l$ per un $\alpha \in L/K$. Si fixem una base de L com a K-espai vectorial obtenim que l'aplicació lineal té assignada una matriu que denotem per $T_\alpha \in M_n(K)$.

Definició 53. Polinomi característic de α relatiu a K, norma i traça:

$$\chi_{\alpha,L/K}(x) := det(xId_n - T_\alpha)$$

La norma $Nr_{L/K} : L \longrightarrow K$ i la traça $Tr_{L/K} : L \longrightarrow K$ on:

$$Nr_{L/K}(\alpha) = det(T_\alpha)$$

$$Tr_{L/K}(\alpha) = Tr(T_\alpha)$$

On es pot comprovar que no depenen de la tria de la base de L com K-espai vectorial. És fàcil demostrar:

$$Nr_{L/K}(\alpha\beta) = det(T_{\alpha\beta}) = det(T_\alpha) \cdot det(T_\beta) = Nr_{L/K}(\alpha) \cdot Nr_{L/K}(\beta)$$

$$Tr_{L/K}(\alpha + \beta) = Tr(T_\alpha) + Tr(T_\beta) = Tr_{L/K}(\alpha) + Tr_{L/K}(\beta)$$

Proposició 18. :
Per $\alpha \in L$ tenim:

$$\chi_{\alpha,L/K}(X) = m_{\alpha,K}(X)^{[L:K(\alpha)]}$$

on $m_{\alpha,K}(X)$ és el polinomi irreductible de α amb coeficients a K, també denotat per $Irr(\alpha, K)[X]$.

Demostració:
Sigui $s = [L : K(\alpha)]$, i sigui $\beta_1, \cdots \beta_s$ una base de L com a $K(\alpha)$-espai vectorial. Tenim:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{s} K(\alpha)\beta_i$$

Observem que $K(\alpha)\beta_i$ són K-subespais de L i $\alpha-$invariants. Si triem una base $\gamma_1, \cdots, \gamma_t$ de $K(\alpha)$. Llavors $\{\beta_i\gamma_j\}_{1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant t}$ és base de L sobre K. En aquesta base la matriu T_α (la de la $K-$transformació lineal de $\beta \to \alpha\beta$) té estructura de blocs diagonal:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} M_\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & M_\alpha \end{pmatrix}$$

On M_α són matrius $t \times t$ on és l'acció de α actuant sobre la base de $K(\alpha)$, γ_j per $j = 1, \cdots, t$, i per tant $deg\left(\chi_{\alpha,K(\alpha)/K}(X)\right) = [K(\alpha) : K] = deg(m_{\alpha,K}(X))$.
D'on obtenim $\chi_{\alpha,L/K}(X) = \chi^s_{\alpha,K(\alpha)/K}(X)$.
Llavors:

$$deg(\chi_{\alpha,L/K}(X)) = [K(\alpha) : K] = deg(m_{\alpha,K}(X))$$

Ara per . □

Corol·lari 9. :
Tenim per $\alpha \in L$:

$$Nr_{L/K}(\alpha) = (-1)^n m_{\alpha,K}(0)^{[L:K(\alpha)]}$$

Demostració:
Per definició:

$$\chi_{\alpha,L/K}(0) := det(0 \cdot Id_n - T_\alpha) = (-1)^n det(T_\alpha) = (-1)^n Nr_{L/K}(\alpha)$$

i per la proposició 18, $\chi_{\alpha,L/K}(0) = m_{\alpha,K}(0)^{[L:K(\alpha)]}$. □

D.1.1 Moduls sobre anells de polinomis

Els mòduls són la generalització del concepte de $K-$espai vectorial.

Notació 14. *Denotarem un anell commutatiu arbitrari per R.*

Definició 54. $R-$**mòdul en un anell commutatiu:**
Un mòdul sobre un anell R és una generalització del concepte de $K-$espai vectorial (on K és un cos). Definim la següent acció de grup $\cdot : R \times M \longrightarrow M$. Direm que un conjunt M amb estructura de grup abelià amb l'operació suma és un $R-$mòdul si es verifican les següents propietats:

- $(rs)x = r(sx)$
- $(r+s)x = rx + sx$
- $r(x+y) = (rx + ry)$
- $1_R x = x$

On $r, s \in R$ i $x, y \in M$ i 1_R és l'unitat multiplicativa del anell.

Proposició 19. Anell de sèries formals:
Sigui R un anell commutatiu, llavors definim el següent anell:

$$R[[X]] := \left\{ f(X) \in R[X] \ : \ f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right\}$$

on per conveni $X^0 = 1_R$. Les operacions del anell són:

- **suma:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$$

- **producte:**

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right) X^n$$

Un element $f(X) \in R[[X]]$ és unitat si i només si $a_0 \in R^\times$.
Demostració:
Per veure que és unitat trobem de forma recursiva un invers de $f(X)$ amb coefients $a_i \in R$. Sigui $g(X) \in R[[X]]$ (on denotem per $b_i \in R$ els seus coeficients) tal que $f(X) \cdot g(X) = 1$, llavors obtenim el següent sistema d'equacions dels coeficients:

$$a_0 b_0 = 1 \tag{31}$$

Per n fix obtenim:

$$\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} = 0 \tag{32}$$

Per tant aïllant ens queda:

$$b_n = a_0^{-1} \sum_{m=1}^{n} a_m b_{n-m} \tag{33}$$

On la recursivitat surt de que per calcular el coeficient n-èssim necesitem els $n-1$ anteriors. Per tant obtenim el resultat. □

Proposició 20. **:**
Sigui K un cos, llavors $K[[X]]$ és domini d'integritat.

Demostració:
Hem de veure que si multipliquem dos sèries i el producte dóna zero, llavors força que almenys una sigui zero. Sigui $a, b \in K[[X]]$ on $b \neq 0$:

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) = 0$$

Agrupem per grau els coeficients de la sèrie resultant. Pel grau 0 obtenim que $a_0 b_0 = 0$ i per ser K cos força que spdg $a_0 = 0$.
Pel grau 1 obtenim $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ per tant $b_0 a_1 = 0$ força que $a_1 = 0$. Iterant el argument obtindrem que $a_i = 0$ per tot i i en conseqüència $a = 0$. □

Observació 14. *El cos de fraccions de $K[[X]]$ el denotarem per $K((X))$ que contè $K(X)$. Veiem que aquest conjunt és el de les sèries de Laurant.*
Per definició del cos de fraccions si $\alpha \in K((X))$, llavors $\alpha = \dfrac{p(X)}{q(X)}$, ara si definim k com el mínim enter tal que $q_i \neq 0$ i $q_j = 0$ per $j < i$, podem reescriure $q(X) = x^k \sum_{i=k} q_i X^i = p(X)(\tilde{q}(X))^{-1}$ on és invertible a $K[[X]]$ la suma perquè $q_k \neq 0$. Per tant tenim que $\alpha = X^{-k} p(X) \tilde{q}(X))^{-1} = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j X^j$. □

Proposició 21. **:**
Sigui $f(X) \in N[X]$ un polinomi, llavors és separable si i només si $(f, f') = c \in N$ a $N[X]$.

Demostració:
Resultat vist a teoria de Galois.

Corol·lari 10. **:**
Un polinomi f irreductible a $N[X]$ és no separable si i només si $f'(X) = 0$. En particular si $ch(N) = 0$, els polinomis irreductibles a N són separables.
Si $ch(N) = p > 0$ llavors un polinomi irreductible f és separable si i només si $f(X) \neq g(X^p)$ per $\forall g \in N[X] \setminus N$.

Demostració:
Per la propossició 21 si f és irreductible, llavors no és coprimer a f' si i només si f divideix f'. peró com que $deg(f') < deg(f)$ llavors $f \mid f'$ si i només si $f' = 0$. En característica 0, $deg(f') = deg(f) - 1$, i per tant f' no és el polinomi nul. Per $ch(N) = p > 0$, $f'(X) = 0$ si i només si $f(x) = g(X^p)$, perquè si $f(X) = g(X^p)$ llavors la derivada és 0 i per tant no són coprimers i si la derivada és 0, llavors si $f = \sum_{i=0}^{n} X^i a_i$ (on a_i no tots nuls) obtenim que derivant formalment, ens queda $f' = \sum_{i=1} i \cdot a_i X^{i-1} = 0$ per tant, cal que $a_i \cdot i = 0$ per tot $i = 1, \cdots, n$. Per ser un cos, pels $a_i \neq 0$ podem multiplicar pel invers multiplicatiu i ens queda $i = 0$ per tot i, per tant, això força que $p \mid i$ i per tant $i = p \cdot j$ per algún $j \in \mathbb{N}$. Per tant $f = \sum_{j=0} \cdot a_j X^{p \cdot j} = g(X^p)$. □

Proposició 22. **:**
Sigui K cos de $ch(K) = p > 0$. Sigui $f \in K[X]$ irreductibe. Llavors hi ha un únic polinomi separable i irreductible $g(X) \in K[X]$ i un únic $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f(X) = g(X^{p^k})$.

Demostració:
Si $f(X) \in K[X]$ és no separable, pel colorari 10 existeix $f_1(X) \in K[X]$ tal que $f(X) = f_1(X^p)$. Si el polinomi f_1 és no separable, iterant el argument $\exists f_2 \in K[X]$ tal que $f_1(X) = f_2(X^p)$ i per tant $f(x) = f_2(x^p)$. Procedim iterativament fins a que $f(x) = g(x^{p^k})$ per $g \in K[x]$ separable. Si $g(X)$ fós no irreductible, llavors $f(X) = g(X^{p^k}) = h_1(X^{p^k}) \cdot h_2(X^{p^k})$ on això contradiu que f és irreductible, per tant g també és irreductible. □

Definició 55. **: Producte Directe de R-mòduls:**
Siguin $M_1, \cdots, M_r$ una col·lecció finita de R-moduls, llavors el producte directe dels mòduls es defineix com:

$$M_1 \times \cdots \times M_r := \{(m_1, \cdots, m_r) \; : \; m_i \in M_i, 1 \leqslant i \leqslant r\}$$

On és R-mòdul via:

$$a(m_1, \cdots, m_r) := (am_1, \cdots, am_r) \quad \text{on } a \in R$$

També ens podem referir al producte directe com a suma directa on la notació canvia a:

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$$

Definició 56. R**-mòdul lliure:**
Un R-mòdul M és lliure si M és isomorf a R^r per cert $r \in \mathbb{N}$, r s'anomena el rang de M.

Proposició 23. **:**
Un $R-$mòdul lliure M de rang r està únicament determinat pel seu rang. És a fir que dos R-mòduls lliures són isomorfs com a R-mòduls si i només si tenen el mateix rang.

Demostració:
Suposem que $R^m \cong R^n$. Sigui I un ideal maximal de R, llavors:

$$R^n \big/ _{IR^n} \cong (R \big/ _I)^n \cong (R \big/ _I)^m \cong R^m \big/ _{IR^m}$$

Com que els dos quocients dels extrems són isomorfs i són espais vectorials sobre el cos $R/_I$ de dimensió finita, llavors han de tenir la mateixa dimensió, i això succeeix si i només si $n = m$. □

Definició 57. *R-mòdul finitament generat:*
Un R-mòdul M és finitament generat si existeixen $y_1, \cdots, y_r \in M$ tals que per $\forall y \in M$, existeixen $a_{1,y}, \cdots, a_{r,y} \in R$ tals que:

$$y = a_{1,y}y_1 + \cdots + a_{r,y}y_r$$

Teorema 31. **:**
Un $R-$mòdul lliure M ho és si i només si és finitament generat i les $R-$combinacions lineals dels elements que generen M són úniques.

En el cas del teorema 31, $\{y_1, \cdots, y_r\}$ rep el nom de R-base de M.

Definició 58. $R-$**mòdul cíclic:**
Un $R-$mòdul és cíclic si existeix un element $y \in M$ tal que $M = Ry$.

Un R-mòdul

Definició 59. **Annhilator:**
Definim per un R-mòdul i un element de $y \in M$ com el conjunt de valors de R tal que per l'acció sobre M donen zero:

$$Ann_R(y) \ := \ \{r \in R \ : \ ry = 0\}$$

Un resultat interesant és que un R-mòdul M és lliure i cíclic generat per $y \in M$ si i només si el $Ann_R(y) = \{0\}$ (pensat com el ideal zero del anell).

Definició 60. **Elements de Torsió i** R**-mòdul de Torsió:**
Diem que $y \in M$ on M un R-mòdul és de torsió si $ry = 0$ per algun $r \in R$ amb $r \neq 0$.

Denotarem el conjunt d'elements de torsió per el conjunt:

$$M_{tor} \ := \ \{y \in M \ : \ ry = 0, on \ r \in R \setminus \{0\}\}$$

Direm que M és un R-mòdul de torsió si $M = M_{tor}$ i que és lliure de torsió si $M_{tor} = \{0\}$.

Proposició 24. **:**
Sigui N un $A-$mòdul lliure de rang n. Sigui $M \subset N$ un submodul, llavors M és lliure i el rang de M és m amb $m \leqslant n$.

Demostració:
Sigui n el rang de N, si $M = 0$ llavors el rang és 0 i ja està. Sigui $N \neq 0$, fixem una $A-$base que denotem per $e_1, \cdots, e_n$ i la $A-$combinació lineal (les coordenades respecte la base) com el vector $(a_1, \cdots, a_n)$. Considerem $M \subset A^n$ (formalment seria a traves del isomorfisme peró farem un abús de notació).
Sigui I el conjunt d'elements de A on la primera coordenada és un element de M. Com que I és DIP $I = (a)$ per algún $a \in A$. Fixem $y' = (a, a_2, \cdots, a_n) \in M$ i considerem $M' = Ay'$. Sigui M_0 el submodul de M que són els elements amb primera coordenada nul·la. Provarem que $M \cong M' \oplus M_0$:
Si $y = (b_1, \cdots, n_n) \in M$ llavors $a \mid a_1$ i $b_1 = ab$ per algun $a \in A$, per tant $y - by \in M_0$, i per tant $y = y_1 + y_2$ on $y_2 \in M_0$ i $y_1 \in M'$. A més aquesta representació és única ja que si $y = y_1 + y_2 = y_1' + y_2'$ llavors $y_1 - y_1' = y_2 - y_2'$ on aquestes diferencies són de l'intersecció de $M_0 \cap M' = \{0\}$, d'on surt l'unicitat de la representació i obtenim que $M \cong M' \oplus M_0$.
Observem que M' és un $A-$mòdul lliure de rang 1. Si $n = 1$ llavors $M = M'$ sino fem inducció. Sigui $n = rang(N) > 1$ i per hipòtesis d'inducció Suposem cert per $rang(N) \leqslant n - 1$ i que $M_0 \subset N_0 \cong \mathbb{R}^{n-1}$ on N_0 submodul de N amb primera coordenada nul·la. Tenim que M_0 és lliure de rang $\leqslant n - 1$. Llavors $M \cong M' \oplus M_0$ és lliure de rang $\leqslant 1 + n - 1$, tal i com voliem. □

Proposició 25. :
Sigui N un $A-$mòdul lliure de rang n i $M \subset N$ un submòdul lliure de rang m. Llavors existeix una $A-$base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de N tal que $\{a_1e_1, \cdots, a_me_m\}$ és una $A-$base de M per $a_i \in A$ no nuls tals que verifiquen $a_1 \mid \cdots | a_m$.

Teorema 32. Descomposició de $A-$mòduls finits:
Un $A-$mòdul finitament generat M és isomorf a la suma directa següent:

$$M \cong A^{\oplus r} \oplus A \diagup_{(a_1)} \oplus \cdots \oplus A \diagup_{(a_m)}$$

on $r \geqslant 0$ és un enter i $m = 0$ o $a_1 \mid \cdots | a_m$ amb $a_i \in A$ i tots de grau possitiu.

El enter r rep el nom de rang de M i els a_i són els factors invariants de M on els escollim mònics.

Demostració:
Al llibre [8, Papikian] hi ha la prova formal.

Observació 15. :
En general M_{tor} no és submodul i encara que ho sigui, no té perquè existir un $M' \subset M$ tal que $M \cong M_{tor} \oplus M'$. Per ilustrar això resolem el següent exercici del llibre [8, Papikian]:

- *Sigui $R = \mathbb{Z} \diagup_{pq\mathbb{Z}}$ on $p, q \in \mathbb{P}$ i $p \neq q$. Sigui $M = R$. Determinar el grup de torsió i veure que no és submodul.*

  En aquest cas es veu que el grup de torsió és $M_{tor} = \{0, pM, qM\}$, per tant si fós submodul verificaria les propietats de ser $R-$mòdul però clarament no verifica ser tancat ja que, $p + q \notin M_{tor}$ peró $p, q \in M_{tor}$. Un exemple d'això és per $p = 2$ i $q = 3$, el grup de torsió és $\{0, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}\}$ i $2 + 3 = 5 \notin M_{tor}$. En general $pq \nmid p + q$, $p \nmid p + q$ i $q \nmid p + q$, per tant no està contingut en el mòdul de torsió tot i ser suma d'elements del mòdul.

- *Sigui $R = \mathbb{Z} \diagup_{p^n\mathbb{Z}}$ per $n \geqslant 2$ on $M = R$, provar que M_{tor} és submòdul de R peró no existeix cap $M' \subset M$ submòdul tal que $M = M_{tor} \oplus M'$.*

  Podem veure fàcilment que $M_{tor} = \{0,\ p\mathbb{Z}, p^2\mathbb{Z}, \cdots\ p^{n-1}\mathbb{Z}\}$ on clarament, la suma d'elements de M_{tor} és de M_{tor}, ja que si $x = p^i w_1$ i $y = p^j w_2$ on $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$, la seva suma és $p^{min(i,j)} \left(p^{\frac{i}{min(i,j)}} w_1 + p^{\frac{j}{min(i,j)}} w_2 \right) \in M_{tor}$. Les propietats que verifican els mòduls són directes perquè com que el anell i el mòdul són el mateix, hereda les propietats del producte del anell.

  Ara per veure que no existeix el M', Suposem que si, llavors $p - 1$ i 1 han de ser elements de M' perquè no pertanyen a M_{tor} i per estar en suma directe han de estar a M'. Això porta a contradicció amb el fet de que $p - 1 + 1 = p \in M_{tor}$ i per tant M' no té estructura de grup abelià contradient el fet de ser mòdul. $\square$

D.2 Funció ζ_q de Carlitz-Goss: Resultats extra

Aquest resultat permet provar un resultat general de la funció ζ_q sobre els enters que ens ajuda a demostrar la convergència de la sèrie, com a funció en un anàleg del pla complex en característica positiva.

Definició 61. :
Definim el següent grup additiu:

$$S_\infty = \mathbb{C}_\infty^\times \times \mathbb{Z}_p$$

amb l'operació $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1y_1, y_1 + y_2)$. S_∞ té una còpia injectiva de $\mathbb{Z}$ a través de l'aplicació $n \to (T^n, n)$.

Proposició 26. :
Sigui $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, W un $\mathbb{F}_q-$espai vectorial de dimensió finita d sobre amb un $W \subset F$, F cos. Si agafem $f \in F \backslash W$, si $d > \dfrac{l_q(k)}{q-1}$ (on $l_q(k) = M$ on M és el superíndex de la q-espresió de $k = \sum_{i=0}^M k_i q^i$ amb $k_M \neq 0$), llavors:

$$\sum_{w \in W} (f + w)^k = 0$$

Demostració:
Provarem 3 casos on la suma s'anul·la:

- *Si $d > k$:*
  Sigui $\{w_i\}_{i=0}^d$ una $\mathbb{F}_q$−base de W, aleshores aplicant el teorema multinomial:

$$\begin{aligned}(f+w)^k &= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}(f+\lambda_1w_1+\cdots+\lambda_dw_d)^k\\ &= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}\sum_{i_0+\cdots+i_d=k}\binom{k}{i_1,\cdots,i_d}f^{i_0}\cdot(\lambda_1w_1)^{i_1}\cdot\cdots\cdot(\lambda_dw_d)^{i_d}\end{aligned}$$

  La suma està formada per múltiples de $\lambda_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot\lambda_d^{i_d}$, peró per ser $d > k$ en cada terme sempre hi ha algun i_j nul perquè $i_1+\cdots+i_d \leqslant k$. Si apliquem la suma sobre λ_j estem sumant el següent (on spdg suposem $i_1 = 0$):

$$\begin{aligned}(f+w)^k &= \sum_{i_0+\cdots+i_d=k}\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}\binom{k}{i_1,\cdots,i_d}f^{i_0}\lambda_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot\lambda_d^{i_d}w_1^{i_1}\cdots\cdot w_d^{i_d}\\ &= \sum_{i_0+\cdots+i_d=k}\sum_{\lambda_2,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}\sum_{\lambda_1\in\mathbb{F}_q}\binom{k}{i_1,\cdots,i_d}f^{i_0}\lambda_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot\lambda_d^{i_d}w_1^{i_1}\cdots\cdot w_d^{i_d}\\ &= \sum_{i_0+\cdots+i_d=k}\sum_{\lambda_2,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}\left(\binom{k}{i_1,\cdots,i_d}f^{i_0}\lambda_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot\lambda_d^{i_d}w_1^{i_1}\cdots\cdot w_d^{i_d}\cdot\underbrace{\left(\sum_{\lambda_1\in\mathbb{F}_q}1\right)}_{=q}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

- *Si $d > l_q(k)$:*
  Per aquest cas utilitzarem el lema 23 que aplicant-ho:

$$\begin{aligned}(f+w)^k &= \prod_{t=0}^{M}\left(f^{q^t}+\lambda_1^{q^t}w_1^{q^t}+\cdots+\lambda_d^{q^t}w_d^{q^t}\right)^{k_t}\\ &= \prod_{t=0}^{M}\left(f^{q^t}+\lambda_1w_1^{q^t}+\cdots+\lambda_dw_d^{q^t}\right)^{k_t}\end{aligned}$$

  ja que $\lambda_i^q = \lambda$. Al producte $\left(f^{q^t}+\lambda_1w_1^{q^t}+\cdots+\lambda_dw_d^{q^t}\right)^{k_t}$ hi ha com a molt k_t termes sumant i per tant el producte d'ells té com a molt $\sum_{i=0}^M k_t := l_q(k)$ amb lambdes multiplicant, que per ser $d > l_q(k)$ i pel cas anterior $\sum_{w\in W}(f+w)^k$ suma zero.

- *Si $d > \dfrac{l_q(k)}{q-1}$:*
  Pel lema 24, $\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\lambda^i = 0$ si $q-1\nmid i$, per tant si expandim la suma

$$\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_d\in\mathbb{F}_q}\prod_{t=0}^{M}\left(f^{q^t}+\lambda_1w_1^{q^t}+\cdots+\lambda_dw_d^{q^t}\right)^{k_t}$$

  pel teorema multinomial (teorema 29) estem sumant termes múltiples de $\lambda_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot\lambda_d^{i_d}$ amb $i_1+\cdots+i_d \leqslant l_q(k) < d(q-1)$ (per hipòtesis). Per tant sempre hi ha un i_j que no és divisible per $q-1$ i al aplicar la suma respecte λ_j obtindrem 0 d'on surt el resultat. □

Ara definirem com s'extèn un número combinatori a $\mathbb{Z}_p$:

Definició 62. **Números combinatoris a $\mathbb{Z}_p$:** *Sigui $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, llavors definim per $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ i $\alpha_k = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i \in \mathbb{Z}$:*

$$\binom{\alpha_k}{j} = \frac{\alpha_k \cdot (\alpha_k - 1) \cdot \ \cdots \ \cdot (\alpha_k - j + 1)}{j!} \in \mathbb{Z}$$

Que és el número combinatoris usual de $\mathbb{Z}$. Aquests números combinatoris si fem límit a $k \to \infty$ tendeixen a $\binom{\alpha}{j}$ que és:

$$\binom{\alpha}{j} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \ \cdot \ \cdots \ \cdot (\alpha - j + 1)}{j!} \in \mathbb{Q}$$

Per veure que $\binom{\alpha}{j} \in \mathbb{Z}_p$ provem que la succesió $\binom{\alpha_k}{j} \in \mathbb{Z}$ és de Cauchy utilitzant que $\mathbb{Z}_p$ és la completació respecte la valoració p-àdica de $\mathbb{Z}$.

Utilitzem que $\alpha_{k+1} = a_{k+1}p^{k+1} + \alpha_k$ i com que

$$\begin{aligned}
\left|\binom{\alpha_{k+1}}{j} - \binom{\alpha_{k+1}}{j}\right| &= \left|\frac{1}{j!} \cdot \left((\alpha_k + \alpha_{k+1}p^{k+1}) \underbrace{(\alpha_k + a_{k+1}p^{k+1} - 1) \cdot \ \cdots \ \cdot (a_k - j + 1 + a_{k+1}p^{k+1})}_{B_1}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{j!} \cdot (\alpha_k B_1 + \alpha_{k+1}p^{k+1}B_1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{j!} \cdot (\alpha_k B_2(\alpha_k + \alpha_k p^{k+1} - 1) + \alpha_{k+1}p^{k+1}B_1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{j!} \cdot (\alpha_k(\alpha_k - 1)B_2 + \alpha_{k+1}p^{k+1}(B_1 + \alpha_k B_2))\right| \\
&= \left|\frac{1}{j!} \cdot (\alpha_k(\alpha_k - 1)(\alpha_k - 1)B_3 + \alpha_{k+1}p^{k+1}(B_1 + \alpha_k B_2 + \alpha_k(\alpha_k - 2)B_3)\right|
\end{aligned}$$

on $B_i = (\alpha_k + \alpha_{k+1}p^{k+1} - i) \cdot (\alpha_k + \alpha_{k+1}p^{k+1} - i - 1) \ \cdots \ (\alpha_k + \alpha_{k+1}p^{k+1} - j + 1)$ per $i = 1, \ \cdots \ , k - j + 1$. Tambè els podem pensar com $B_i = (\alpha_k + \alpha_k p^{k+1} - i)B_{i-1}$.
iterant el argument:

$$\left|\frac{1}{j!} \cdot \left(\alpha_k(\alpha_k - 2) \ \cdots \ (\alpha_k - j + 1) + \underbrace{\alpha_{k+1}\left(B_1 + \sum_{l=2}^{k-j+1} \prod_{m=0}^{l-2} \alpha_{k-m} B_l\right)}_{:=u' \in \mathbb{Z}_p} p^{k+1}\right)\right| = \left|\binom{\alpha_k}{j} + p^{k+1}u\right|$$

On $u = \frac{u'}{j!}$.
Per tant hem obtingut $\binom{\alpha_{k+1}}{j} = \underbrace{\binom{\alpha_k}{j}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{p^{k+1}u}_{\in \mathbb{Z}_p}$ per tant és de Cauchy ja que p^m té valor absolut molt petit per m prou gran.

Definició 63. **:**
Sigui $a \in \mathcal{A}^+$ (un polinomi mónic):

$$< a > := aT^{-deg(a)}$$

Observem que $< a >$ és de la forma $1 + a_{d-1}T^{-1} + \ \cdots \ + a_0 T^{-deg(a)}$ i per tant:

$$< a > \equiv 1 \ _{mod \ T^{-1}}$$

i $v_\infty(< a >) = 0$.

Ara podem exponenciar a S_∞:

Definició 64. Exponenciació de polinomis mònics:
Sigui $z = (z_1, z_2) \in S_\infty$ *i* $a \in \mathcal{A}^+$*, definim elevar* a *a la potència* z *com* $a^z := a^{(z_1,z_2)} := z_1^{deg(a)} < a >^{z_2}$ *on:*

$$< a >^{z_2} := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{z_2}{j} (< a > -1)^j$$

que està ben definit perquè $< a >$ *és* 1 *mòdul* T^{-1}*. Observem que* $\binom{z_2}{j}$ *és l'extensió dels nombres convinatoris a* $\mathbb{Z}_p$*.*

Ara veiem que operar amb exponenciar polinimis mónics és anàleg al complex:

Proposició 27. :
Siguin $a, b \in \mathcal{A}^+$ *i* $z = (z_1, z_2) \in S_\infty$*, aleshores* $(ab)^z = a^z b^z$*.*

Siguin $z, w \in S_\infty$ *i* $a \in \mathcal{A}^+$*, aleshores* $a^{z+w} = a^z b^w$

Demostració:
Tenim $deg(ab) = deg(a) + deg(b)$*, i* $< ab >=< a >< b >$*, llavors* $(ab)^z := z_1^{deg(ab)} < ab >^{z_2} = z_1^{deg(a)} z_1^{deg(b)} < a >^{z_2} < b >^{z_2} := a^z b^z$*.*

Per l'altre, utilitzem l'operació aditiva de S_∞*, llavors* $a^{z+w} := a^{(z_1 w_1, z_2 + w_2)} := (z_1 \cdot w_1)^{deg(a)} < a >^{z_2} < a >^{w_2} := a^z a^w$*.* $\square$

Referències

[1] F. Bars, *Una solució a una pràctica de Teoria de Galois*, Departament del Grau de Matemàtiques, UAB, (1997), p. 5. Accesible a https://mat.uab.cat/~francesc/mates/numtras.pdf.

[2] L. Denis, *Indépendance algébrique et exponentielle de carlitz*, Acta Arithmetica, 69 (1995), pp. 75–89. Accesible a http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa69/aa6916.pdf.

[3] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebeite. 3. Folge, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[4] F. Gouvea, *p-adic Numbers: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[5] M. Greenberg and J. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1995. Accesible a https://books.google.es/books?id=DAxlMdw_QloC.

[6] E. F. R. J J O'Connor, *Leonard carlitz*, 2015. Accesible a https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Carlitz/.

[7] S. Mayer, *The Transcendence of* π , University of Warwick, (2006), p. 6. Accesible a https://sixthform.info/maths/files/pitrans.pdf.

[8] M. Papikian, *Títol per determinar*, to appear soon, book series AMS, private copy.

[9] M. Spivak, *Calculus*, Calculus, Cambridge University Press, 2006. Accesible a https://books.google.es/books?id=7JKVu_9InRUC.

[10] D. Thakur, *Function Field Arithmetic*, World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2004. Accesible a https://books.google.rw/books?id=W7qqtQEACAAJ.

[11] L. I. Wade, *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$, Duke Mathematical Journal, 8 (1941), pp. 701 – 720. Accesible a https://doi.org/10.1215/S0012-7094-41-00860-8.

[12] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic* p, Annals of Mathematics, 134 (1991), pp. 1–23. Accesible a http://www.jstor.org/stable/2944331.