Universitat Autònoma de Barcelona

Treball de fi de grau

Aspectes de la funció zeta de Carlitz-Goss i els seus zeros

Autor: Ferran Arnau Segarra
Tutor: Francesc Bars Cortina

26 de juny de 2024

Índex

1 Introducció

Els nombres primers i la seva distribució sobre la recta real han estat font de grans quantitats d'idees i teories amb l'objectiu d'intentar descobrir aquesta distribució. Qui sembla haver estat més aprop de solucionar aquest problema és el matemàtic alemany Bernhard Riemann (1826-1866), qui en l'any 1859 va enunciar el que avui dia es coneix com la Hipòtesi de Riemann. Aquesta hipòtesi estipula que els zeros de la funció zeta de Riemann amb part imaginària no nul·la tenen part real igual a $\frac{1}{2}$, on la funció zeta de Riemann és l'extensió analítica a tot el pla complex del que prèviament era la funció zeta d'Euler definida com

$$\zeta_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

A dia d'avui segueix sent un problema obert ja que ningú ha estat capaç de provar-la, però això no vol dir que no hi hagin hagut intents, i moltes vegades aquests intents passen per canviar completament el context original del problema, i intentar traslladar-ho a un altre on s'estigui més còmode.
Aquest treball justament tracta un d'aquests canvis de paradigma, proposat inicialment pel matemàtic Leonard Carlitz (1907-1999) i refinat pel matemàtic David Goss (1952-2017), en el que es vol traslladar la funció zeta de Riemann a un entorn amb característica positiva cosa que en el context dels cossos això automàticament implica característica igual a un nombre primer.
Aquest canvi de paradigma porta a un equivalent de la Hipòtesi de Riemann que resulta ser demostrable, al contrari de la versió del cas complex.

Així doncs el nostre objectiu serà desenvolupar tota la teoria necessària per poder arribar a un anàleg de la funció ζ de Riemann, la funció zeta de Carlitz-Goss, on en comptes d'un n natural volem posar-hi un polinomi amb coeficients a un cos de característica positiva. Per fer-ho, partirem d'un cos $\mathbb{F}_q$ amb característica p positiva, amb p primer, i de cardinalitat $q = p^n$, i considerarem el seu anell de polinomis $\mathbb{F}_q[T]$ i el seu cos de fraccions, $\mathbb{F}_q(T)$. A partir d'aquesta base, construirem el domini que tindrà la funció zeta de Carlitz-Goss perquè en primer lloc tingui sentit plantejar-se un anàleg de la funció zeta de Riemann. Després intentarem definir propietats similars a la funció zeta de Riemann per la nostra nova funció zeta i per últim tractarem els zeros de la funció zeta de Carlitz-Goss. En concret, ens preguntarem quin seria l'equivalent de la Hipòtesi de Riemann en el nou domini que hem construït i la demostrarem.

2 Valoracions i anàlisi no arquimediana

2.1 Valoracions i el valor absolut associat a una valoració

Aquesta secció servirà per introduir el concepte de les valoracions, que són clau per desenvolupar l'anàlisi arquimediana que serà amb la que treballarem en aquest treball.

Definició 2.1. *Sigui K un cos de característica arbitrària. Una valoració és una aplicació $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que per a tot $x, y \in K$ compleix,*

1. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Sigui 1 l'element neutre per la multiplicació de K, llavors observem que per *2.* obtenim que $v(1) = 0$.
Si una valoració té com a imatge un conjunt isomorf als enters, diem que és una valoració discreta.
Una valoració pot induir a una mètrica definint el següent valor absolut.

Definició 2.2. *Sigui α un real positiu amb $|\alpha| < 1$. Podem obtenir un valor absolut definint $|\cdot|_v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ on $|x|_v = \alpha^{v(x)}$*

Es pot comprovar fàcilment que $|\cdot|_v$ compleix

1. $|x|_v = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy|_v = |x|_v|y|_v$

A més degut a les propietats de les valoracions es compleix

$$|x + y|_v \leq \max |x|_v, |y|_v$$

més coneguda com propietat ultramétrica. Efectivament es té

$$|x + y| = \alpha^{-v(x+y)} \leq \alpha^{-\min\{v(x),v(y)\}}$$

però això últim és el mateix que $\max\{\alpha^{-v(x)}, \alpha^{-v(y)}\}$, és a dir $\max\{|x|_v, |y|_v\}$ i ja tenim el que volíem.
Aquesta propietat és la versió forta de la desigualtat triangular del valor absolut. Els valors absoluts que compleixen aquesta última propietat s'anomenen valors absoluts no arquimedians (per contra els que compleixen la desigualtat triangular s'anomenen arquimedians). Es pot veure que sota el supòsit que $|\alpha| < 1$, la topologia determinada per un valor absolut definit com en la Definició 2.2, no depèn de la constant α que s'esculli (Per més detalls consultar capítol 2 de [6]). Com a exemple podem considerar la valoració p-àdica v_p, p nombre primer fix. Aquesta valoració va de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$ i es defineix tal que sigui $x \in \mathbb{Q}$, llavors $v_p(x) = n$ on n és el màxim enter en valor absolut tal que es compleix $x = p^n x'$,

x' racional amb el numerador i denominador coprimers amb p. Aquesta valoració dona lloc al valor absolut $|\cdot|_p := |\cdot|_{v_p}$, que s'anomena valor absolut p-àdic.

Tota anàlisi desenvolupada amb un valor absolut no arquimedià s'anomena anàlisi no arquimediana i en alguns aspectes presenta certes avantatges sobre l'anàlisi arquimediana.

Proposició 2.1. *Sigui $(a_i)_0^\infty$ una successió d'elements d'un cos K. Llavors $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeix a un element de K si i només si $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.*

En la proposició anterior $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ s'entén usant $|\cdot|_v$. La demostració de la implicació directa és igual que en anàlisi arquimedià mentre que l'altre implicació és fa utilitzant la propietat ultramètrica.
Notem que un enunciat equivalent a aquesta proposició podria ser que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergeix a un element de K si i només si $v(a_j) \to \infty$.

2.2 Completacions respecte una valoració

Parlarem ara de les completacions. Un cos amb un valor absolut $|\cdot|_K$ és complet si tota successió de Cauchy respecte $|\cdot|_K$ convergeix al cos. Per comprovar si una successió és de Cauchy o no en el context de l'anàlisi no arquimedià és suficient veure que la distància de termes consecutius tendeix cap a zero, ja que si $|x_n - x_{n+1}|_v < \epsilon$ a partit d'un cert N natural llavors per la propietat ultramètrica tenim

$$|x_n - x_{n+m}|_v = |\sum_{k=0}^{m-1}(x_{n+k} - x_{n+k+1})|_v \leq \max_{k=0,\dots m-1}\{|x_{n+k} - x_{n+k+1}|_v\} < \epsilon.$$

(L'altre implicació sería evident).
La idea rere el concepte de completació d'un espai mètric M és la del cos més petit que conté tots els límits de successions de Cauchy de M. El següent resultat caracteritza la completació d'un cos donant les propietats bàsiques que ha de complir respecte del cos que completa.

Teorema 2.1. *Sigui K un cos amb un cert valor absolut $|\cdot|_K$. Existeix un cos que denotarem per $\hat{K}$ amb un valor absolut $|\cdot|_{\hat{K}}$ complint*

1. *$\hat{K}$ és complet amb $|\cdot|_{\hat{K}}$*
2. *$\hat{K}$ conté K i per a tot $x \in K$, $|x|_{\hat{K}} = |x|_K$*
3. *K és dens a $\hat{K}$*
4. *Si $(\hat{K_1}, |\cdot|_{\hat{K_1}})$ i $(\hat{K_2}, |\cdot|_{\hat{K_2}})$ són dos cossos complint les propietats anteriors, existeix un únic isomorfisme de cossos $\phi : \hat{K_1} \to \hat{K_2}$ que coincideix amb la identitat sobre K i $|\phi(x)|_{\hat{K_2}} = |x|_{\hat{K_1}}$*

Per una demostració completa consultar en [5, p.6]

Definició 2.3. *Anomenem completació de* $(K, |\cdot|_K)$ *a la parella* $(K_2, |\cdot|_{K_2})$ *que compleix les propietats enunciades pel teorema anterior respecte un cos* K *i el seu valor absolut* $|\cdot|_K$*. Habitualment denotem la completació de* K *senzillament amb* $\hat{K}$*.*

Observem que pel punt 4 del Teorema anterior ens assegura que $\hat{K}$ és únic llevat d'un isomorfisme que respecti el valor absolut, és a dir d'una isometria de cossos. Un exemple de completació respecte d'un valor absolut no arquimedià seria la completació de $\mathbb{Q}$ amb el valor absolut que hem vist abans, $|\cdot|_p$, que denotem per $\mathbb{Q}_p$, i es pot comprovar que correspon al cos de sèries de Laurent de p amb coeficients a $\mathbb{Z}$ mòdul p.

2.3 Clausura algebraica d'una completació respecte una valoració

Anomenem clausura algebraica d'un cos K al cos més petit que conté K tal que tots els polinomis de grau 1 amb coeficients a K tenen arrel a aquest cos. És sabut que tot cos te clausura algebraica i aquesta és única llevat d'isomorfisme que fixa cada element de K. El següent resultat ens serà útil més endavant.

Proposició 2.2. *Sigui* K *un cos complet amb una valoració* v*. Sigui* $\overline{K}$ *la seva clausura algebraica que compta amb la extensió canònica de* v*. Sigui* $\hat{\overline{K}}$ *la seva completació respecte de* v*. Llavors* $\hat{\overline{K}}$ *segueix sent algebraicament tancat.*

Dem. Sigui $P(x) = \sum_{j=0}^{t} \beta_j x^j \in \hat{\overline{K}}[x]$ amb $\beta_t = 1$. És suficient veure que $P(x)$ té una arrel a $\hat{\overline{K}}$. Sigui L un cos que conté $\hat{\overline{K}}$ i una arrel α de $P(x)$. Dotem L de l'extensió canònica de v. Com que $\overline{K}$ és dens a $\hat{\overline{K}}$ (Teorema 2.1) podem escollir un $\delta_n > 0$ tal que existeixi un polinomi $P_1(x) = \sum_{j=0}^{t} \hat{\beta}_j x^j \in \overline{K}[x]$ amb $\delta_n < \min_j\{v(\beta_j - \hat{\beta}_j)\}$, i com que β_j i $\hat{\beta}_j$ poden estar tant aprop com vulguem amb $|\cdot|_v$, podem fer que δ_n sigui tant gran com un vulgui. En particular podem imposar que $n < \delta_n$. Per altra banda es té

$$P_1(\alpha) = P_1(\alpha) - P(\alpha) = \sum_{j=0}^{t} (\hat{\beta}_j - \beta_j)\alpha^j.$$

Siguin $\{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$ les arrels de $P_1(x)$ a $\overline{K}$ de tal manera que $P_1(x) = \prod(x - \alpha_j)$. Per tant tenim la següent igualtat

$$\prod(\alpha - \alpha_j) = \sum_{j=0}^{t} (\hat{\beta}_j - \beta_j)\alpha^j.$$

Sigui $\omega = \min_j\{v(\alpha^j)\} = \min_j\{jv(\alpha)\}$. Aplicant la v als dos costats obtenim

$$\sum_{j=1}^{t} v(\alpha - \alpha_j) > \delta_n + \omega.$$

En particular per algun j_n concret tenim

$$v(\alpha - \alpha_{j_n}) > \frac{\delta_n + \omega}{t}.$$

Si ara considerem la successió definida per $a_n = \alpha_{j_n}$ per $n \geq 0$, obtenim que $|\alpha - a_n|_v \to 0$ quan $n \to \infty$. Per tant hem construït una successió de Cauchy a $\overline{K}$ que convergeix a α. Per tant $\alpha \in \hat{\overline{K}}$. $\square$

Un es pot preguntar com s'estén una valoració de K a la seva corresponent clausura algebraica. El següent resultat es pot utilitzar per respondre aquesta pregunta.

Proposició 2.3. *Sigui L/K una extensió finita de K, on K és complet respecte una valoració v. Llavors v s'estén de forma única a L, és a dir, llevat d'isomorfisme existeix una única valoració v_L de L tal que $v_{L_{|K}} = v$. Anomenem v_L (o senzillament v si el context és clar) l'extensió canònica de v a L.*

Un pot anar més enllà i gràcies a aquest resultat es pot donar una extensió única d'una valoració v a la clausura algebraica del seu cos corresponent a la que també anomenarem extensió canònica. Si en la proposició anterior també suposem que v és una valoració discreta a més obtenim que L també és complet respecte de v (consultar capítol 2 de [9]).
La demostració de Proposició 2.3 és constructiva i és pot consultar, juntament amb l'argument per estendre v a $\overline{K}$, a [6, p.36]

3 El cos $\mathbb{C}_\infty$

3.1 L'anell $\mathbb{F}_q[T]$

Denotem $\mathbb{F}_q[T]$ per A i al seu cos de fraccions per K. Els elements de $\mathbb{F}_q$ compleixen la següent propietat que ens serà útil.

Proposició 3.1. *Sigui m un enter positiu. Considerem la suma*

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^m.$$

Llavors la suma anterior s'anul·la si $q-1$ no divideix m, i és igual a -1 quan si que ho fa.

La demostració es pot consultar en la secció A.3 de l'Annex.
Els següents elements relacionats amb A seran útils més endavant.

Definició 3.1. *per a tot $k > 0$ natural, definim*

1. $[k] := T^{q^k} - T \in A$
2. $D_0 = 1$ *i*
$$D_k := [k][k-1]^r \cdots [1]^{r^{k-1}}$$
3. $L_0 = 1$ *i*
$$L_k := [k][k-1] \cdots [1]$$

Els elements de la Definició 3.1 tenen propietats bastant interessants, com deg $[k] = q^k$, deg $L_k = q\frac{q^k-1}{q-1}$ i deg $D_k = kq^k$ i les seves valoracions corresponen als negatius d'aquests nombres. S'utilitzen entre altres coses per definir l'exponencial de Carlitz, una funció que vol ser l'anàleg de la funció exponencial del cas clàssic al cos $\mathbb{C}_\infty$ (cos que de moment no coneixem). Per més detalls consultar la secció A.1 de l'Annex.

3.2 Construcció de $\mathbb{C}_\infty$

Per poder desenvolupar la teoria analítica, dotarem K amb la següent valoració.

Definició 3.2. *Definim v_∞ una valoració en K via:*

1. $v_\infty(0) = \infty$
2. $v_\infty(f/g) = -(deg(f) - deg(g))$ *per* $f, g \in A$, $f/g \neq 0$

No és difícil veure que v_∞ és una valoració que va de $\mathbb{F}_q(T)$ a $\mathbb{Z}$, i per tant és una valoració discreta. Observem que com estem en característica p, el fet que $v_\infty(1) = 0$ determina el valor de v_∞ sobre elements de $\mathbb{F}_q$: sigui $\alpha \in \mathbb{F}_q$, llavors $\alpha^{q-1} = 1$ i per tant $v_\infty(\alpha^{q-1}) = v_\infty(1)$. És a dir $(q-1)v_\infty(\alpha) = v_\infty(1)$. D'aquí deduïm que per $\alpha \in \mathbb{F}_q$ es té que $v_\infty(\alpha) = 0$.

Amb aquesta valoració obtindrem el seu corresponent valor absolut, $|\cdot|_{v_\infty}$, definit com en la Definició 2.2 amb $\alpha = \frac{1}{p}$.

Definició 3.3. *Denotem*[1] *per M el conjunt*

$$M := \{x \in K | |x|_{v_\infty} \leq 1\}$$

És en aquest punt que pel Teorema 2.1 podem considerar la completació de $(K, |\cdot|_{v_\infty})$ i la denotarem per $(K_\infty, |\cdot|_{\hat{v}_\infty})$. Qui és exactament K_∞ i com són els seus elements?

Lema 3.1. *Donat $a \in K_\infty$, existeix una successió $(c_n)_m^\infty$ amb $c_n \in \mathbb{F}_q$ per a tot n, tal que $a = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (\frac{1}{T})^n$.*[2]

És a dir $K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$, o el cos de sèries formals de Laurent amb coeficients a $\mathbb{F}_q$. En quant a $|\cdot|_{\hat{v}_\infty}$ serà senzillament la extensió continua de $|\cdot|_{v_\infty}$.
Aquest cos que acabem de construir seria el més semblant a $\mathbb{R}$ en el cas clàssic. Ara ens agradaria construir un cos semblant a $\mathbb{C}$. Amb aquest objectiu considerem la clausura algebraica de K_∞. Observem que en el cas de $\mathbb{Q}$ i $|\cdot|$ el valor absolut usual, $\hat{\mathbb{Q}}$ és $\mathbb{R}$. Si ara fem la clausura algebraica de $\mathbb{R}$, en surt $\mathbb{C}$ que ja és complet. Això és degut a que si la clausura algebraica és una extensió finita d'un cos complet respecte un valor absolut arquimedià, llavors aquesta segueix sent completa. En el cas de valors absoluts no arquimedians, no hi ha cap instància en que això estigui garantit i de fet en el cas de $\mathbb{F}_q(T)$, $\hat{\overline{\mathbb{F}_q(T)}}$ no és complet. Per tant també fem la seva completació. A aquest cos nou li diem $\mathbb{C}_\infty$. Per la Proposició 2.2, $\mathbb{C}_\infty$ és algebraicament tancat.
El primer problema amb el que ens trobem quan volem treballar en $\mathbb{C}_\infty$ és que no pot fer el paper semblant al de $\mathbb{C}$ ja que coses tant bàsiques com l'exponenciació d'elements de A per elements de $\mathbb{C}_\infty$ no estan definides. Necessitarem alguna cosa més que $\mathbb{C}_\infty$ per poder seguir amb el nostre objectiu.

[1] Per un cos K general amb la seva corresponent valoració v, a aquest conjunt també se'l coneix com *ring of integers* de K.

[2] La demostració d'aquest fet seria anàloga a la que un faria en l'exemple posat en l'apartat anterior per veure que $\mathbb{Q}_p$ és el cos de sèries de Laurent de potències enteres de p i coeficients a $\mathbb{Z}$ mòdul p.

4 El pla S_∞

En el cas de la funció Zeta de Riemann, té sentit considerar n^z, n natural i z complex, ja que si $z = x + iy$, $n^z = e^{log(n)x}e^{log(n)yi}$, on a més $|n^z| = |e^{log(n)x}|$ ja que $|e^{log(n)yi}| = 1$. Per solucionar el problema de l'exponenciació busquem fer quelcom similar en el nostre context.

Definició 4.1. *Definim S_∞ com*

$$S_\infty := \mathbb{C}_\infty^* \times \mathbb{Z}_p$$

El conjunt anterior amb l'operació $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + y_2)$ té estructura de grup i és un grup topològic amb la topologia producte usual.
S_∞ és el que fa el paper de pla complex en el nostre context.
Sigui x un nombre enter positiu i k enter. Per $k > 0$ definim

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[x]$$

per k negatius, $\binom{x}{k} := 0$ i per $k = 0$ definim $\binom{x}{0} = 1$. Si en comptes de x enter considerem $x \in \mathbb{Z}_p$ obtenim una funció de $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{Z}_p$. D'ara endavant aquesta serà la definició de $\binom{x}{k}$ per un element x de $\mathbb{Z}_p$. D'altre banda $\binom{x}{k}_p$ amb $x \in \mathbb{Z}_p$ denotarà el resultat de $\binom{x}{k}$ mòdul p.
Sigui $\alpha = a_0 + a_1T + ... + T^n$ un polinomi mònic de A. Definim $\langle\alpha\rangle := 1 + a_{n-1}T^{-1} + ... + a_0T^{-n} = \alpha T^{-deg(\alpha)}$.

Definició 4.2. *Sigui α mònic de A, i sigui $s = (x, y) \in S_\infty$, llavors definim*

$$\alpha^s := x^{deg(\alpha)}\langle\alpha\rangle^y = x^{-v_\infty(\alpha)}\langle\alpha\rangle^y$$

Observem que $\langle\alpha\rangle^y = (\langle\alpha\rangle - 1 + 1)^y = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{y}{j}_p(\langle\alpha\rangle - 1)^y$ convergeix sempre ja que $\langle\alpha\rangle \equiv 1 \pmod{T^{-1}}$ i per tant el valor absolut del terme general tendeix a 0.
A més $|\langle\alpha\rangle^s|_\infty = |x^{deg(\alpha)}|_\infty$ amb $|\langle\alpha\rangle^y|_\infty = 1$, de forma similar al que passava en el cas complex.
Observem també que elevar un element de A a un enter segueix tenint sentit amb aquesta definició si $s = (T^n, n)$.
Elevar a un element s de S_∞ té propietats similars al cas clàssic.

Proposició 4.1. *Siguin α, β polinomis mònics de A i sigui $s = (x, y) \in S_\infty$. Llavors*

$$(\alpha\beta)^s = \alpha^s\beta^s$$

A més, siguin $s_1, s_2 \in S_\infty$ i α polinomi mònic de A. Llavors

$$\alpha^{s_1+s_2} = \alpha^{s_1}\alpha^{s_2}$$

Dem. Es té que $\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle$ i $deg(\alpha\beta) = deg(\alpha) + deg(\beta)$, per tant la primera part queda vista. La segona part es veu de forma similar i utilitzant com hem definit l'operació del grup amb $s_1 + s_2$. $\square$

4.1 Funcions contínues a $\mathbb{Z}_p$

Sigui L un cos de característica p que es complet respecte a un valor absolut no arquimedià. Observem que L pot ser C_∞. Denotem l'espai de funcions contínues de $\mathbb{Z}_p$ a L com $C(\mathbb{Z}_p, L)$. Veiem el tipus de funcions més bàsiques de $C(\mathbb{Z}_p, L)$:

Proposició 4.2. *Sigui $\binom{x}{k}$ amb $x \in \mathbb{Z}_p$. Aquesta funció és una funció contínua de $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{Z}_p$.*

Dem. Efectivament, donat un $\epsilon > 0$, considerem x_1, x_2 tal que $|x_1 - x_2| < \delta$. Llavors

$$|\binom{x_1}{k} - \binom{x_2}{k}| = \frac{1}{k!}|x_1(x_1-1)...(x_1-k+1) - x_2(x_2-1)\cdots(x_2-k+1)|$$

Definim $P(x) := x(x-1)\cdots(x-k+1)\frac{1}{k!}$. Llavors la part dreta de la igualtat anterior passa ser $|P(x_1) - P(x_2))|$. Si fem el desenvolupament de Taylor[3] de $P(x)$ centrat en x_2 llavors

$$|P(x_1)-P(x_2)| = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P^n(x_2)}{n!}(x_1-x_2)^n| \leq \max_{n\in\{0,1,\dots,k-1\}}(|\frac{P^n(x_2)}{n!}(x_1-x_2)^n|) \leq$$

$$\leq M\delta^m \leq M\delta < \epsilon, M > 0$$

on recordem que la desigualtat ve donada perquè estem utilitzant el valor absolut p-àdic que no és arquimedià. En conclusió $\binom{x}{k}$ és contínua. □

Corol·lari 4.1. $\binom{x}{k}_p$ *és una funció continua de $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{F}_p \subset L$.*

Definició 4.3. *Definim $\phi(x)$ com*

$$\phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}_p.$$

Amb $a_k \in L$, $a_k \to 0$ quan $k \to \infty$. Definim també l'operador L-lineal

$$\triangle\psi(x) := \psi(x+1) - \psi(x)$$

amb $\triangle^0\psi(x) := \psi(x)$.

Lema 4.1. *$\phi(x)$ és una funció contínua de $\mathbb{Z}_p$ a L.*

Dem. Considerem $\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{x}{k}_p$ que és una funció clarament contínua, ja que $\binom{x}{k}_p$ ho és. Com que la successió ϕ_N convergeix uniformement a ϕ, per tant el seu límit ϕ és contínua. □

[3]Aquí el desenvolupament de Taylor ha utilitzat que "per definició" la derivada k-èssima d'un polinomi és $\sum_{i=k}^{N} a_i \frac{i!}{(n-k-1)!}x^{i-k}$, N grau del polinomi. Notem que estem en $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$, un cos de característica 0, per tant podem considerar aquest tipus de desenvolupament

Lema 4.2. *Tenim que per $j \geq 0$*

$$a_j = \triangle^j \phi(0) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-1} \binom{j}{i}_p \phi(i) \in L$$

Dem. Utilitzant que els coeficients binomials compleixen que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ per n enter, es pot comprovar que

$$\triangle \binom{x}{k}_p = \binom{x}{k-1}_p$$

Per tant, al ser $\triangle$ L-lineal tenim

$$\triangle^j \phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \triangle^j \binom{x}{k}_p = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+j} \binom{x}{k}_p$$

Amb això el resultat és trivial. $\square$

Teorema 4.1. *Tota $\phi(x) \in C(\mathbb{Z}_p, L)$ pot ser expandida de forma única com*

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}_p$$

on $\{a_k\}_0^\infty \subset L$ i $a_k \to 0$ quan $k \to \infty$, on $a_k \in L$ per a tot k, i inequívocament determinats pel Lema 4.2.

La unicitat queda clara pel Lema 4.2. La resta de la demostració es pot trobar a [6, p.246].

5 Funcions enteres a S_∞

El concepte de funció entera sempre ha sigut propi de contextos on tenim un cos complet amb el seu valor absolut, arquimedià o no. En aquest capítol es tracta de portar aquest concepte a S_∞.

5.1 Definició i caracterització

Comencem per recordar la teoria rere el concepte de funció entera[4].

Definició 5.1. *Sigui $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ una sèrie de potències amb coeficients a un cos K algebraicament tancat amb una valoració v. Sigui $\rho(f) := \lim_{j\to\infty} v(a_j)/j$. Diem que $f(x)$ és entera si $\rho(f) = -\infty$ (això implica que $f(x)$ convergeix per a tot x).*

Com traslladem doncs això al nostre cas? Doncs comencem per la següent definició.

Definició 5.2. *Definim funció f entera a S_∞ com una funció f tal que per un $s = (x, y) \in S_\infty$, $f(s) := f(x, y) = g_y(1/x)$, on $g_y(t)$ és una sèrie entera de potències que convergeix a tot $\mathbb{C}_\infty$, amb un paràmetre $y \in \mathbb{Z}_p$.*
A més requerim que donat un subconjunt $B \subset \mathbb{C}_\infty$ acotat i un $\epsilon > 0$, existeixi un $\delta := \delta(B) > 0$ tal que donats $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}_p$ que si compleixen $|y_0 - y_1| < \delta$ llavors per a qualsevol element u fixat de B es compleix $|g_{y_0}(u) - g_{y_1}(u)| < \epsilon$.

Observem que imposar que una funció sigui entera a S_∞ vol dir donar una funció entera $g_y(t)$ a $\mathbb{C}_\infty$ per a cada $y \in \mathbb{Z}_p$. A part observem també que en les tres últimes línies de la Definició 5.2 s'exigeix un anàleg del criteri de Cauchy per convergència uniforme per conjunts compactes de $\mathbb{C}_\infty$ però amb funcions indexades a $\mathbb{Z}_p$[5].

Definició 5.3. *Sigui $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ una sèrie de potències entera de coeficients $a_i \in \mathbb{C}_\infty$. Sigui r un nombre real estrictament positiu. Definim:*

$$||g||_r = \max_i \{|a_i| r^i\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Per exemple, considerem $||g||_1 = \max_i\{|a_i|\}$. Si $||g||_1 < \infty$, llavors $g(t)$ convergeix per a tot t, amb $|t| < 1$. De fet, si $g(t)$ és entera, $||g||_r < \infty$ per a tot r. Sigui $g(t)$ una sèrie de potències que convergeix a la bola unitat $\{t \mid |t| \le 1\}$. Això és clarament equivalent a $a_i \to 0$ quan $i \to \infty$. De fet es pot provar que

[4] Com he apuntat el concepte de funció entera també existeix fora de l'anàlisi no arquimedià, i generalment no és un concepte reservat a cossos que tinguin una valoració v, tot i que en la definició donada aparegui una valoració. En cas de no tenir una valoració senzillament s'exigeix que la funció $f(x)$ definida per una sèrie de potències convergeixi per a tot x.

[5] El criteri de Cauchy de convergència uniforme per successions de funcions diu que una successió de funcions $(f_n)_0^\infty$ convergeix uniformement si i només si a partir d'un cert terme es compleix que per a tot $\epsilon > 0$ existeix un N depenent de ϵ tal que per a tot $n, m > N$ llavors $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ per a tot x de $\mathbb{R}$. En aquest cas s'estaria substituint la condició la existència de tal N depenent de ϵ per la topologia de $\mathbb{Z}_p$

$||g||_1 = \max_{|t|\leq 1}\{|g(t)|\}$ i en particular $||\cdot||_1$ força convergència uniforme en el disc unitat tancat (consultar [6, p.249]). En general, $||\cdot||_r$ força convergència en el disc de radi r tancat, i per tant en els compactes de $\mathbb{C}_\infty$.
El següent resultat dona una definició equivalent a la Definició 5.2.

Proposició 5.1. *Donar una funció entera a S_∞ és equivalent a donar una sèrie de potències g_y amb $y \in \mathbb{Z}_p$ amb la següent propietat: sigui $r \in \mathbb{R}_+$ i $\epsilon > 0$, llavors existeix $\delta = \delta(r) > 0$ tal que si $y_0, y_1 \in \mathbb{Z}_p$, llavors $|y_0 - y_1| < \delta$ implica que $||g_{y_0}(u) - g_{y_1}(u)||_r < \epsilon$ per qualsevol element u fixat, pertanyent a la bola de radi r de $\mathbb{C}_\infty$.*

Sigui $f(s) : S_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ una funció entera i sigui $y \in \mathbb{Z}_p$. Per definició

$$f(s) = f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(y) x^{-i}$$

on $f_i(y) \in \mathbb{C}_\infty$. Per la Proposició 5.1 $f_i : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_\infty$ és continua.
Considerem

$$m_i := \max_{y \in \mathbb{Z}_p}\{|f_i(y)|_\infty\}.$$

Per compacitat de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Q}_p$, m_i és finit.

Teorema 5.1. *Sigui $r \in \mathbb{R}_+$. Llavors*

$$m_i r^i \to 0$$

quan $i \to \infty$.

Dem. La caracterització donada en Proposició 5.1 anirà molt bé per provar aquest i altres resultats similars. Sigui $\epsilon > 0$. Volem veure que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i > n_0$ llavors $m_i r^i < \epsilon$. Considerem el recobriment de $\mathbb{Z}_p$ per la col·lecció de boles obertes $\{B_j\}$ tals que si $y, y' \in B_j$, llavors

$$||f(x^{-1}, y) - f(x^{-1}, y')||_r < \epsilon$$

Per compacitat podem trobar una sobrecoberta finita $\{B_{i_1}, ..., B_{i_t}\}$ de $\mathbb{Z}_p$. Sigui $y_j \in B_{i_j}$ amb $j = 1, ..., t$. Per a cada j, sigui n_{0_j} tal que si $i > n_{0_j}$, llavors $|f_i(y_j)|r^i < \epsilon$. Sigui $n_0 = \max_j\{n_{0_j}\}$.
Suposem ara que $i > n_0$. Sigui $\hat{y_i} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|f_i(\hat{y_i})| = m_i$. Existeixen $j \in 1, ..., t$ amb $\hat{y_i} \in B_{ij}$. Per tant

$$m_i r^i = |f_i(\hat{y_i})| r^i$$

$$= |f_i(y_j) + f_i(\hat{y_i}) - f_i(y_j)| r^i$$

$$\leq \max |f_i(y_j)|, |f_i(\hat{y_i}) - f_i(y_j)| r^i$$

$$\leq \epsilon.$$

$\square$

Recíprocament, sigui $f_i(y) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_\infty, i = 0, ..., \infty$ una col·lecció de funcions continues. Sigui

$$m_i := \max_y \{|f_i(y)|\}$$

i suposem $m_i r^i \to 0$ quan $i \to \infty$ per a tot $r \in \mathbb{R}_+$. Tenim el següent recíproc del Teorema 5.1.

Teorema 5.2. *Sigui $f(x,y) := \sum_{j=0}^{\infty} f_j(y) x^{-j}$ on $f_i : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_\infty$ són funcions contínues. Llavors $f(x,y)$ és una funció entera a S_∞.*

Dem. Està clar que per un y fixat, $f(x,y)$ és una sèrie de potències entera en x^{-1}. Necessitem llavors continuïtat uniforme. Sigui $r \in \mathbb{R}_+$ i sigui $\epsilon > 0$. Sigui $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, llavors $m_i r^i < \epsilon$. Sigui j un natural no negatiu més petit o igual a N. Ja que $f_j(y)$ és continua a Z_p, llavors és uniformement contínua. Llavors podem trobar $\delta_j > 0$ de tal manera que si $|y_0 - y_1|_p < \delta_j$, llavors $|f_j(y_0) - f_j(y_1)| < \epsilon / r^j$. Sigui $\delta := \min_j \{\delta_j\}$. Per tant si $|y_0 - y_1| < \delta$, llavors

$$||f(x^{-1}, y_0) - f(x^{-1}, y_1)||_r$$
$$\leq \max\{\epsilon, |f_0(y_0) - f_1(y_0)| r^0, ..., |f_N(y_0) - f_N(y_0)| r^N\} \leq \epsilon.$$

$\square$

En resum, els Teoremes 5.1 i 5.2 ens donen una caracterització de les funcions enteres a S_∞. Gràcies a la teoria desenvolupada en 4.1, podem enunciar una segona versió del Teorema 5.2 amb una mica de feina prèvia:

Sigui $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_j(y) x^{-j}$ amb les mateixes característiques que en les hipòtesis del teorema anterior. Pel Teorema 4.1 per a cada j tenim

$$f_j(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{j,k} \binom{y}{k}_p$$

on $\{f_{j,k}\} \subset \mathbb{C}_\infty$ i $f_{j,k} \to 0$ si $k \to \infty$. Per tant

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} f_{j,k} \binom{y}{k}_p) x^{-j} = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} f_{j,k} x^{-j}) \binom{y}{k}_p$$

on en aquest últim pas hem canviat d'ordre els sumatoris. Això ho podem fer ja que els $\{f_{j,k}\}$ van a 0, i per tant $f_{j,k}\binom{y}{k}_p$ són en un conjunt acotat de $\mathbb{C}_\infty$, i per definició d'entera, tenim convergència uniforme. Reescrivim l'expressió anterior com

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k(x^{-1}) \binom{y}{k}_p$$

Pel Lema 4.2

$$\hat{f}_k(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i}_p f(x,i). \tag{1}$$

En (1) ja es veu que $\hat{f}_k(u)$ és entera. Busquem el seu desenvolupament en sèrie

$$\hat{f}_j(u) = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f(\frac{1}{u},i) = \sum_{i=0}^{j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)u^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)u^n \tag{2}$$

on $\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)$ és el coeficient de u^n. Sigui ara $r \in \mathbb{R}_+$. Llavors

$$|\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)|r^n \leq \max_{i=1,\ldots j}(|(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)r^n|) \leq \binom{j}{1}_p m_n r^n.$$

Pel Teorema 5.1 si $n \to \infty$, $m_n r^n$ tendeix a 0 i per tant està acotat, és a dir $m_n r^n \leq M$ per un cert M. Per altre banda $\binom{j}{1}_p$ és una funció acotada per a tot j perquè pren valors a $\mathbb{F}_p$. En conclusió $|\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_n(i)|r^n$ està acotat per a tot n i per a tot j i per tant el conjunt $\{||\hat{f}_j||_r\} \subset \mathbb{R}_+$ està acotat.
Lo que acabem de veure dona peu a la següent definició.

Definició 5.4. *Sigui m_i com en Teorema 5.1 i $r \in \mathbb{R}_+$. Definim*

$$||f(x,y)||_r^{(1)} := \max_i m_i r^i < \infty.$$

$$||f(x,y)||_r^{(2)} := \max_j ||\hat{f}_j(u)||_r < \infty.$$

Si $f(x,y)$ és entera a S_∞ es pot veure que $||f(x,y)||_r^{(2)} = ||f(x,y)||_r^{(1)}$ (consultar [6, p.252]), per tant d'ara endavant ens referirem al valor de $||f(x,y)||_r^{(2)}$ i $||f(x,y)||_r^{(1)}$ com simplement $||f(x,y)||_r$. Ens mostrem en disposició d'enunciar la segona versió del Teorema 5.2.

Teorema 5.3. *Sigui $\hat{f}_j$ com en (1). Llavors per $r \in \mathbb{R}_+$, $||\hat{f}_j||_r \to 0$ si $j \to \infty$. Recíprocament, sigui $\{\hat{f}_j(u)\}$ una família de funcions enteres tals que $||\hat{f}_j||_r \to 0$ quan $j \to \infty$ per $r \in \mathbb{R}_+$. Definim*

$$f(x,y) := \sum_{j=0}^{\infty}\hat{f}_j(x^{-1})\binom{y}{j}_p$$

Llavors $f(x,y)$ és entera a S_∞.

Dem. Per definició tenim que $||\hat{f}_j||_r = \max_k\{|a_k|r^k\}$. En (2) hem trobat una expressió per a a_i i per tant

$$||\hat{f}_j||_r = \max_k\{|\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}_p f_k(i)|r^k\} \leq \max_k\{|(-1)^{j-1}\binom{j}{i}_p f_k(i)|r^k\}.$$

Com que $\binom{j}{i}_p$ és periòdica, també està acotada. Per tant pel Teorema 5.1 tenim que $||\hat{f}_j||_r \to 0$ si $j \to \infty$. Per altra banda, considerem $\hat{f}_j(x^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}x^{-k}$ on $a_{j,k} \in \mathbb{C}_\infty$ per a tot $j,k \in \mathbb{N}$. Veiem que $f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}_j(x^{-1})\binom{y}{j}_p$ és entera. Efectivament, en les condicions anteriors tenim

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}x^{-k})\binom{y}{j}_p$$

on per convergència uniforme podem reordenar de la següent manera:

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\binom{y}{j}_p)x^{-k}.$$

Sigui $f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\binom{y}{j}_p$. Pel Teorema 4.1 $f_j(x)$ és una funció contínua de $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{C}_\infty$ per tant l'expressió anterior seria equivalent a

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(y)x^{-j}$$

que per definició és una funció entera. $\square$

Veiem ara que algunes funcions enteres a S_∞ tenen una propietat que és única a la noció de entera tal i com ha estat definit a S_∞, i que no sembla haver-hi res semblant en el cas clàssic.

Definició 5.5. *Sigui $f(s) = f(x,y)$ una funció entera a S_∞. Definim $h_f(x,-j) := f(x(\frac{1}{T})^j, -j)$. Diem que f és essencialment algebraica si es compleix que $h_f(x,-j)$ és un polinomi en x^{-1} amb coeficients a $\mathbb{F}_q[T]$ per a tot $j \geq 0$.*

Per exemple, sigui $d = deg(a)$ i sigui f la funció entera $f(s) = f(x,y) = x^{-deg(a)}\langle a\rangle^{-y}$, $s \in \mathbb{C}_\infty$. Considerem doncs $f(x(\frac{1}{T})^j, -j)$, $j \geq 0$:

$$f(x(\frac{1}{T})^j, -j) = x^{-d}(\frac{1}{T})^{jd}\langle a\rangle^j = x^{-d}(\frac{1}{T})^{jd}T^{dj}a = x^{-d}a$$

on al final hem obtingut un polinomi en x^{-1} amb coeficients que pertanyen a A. El següent resultat permet identificar funcions enteres que són essencialment algebraiques.

Proposició 5.2. *Sigui $f(s)$ una funció entera a S_∞ tal que $h_f(x,-j)$ té els coeficients a A per a tot $j \geq 0$. Llavors f és essencialment algebraica.*

Dem. Per hipòtesi $h_f(x,-j)$ és una sèrie de potències entera en x^{-1}. Pel Teorema 5.1 el coeficient de x^{-t} de h_f ha d'anar a 0 quan $t \to \infty$. L'única manera que això passi és si h_f és un polinomi. $\square$

A la practica, ser entera a S_∞ normalment voldrà dir ser essencialment algebraica.

5.2 Exemple clau de funció entera a S_∞: ζ_A

Amb la potenciació definida en un cos adient en l'inici del capítol 4, ja podem començar a definir un anàleg a la funció Zeta de Riemann per A.

Definició 5.6. *Definim $f_A(s)$ amb $s \in \mathbb{C}_\infty$ tal que $f_A(s) := \sum_{a\in A_+} a^{-s}$, on A_+ denota el conjunt de polinomis mònics de A.*

Per $s = (x, y) \in S_\infty$ tenim que $f_A(s) = \sum_{a\in A+} x^{-deg(a)}\langle a\rangle^{-y}$. La convergència d'aquest sumatori es pot veure estudiant el valor absolut del terme general

$$|x^{-deg(a)}\langle a\rangle^{-y}|_\infty = |x|_\infty^{-deg(a)}|\langle a\rangle|_\infty^{-y} = |x|_\infty^{-deg(a)}$$

on $|x|_\infty^{-deg(a)} \to 0$ quan $deg(a) \to +\infty$ si $|x|_\infty > 1$. Per tant només podem garantir que f_A està definida al conjunt $\{s = (x, y) \in S_\infty : |x|_\infty > 1\}$. Veiem que f_A és una funció entera a S_∞.

Definició 5.7. *Definim $L(s)$ tal que*

$$L(s) := \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - p^{-s})^{-1}$$

on $\mathbb{P}$ és el conjunt dels elements primers de A que són mònics, és a dir, el conjunt de polinomis mònics irreductibles de A.

Aquest producte convergeix a $\{s = (x, y) \in S_\infty||x|_\infty > 1\}$.

Teorema 5.4. *$L(s) = f_A(s)$ en $\{s = (x, y) \in S_\infty||x|_\infty > 1\}$.*

Aquest Teorema és equivalent al següent resultat.

Teorema 5.5. *ζ_A té una expressió equivalent al producte d'Euler del cas clàssic en $\{s = (x, y) \in S_\infty||x|_\infty > 1\}$. És a dir*

$$\zeta_A(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - p^{-s})^{-1}$$

Observem que el paper d'elements primers l'assumeixen els polinomis mònics irreductibles de A. La prova d'aquest darrer resultat és anàloga al cas clàssic, gràcies a les propietats de l'exponenciaició per elements de S_∞, vistes en la Proposició 4.1 i un esquema de la prova es pot consultar a la secció A.3 de l'Annex.

Teorema 5.6. *$L(s)$ és entera a S_∞.*

Per una demostració detallada del teorema consultar la secció 8.9 de [6] on es veu un resultat més general.
Per estendre f_A a tot S_∞, es pot mirar de reordenar els termes del sumatori de la definició de f_A. Per fer-ho utilitzarem el següent lema la demostració del qual es pot trobar a [1, p.14]:

Lema 5.1. *Per a tot $y \in \mathbb{Z}_p$ es té que*

$$v_\infty(\sum_{a \in A_{d,+}} \langle \alpha \rangle^{-y}) \geq p^{d-1}$$

on $A_{d,+}$ denota els polinomis mònics de grau d.

Més endavant estudiarem més profundament aquest tipus de sumes i quan s'anul·len però de moment serà suficient amb aquest resultat.
Aprofitant això definim ζ_A o la funció Zeta de Carlitz-Goss.

Definició 5.8. *La funció Zeta de Carlitz-Goss a A es defineix com*

$$\zeta_A(x, y) := \sum_{d \geq 0} x^{-d}(\sum_{a \in A_{d,+}} \langle a \rangle^{-y})$$

on $s = (x, y) \in S_\infty$.

La funció ζ_A està definida a tot S_∞ i amb aquesta definició, ζ_A és entera a S_∞. A més per aplicació directa de la Proposició 5.2, ζ_A és essencialment algebraica. Observem que pel Lema 5.1 és una sèrie absolutament convergent. En particular és una reordenada de f_A i al ser absolutament convergent, $f_A \equiv \zeta_A$ en $\{s = (x, y) \in S_\infty || x|_\infty > 1\}$.

6 Els zeros de $\zeta_A(s)$

En aquest capítol ens centrarem en el zeros de $\zeta_A(s)$ i intentarem formular un anàleg a la Hipòtesi de Riemann sobre els zeros de la funció zeta complexa, on s'utilitzaran eines com el polígon de Newton [6].
Comencem recordant resultats molt rellevants del cas clàssic. Sigui ζ la funció zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s \in \mathbb{C}.$$

Aquesta funció està definida per $\Re(s) > 1$. Definim

$$n(s) = s(1-s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s).$$

És sabut que $n(s)$ és una funció entera que satisfà l'equació funcional $n(s) = n(1-s)$. Es pot utilitzar aquesta equació funcional per expandir el domini de $\zeta(s)$ a tot el pla complex i també serveix per veure de forma "trivial" que els nombres enters parells negatius són zeros de ζ, gràcies a que sabem com es comporta la funció Γ. Per això aquests zeros reben el nom de zeros trivials de ζ.
Si ara intentem trobar un concepte anàleg a zeros trivials de $\zeta_A(s)$ ens trobem amb un problema, que és que no se sap si $\zeta_A(s)$ té equació funcional[7]. En la secció 8.13 de [6] Goss anomena zeros trivials de $\zeta_A(s)$ a un cert tipus de zeros que es podrien qualificar trivials de calcular però conceptualment no tenen una analogia clara als zeros trivials de ζ, on la diferència entre zeros trivials i zeros no trivials és molt més marcada. Per tant ens interessarem en caracteritzar tots els zeros de $\zeta_A(s)$ d'una forma anàloga a la que la Hipòtesi de Riemann caracteritza els zeros no trivials de $\zeta(z)$.

6.1 La Hipòtesi de Riemann traslladada a $\zeta_A(s)$

Sigui $n(s)$ definida com a l'inici de la secció. La Hipòtesi de Riemann diu que tots els zeros de la funció $n(s)$ són de la forma $\frac{1}{2} + i\beta$. Definimi ara

$$\theta(s) = n(i(s + \frac{1}{2})).$$

Resulta que $\theta(s)$ és una sèrie de potències en s amb coeficients a $\mathbb{R}$. Llavors la Hipòtesi de Riemann passa a ser que els zeros de $\theta(s)$ són de $\mathbb{R}$ que és la completació de $\mathbb{Q}$ amb el valor absolut usual. En el nostre cas no podem partir d'una equació funcional però una possible versió equivalent de la Hipòtesi de Riemann en el nostre cas seria que tots els zeros de $\zeta_A(s) = \zeta_A(x, y)$ amb y fixat estan a K_∞ completació de K amb $|\cdot|_{v_\infty}$ i que això passi per a tot y.

[6]Per més detalls referents a que és el polígon de Newton i quina és la seva versió en $K[[X]]$ consultar la secció A.2 de l'Annex.
[7]Per veure més sobre aquest tema consultar [7]

6.2 Primer intent de demostració: Daqing Wan i David Goss

Aquesta versió de la Hipòtesi de Riemann ens permet utilitzar el polígon de Newton ja que per $y \in \mathbb{Z}_p$ fixada, $\zeta_A(s)$ és una sèrie de potencies en x^{-1}. Per tant el nostre primer pas hauria de ser calcular el polígon de Newton de $\zeta_A(s)$ per a tot $y \in \mathbb{Z}_p$. Però el polígon de Newton no és sempre fàcil de calcular i, a vegades, s'opta per donar una cota inferior.
El matemàtic Daqing Wan va treballar en el seu moment en aquest problema, i va aconseguir trobar una cota inferior del polígon de Newton, que va anomenar $P(y)$, que arribava a coincidir amb el polígon de Newton de $\zeta_A(x, y)$ per certs valors $y \in \mathbb{Z}_p$. Veiem com va fer-ho.

Definició 6.1. *Definim $v_d(y)$ la valoració infinit del coeficient de x^{-d} en $\zeta_A(x, y)$, és a dir $v_d(y) = v_\infty(\sum_{a \in A_{d,+}} \langle \alpha \rangle^{-y})$.*

El seu objectiu era trobar una seqüencia de nombres, anomenem-los $w_d(y)$, tals que complissin que $w_d(y) \leq v_d(y)$ per a tot d i així poder definir el $P(y)$ amb els parells de punts $(d, W_d(y))$. Per trobar tals $w_d(y)$ va fer ús de l'expansió q-àdica de y:
Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$. Llavors com que $q = p^n$, y té una expansió q-àdica, és a dir, existeix una successió d'elements $0 \leq y_j \leq q-1$ tals que $y = y_0 + y_1 q + y_2 q^2 + ...$
Suposem ara que existeix un natural j_d tal que

$$d(q-1) \leq y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{j_d}$$

Llavors existeix un natural r que compleix

$$d(q-1) = y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{j_{d-1}} + r$$

Si ara considerem l'expressió $y_0 + y_1 q + y_2 q^2 + ... + y_{j_{d-1}} q^{j_{d-1}} + r q^{j_d}$ podem dir que és com un truncament de y, tal que els nombres de la q-expansió del truncament de y sumen $d(q-1)$.

Definició 6.2. *Suposem que existeix el subíndex j_d definit en el paràgraf anterior. Llavors Definim $[y]_d := y_0 + y_1 q + y_2 q^2 + ... + y_{j_{d-1}} q^{j_{d-1}} + r q^{j_d}$. Si no existeix j_d llavors diem que $[y]_d$ no està definit.*

Definició 6.3. *Suposem $[y]_k$ existeixi per $0 \leq k \leq d$. Llavors definim $w_d(y) := \sum_{k=0}^{d} [y]_k$. Per altra banda si $[y]_d$ no està definit per algun d llavors $w_D(y) = \infty$ per a tot $D > d$.*

Amb això ja ho tenim tot per definir $P(y)$.

Definició 6.4. *Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$. Llavors definim $P(y)$ com l'envolvent convexa inferior dels punts $(d, w_d(y))$, $d \geq 0$.*

Els següents resultats seran clau per demostrar la hipòtesi feta al principi del capítol.

Lema 6.1. *Suposem que $w_d(y) < \infty$. Llavors $(d, w_d(y))$ són vèrtex del polígon $P(y)$, en particular, la projecció horitzontal de cada costat de $P(y)$ té longitud 1.*

Dem. Com que $w_d(y) < \infty$ llavors $[y]_d$ està definit. Si la segona coordenada dels vèrtex creix de forma monòtona, els costats de $P(y)$ estaran formats per vèrtexs "consecutius" i per tant el recorregut de la primera coordenada sempre serà de longitud 1, és a dir, la projecció sobre l'eix X és de longitud 1. A més, degut a això, el pendent entre vèrtexs consecutius és $w_d(y) - w_{d-1}(y) = [y]_d$ per la Definició 6.3. Per tant només hem de veure que els pendents creixen de forma monòtona i ja haurem acabat. És fàcil veure que per $y \in \mathbb{Z}_p$ fixat es compleix

$$0 = [y]_0 < [y]_1 < [y]_2 < ... < [y]_{d-1} < [y]_d$$

en particular es compleix $[y]_{d-1} < [y]_d$, que és el que volíem. $\square$

Wan aconsegueix provar en Teorema 2.2 de [11] que efectivament $P(y)$ és una cota inferior del Polígon de Newton de $\zeta_A(x, y)$. A més en el mateix resultat dóna una formula asimptòtica pels coeficients de x^{-1} que confirma que estan a K_∞, per tant si $P(y)$ coincideix amb el Polígon de Newton per algún y, ens estarà dient que les arrels corresponents a aquella y estàn a K_∞, ja que recordem que $P(y)$ té projecció unitària de cada costat al eix X.

Teorema 6.1. *Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$. Suposem que tots els dígits y_j de la q-expansió de y són més petits que p o iguals a $(q-1)$. Llavors $P(y)$ coincideix amb el polígon de Newton de $\zeta_A(x, y)$.*

Per més detalls sobre aquest resultat consultar capítol 2 de [11].
Goss recull els resultats vistos per Wan en el següent Teorema.

Teorema 6.2. *Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$ tal que els y_j de la q-expansió de y són més petits que p o iguals a $q - 1$. Llavors els zeros de $\zeta_A(x, y)$ estan a K_∞ i són simples.*

Corol·lari 6.1. *Si $q = p$ la hipòtesi plantejada a l'inici de la secció és certa, i per tant es compleix el nostre anàleg de la Hipòtesi de Riemann.*

Evidentment seria ideal tenir un resultat similar però per y arbitrari. El problema és que si eliminem la condició sobre la q-expansió de y perdem el fet que els costats del Polígon de Newton tinguin projecció de longitud 1 i ja no podem deduir que els zeros estiguin a K_∞ o que siguin simples només amb el Polígon de Newton. En la secció 8.13 de [6] Goss intenta atacar aquest problema intentant relaxar les condicions sobre y. Per veure com va fer-ho introduïm primer els següents conceptes.

Definició 6.5. *Sigui $f(u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j u^j$ una funció entera tal que la projecció de cada costat del Polígon de Newton sobre l'eix X és de longitud 1. Direm que el Polígon de Newton de $f(u)$ és simple.*

Definició 6.6. *Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$. Llavors si el Polígon de Newton de $f(x^{-1}) = \zeta_A(x, y)$ és simple, llavors diem que y també és simple.*

La clau serà trobar en quines altres condicions apart de les donades per Wan, y és simple.

Lema 6.2. *Si y és simple llavors per $t \geq 0$ $p^t y$ també és simple.*

Dem. Definim $\tilde{s}_d(y) := (\sum_{a \in A_{d,+}} \langle a \rangle^{-y})$, és a dir, els coeficients de x^{-d} de $\zeta_A(x, y)$. Llavors

$$\tilde{s}_d(p^t y) = \sum_{a \in A_{d,+}} \langle a \rangle^{-p^t y} = (\sum_{a \in A_{d,+}} \langle a \rangle^{-y}))^{p^t} = \tilde{s}_d(y)^{p^t}.$$

Per tant quan calculem el Polígon de Newton de $\zeta_A(x, p^t y)$ ens sortirà que els punts que ha de cobrir l'envolvent convexa inferior són els punts corresponents a $\zeta_A(x, y)$ amb la segona coordenada multiplicada per la constant p^t. Per tant el Polígon de Newton segueix sent simple. □

Corol·lari 6.2. *Si y compleix les condicions del Teorema 6.2, llavors $p^t y$ és simple.*

El corol·lari és immediat del lema.

Proposició 6.1. *Sigui $0 < m \leq q$. Llavors $p^t m$ és simple.*

Dem. Considerem la funció $e_d(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-1} x^{r^i} \frac{D_d}{D_i L_{d-i}^{r^i}}$ (consultar la secció A.1 de l'annex per més detalls sobre aquesta funció). Com que $e_d(x)$ és $\mathbb{F}_q$ lineal, es pot veure que

$$\frac{e_d'(x)}{e_d(x)} = \frac{(-1)^d D_d}{L_d} \frac{1}{e_d(x)} = \sum_{deg(\alpha) < d} \frac{1}{x - \alpha} \tag{3}$$

on $e_d'(x)$ s'entén com la derivada formal de $e_d(x)$. Es pot comprovar que $e_d(T^d) = D_d$. Aprofitant això arribem a la igualtat

$$\frac{(-1)^d D_d}{L_d} \frac{1}{e_d(x + T^d)} = \frac{(-1)^d D_d}{L_d} \frac{1}{e_d(x) + D_d} = \sum_{\alpha \in A_{d,+}} (x + \alpha)^{-1} \tag{4}$$

on en l'última igualtat s'ha utilitzat (3). Per tant de (4) hem obtingut

$$\frac{(-1)^d D_d}{L_d} \frac{1}{e_d(x) + D_d} = \sum_{\alpha \in A_{d,+}} (x + \alpha)^{-1}$$

Substituint x per 0 en l'expressió de $e_d(x)$ arribem a

$$\frac{(-1)^d}{L_d} = \sum_{\alpha \in A_{d,+}} \frac{1}{\alpha}.$$

En [2] Carlitz veu que per $0 < m \leq q$ es té

$$\sum_{\alpha \in A_{d,+}} \frac{1}{\alpha^m} = (-1)^{dm} \frac{1}{L_d^m}.$$

Observem que $T^{-d}\sum_{\alpha\in A_{d,+}}\frac{1}{\alpha^m}$ són els coeficients de $\zeta_A(x,m)$, per tant el Polígon de Newton de $\zeta_A(x,m)$ és

$$\{(d, v_\infty((-1)^{dm}\frac{1}{L_d^m}) - d)\} = \{(d, m\cdot deg(L_d) - d)\} = \{(d, m\frac{q(q^d-1)}{q-1} - d)\}.$$

D'aquí es pot veure que amb un argument similar al que hem fet en el Lema 6.1 que si $0 < m \leq q$, llavors m és simple. Pel Lema 6.2 $p^t m$ és simple. □

Goss encara dona uns quants resultats més del mateix estil en la secció 8.24 de [6], però mai un resultat general. De fet, de moment només podem dir que la hipòtesi en la que treballem només ha sigut demostrada per $q = p$, tal i com hem vist al Corol·lari 6.1. Serà el matemàtic Jeffrey T. Sheats qui aconseguirà un resultat general.

6.3 Demostració del cas general: Jeffrey T Sheats

6.3.1 Notació i resultat previs

Recordem l'expressió de ζ_A

$$\zeta_A(x,y) := \sum_{d\geq 0} x^{-d}(\sum_{a\in A_{d,+}}\langle a\rangle^{-y})$$

on $A_{d,+}$ denota els polinomis mònics en A de grau d. Si ens preguntem quan s'anul·la ζ_A, primer hauríem de preguntar-nos quin aspecte té ζ_A. Més concretament, seria ideal saber si hi han certs valors de $y \in \mathbb{Z}_p$ tal que ζ_A sigui un polinomi en x^{-1}, ja que per aquests y seria més senzill determinar quan s'anul·la ζ_A. Una manera de plantejar aquest problema seria preguntar-se quan s'anul·la $\sum_{a\in A_{d,+}}\langle a\rangle^{-y}$. Com que $\langle a\rangle = T^{-\deg(a)}a$, realment ens estem preguntant on s'anul·la $T^{dy}\sum_{a\in A_{d,+}} a^{-y}$ o equivalentment quan s'anul·len les sumes del tipus $\sum_{a\in A_{d,+}} a^{-y}$. Així doncs Sheats es va fixar en les següents sumes finites

$$S_k(N) := \sum_{\alpha\in A_{k,+}} \alpha^N$$

per N enter positiu[8]. En particular es va centrar en els estudis previs del matemàtic Leonard Carlitz sobre quan era que aquestes sumes no s'anul·laven. En [3] Carlitz enuncia i demostra el següent resultat.

Lema 6.3. *$S_k(N) \neq 0$ si i només si existeix una $(k+1)$-tupla $(r_0, r_1, \cdots, r_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ tal que*

1. *$\sum_{i=0}^{k} r_i = N$ i no hi ha cap desplaçament p-àdic en la suma*
2. *$r_i > 0$ i $(q-1)|r_i$ per $0 \leq i \leq k-1$*

[8] Més endavant veurem que a l'hora de fer la demostració aquesta no és una condició molt restrictiva

El terme desplaçament p-àdic en una suma esmentat en *1.* es refereix a que siguin $0 \leq a_{i,n} \leq p-1$ tals que $r_i = \sum_{n=0} a_{i,n} p^n$, llavors hi ha un desplaçament p-àdic en la suma $\sum_{i=0}^{k} r_i$ si per algun n es compleix que $\sum_{i=0}^{k} a_{i,n} > p-1$, és a dir, si el coeficient d'una potència de p de l'expansió p-àdica del resultat de la suma es veu incrementat pels coeficients de la potència de p anterior.

Definició 6.7. *Definim $U_{k+1}(N)$ com la col·lecció de totes les $(k+1)$-tuples que compleixen les hipòtesi del lema anterior.*

Carlitz va enunciar (però no provar de forma completa) el següent resultat que té un enunciat més compacte que 6.3 però amb un resultat igual de potent.

Teorema 6.3. *$S_k(N) \neq 0$ si i només si $U_{k+1}(N) \neq \emptyset$.*

<u>Dem de $\Rightarrow$</u>| Ho provarem provant la contraposició de la implicació. Sigui $\alpha \in A_{k,+}$, és a dir $\alpha = a_0 + a_1 T + \cdots + a_{k-1} T^{k-1} + T^k$. Llavors substituint aquesta expressió de α directament a $S_k(N)$

$$S_k(N) = \sum \binom{N}{r_0, \cdots r_k} \sum a_0^{r_0} \cdots a_{k-1}^{r_{k-1}} T^{r_1 + 2r_2 + \cdots k r^k} \tag{5}$$

on $\binom{N}{r_0,\cdots r_k} = \frac{N!}{r_0! \cdots r_k!}$. En l'expressió anterior el primer sumatori és sobre totes les $(k+1)$-tuples tals que $\sum_{i=0}^{k} r_i = N$ i el segon sumatori és sobre tota k-tupla $(a_0, \cdots, a_{k-1}) \in (\mathbb{F}_q)^k$. Per la Proposició 3.1 $\sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^h = -1$ si h és un múltiple positiu de $q-1$, o 0 si no, (5) és equivalent a

$$S_k(N) = \sum \binom{N}{r_0, \cdots, r_k} (-1)^k T^{r_1 + 2r_2 + \cdots + k r_k} \tag{6}$$

on ara les $(k+1)$-tuples del sumatori a més compleixen el punt *2.* del Lema 6.3. A través d'una generalització del Teorema d'Éduard Lucas sobre congruències de coeficients binomials amb mòdul p es pot provar que $\binom{N}{r_0,\cdots r_k}$ no és congruent a 0 mòdul p si i només si no hi ha cap desplaçament p-àdic en la suma $\sum_{i=0}^{k} r_i$ (consultar [4]). Per tant podem dir que el sumatori de (6) es per elements de $U_{k+1}(N)$. Per tant si $U_{k+1}(N) = \emptyset$ llavors $S_k(N) = 0$. □

Sheats va acabar la demostració del Teorema 5.3 demostrant l'altre implicació. Per entendre-la és necessària una mica més de feina i notació nova.

Definició 6.8. *Sigui $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{N}^m$. Definim el pes de x com*

$$wt(x) := x_1 + 2x_2 + \cdots + m x_m$$

Observem que aquesta definició de pes surt de forma natural en l'exponent de T en (6). Més endavant tornarà a aparèixer en la demostració d'un resultat molt rellevant.

Definició 6.9. *Una composició de $N \in \mathbb{Z}^+$ és una tupla $x = (x_1, \cdots, x_m)$ de naturals positius que sumen N.*
Si x no te cap desplaçament p-àdic en la suma $\sum_{i=0}^{m} x_i$ i $(q-1)|x_i$ per $1 \leq j \leq m-1$ llavors diem que x és una composició vàlida de N.

D'ara endavant denotem per $V_m(N)$ el conjunt de totes les composicions vàlides de N de longitud m.
Sigui $W \subset \mathbb{N}^m$ un subconjunt finit. Definim els següents conceptes relacionats amb W.

Definició 6.10. *Una tupla $y \in W$ és diu òptima en W si $wt(y) \geq wt(x)$ per a tot $x \in W$.*

Definició 6.11. *L'element greedy de W és un element $g = (g_1, \cdots, g_m) \in W$ pel qual $(g_m, g_{m-1}, \cdots, g_1)$ és la més llarga lexicogràficament.*
Una tupla $x = (x_1, \cdots, x_m)$ és més llarga lexicogràficament que una altre tupla $y = (y_1, \cdots, y_m)$ si i només si $x_n > y_n$, on n és el primer índex tal que $x_n \neq y_n$.

Primer de tot observem que $V_m(N)$ és el mateix que $U_m(N)$ però amb una condició afegida l'últim element, és a dir

$$V_m(N) = \{(x_1, \cdots, x_m) \in U_m(N) | x_m \neq 0\}. \tag{7}$$

Per il·lustrar tots aquests conceptes discutim un exemple concret de $U_m(N)$:
Sigui $q = 3$ i $N = 17$. Llavors la 3-tupla $(6, 2, 9)$ estaria en $U_3(17)$, ja que $6+2+9 = 2+2\cdot3+\cdot3^2 = 17$, i $3-1$ divideix els dos primers elements de la tupla. A més no hi ha cap desplaçament p-àdic en la suma. En particular, per (7) també està a $V_3(17)$. En canvi $(8, 8, 1)$ no, ja que $8+8+1 = (2+2\cdot3)+(2+2\cdot3)+1 = 1+4+4\cdot3 = 2+5\cdot3 = 2+2\cdot3+3^2$ i per tant hi ha desplaçament p-àdic.
Observem que $(6, 2, 9)$ no és l'element greedy de $U_3(17)$ ja que lexicogràficament la tupla $(9, 2, 6)$ és més curta que $(9, 6, 2)$ cosa que sería la tupla "transposada" de $(2, 6, 9)$ que pertany a $U_3(17)$.
Es tenen els següents resultats.

Teorema 6.4. *Si $V_m(N)$ és diferent del conjunt buit llavors conté un únic element òptim. A més, aquest element òptim és l'element greedy de $V_m(N)$.*

La demostració d'aquest resultat es pot trobar en els capítols 3-7 de [10]. Aquest Teorema serveix per demostrar la implicació que falta del Teorema 6.3 que enunciem en el següent Lema.

Lema 6.4. *Si $U_m(N)$ no és buit llavors conté un únic element òptim. A més, l'element òptim és l'element greedy de $U_m(N)$.*

Dem. La idea serà sempre intentar comparar $U_m(N)$ amb $v_m(N)$ i aplicar Teorema 6.4. Assumim primer que $V_m(N)$ és no buit. Com que $V_m(N) \subseteq U_m(N)$ llavors el lema és conseqüència del Teorema 6.4 si demostrem que $V_m(N)$ conté l'element greedy i tots els elements òptims de $U_m(N)$. Notem que si $(x_1, \cdots, x_m) \in U_m(N)$, llavors $x_m \equiv N \pmod{q-1}$ per definició. Per (7), si

N no és divisible per $(q-1)$ llavors $U_m(N) = V_m(N)$ i podem aplicar Teorema 6.4 . Per tant suposem que $(q-1)$ divideix N. Com que $V_m(N)$ és no buit els seu element greedy coincideix amb el de $U_m(N)$. Un altre cop per (7), totes les tuples en $U_m(N)\backslash V_m$ son de la forma $(x_1, \cdots, x_{m-1}, 0)$ i tenen el mateix pes que els elements de la forma $(x_1, \cdots, x_{m-1})$ en $V_{m-1}(N)$. Per seguir amb la demostració, utilitzarem el següent resultat demostrat en el capítol 4 de [10].

Proposició 6.2. *Si $(q-1)$ divideix N, i g és l'element greedy de $V_m(N)$ llavors*

$$(m-1)N < wt(g) \leq mN$$

Amb aquest resultat veiem que el pes de les tuples són estrictament més petites que el pes dels elements greedy de $V_m(N)$. Per tant si $V_m(N)$ és no buit conté tots els elements òptims de $U_m(N)$.
Finalment, si $V_m(N)$ és buit llavors tots els elements de $U_m(N)$ són de la forma $(x_1, \cdots, x_m, 0)$, per tant si ometem el 0, $U_m(N)$ és el mateix que $V_{m-1}(N)$ i per aplicació de Teorema 6.4 el resultat queda provat. $\square$

Veiem un exemple concret de lo que acabem de provar:

Sigui $q = 3$ com a l'exemple anterior. Veiem que $U_3(9)$ és buit: efectivament, suposem $(r_1, r_2, r_3) \in U_3(9)$. Sigui $a_i + b_i 3 + c_i 3^2$ el desenvolupament 3-àdic de r_i. Llavors $c_i = 0$ per $i = 1, 2, 3$, ja que si no estaríem forçant que més d'un element de la tupla sigui 0. Però $r_1 + r_2 + r_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)3 = 9 = 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2$. Per tant obligatòriament ha d'haver-hi un desplaçament p-àdic. Concloem que $U_3(9) = \emptyset$. D'això deduïm que $S_2(9) = \sum_{\alpha \in A_{+,2}} \alpha^9 = 0$

Corol·lari 6.3. *Si $S_k(N) \neq 0$ llavors el seu grau és $wt(g) - N$ on g és l'element greedy de $U_{k+1}(N)$.*

Dem. Aquest resultat ja ha estat indirectament provat, ja que si ens fixem en (6), el grau de cada monomi és igual a

$$r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k = 0r_0 + r_1 + 2r_2 + \cdots + kr_k =$$
$$r_0 + 2r_1 + \cdots + (k+1)r_k - r_0 - r_1 - \cdots - r_k = wt(r) - N$$

on $r \in U_{k+1}(N)$. Per últim, el Lema 6.4 demostra el resultat anterior. $\square$

6.3.2 Demostració del resultat principal

Estem en condicions de veure la demostració del següent Teorema.

Teorema 6.5. *Sigui $y \in \mathbb{Z}_p$ fix. Llavors $\zeta_A(x, y)$ té zeros simples i estan a K_∞.*

Sheats es va ajudar sobretot del Teorema 6.3 i del Teorema 6.4 per veure aquest resultat.

Dem. Primer fixem $y \in \mathbb{Z}_p$. Com que $y \in \mathbb{Z}_p$, és el mateix trobar els zeros de $\zeta_A(x, y)$ o de $\zeta_A(x, -y)$. Per tant considerem $\zeta_A(x, -y)$ com una funció de

x^{-1}. Aquest petit canvi de plantejament ens permet traslladar-nos a terreny conegut: sigui $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, llavors ens fixem que $T^{my}S_m(y)$ és el coeficient de x^{-m} de $\zeta_A(x,-y)$. A (6) podem observar que aquests coeficients estan a K_∞. Com que $\zeta_A(x,-y)$ és entera a S_∞, per la Definició 5.2 tenim que per y properes els coeficients de $\zeta_A(x,-y)$ com a funció de x^{-1} també seran propers. Com que $\mathbb{N}$ és dens a $\mathbb{Z}_p$ amb $|\cdot|_p$ podem argumentar que mai se sortirà de K_∞ per a tot $y \in \mathbb{Z}_p$ ja que és un cos complet.
Definim $v_m(y) := v_\infty(T^{my}S_m(y))$, és a dir, la valoració del coeficient de x^{-m} en $\zeta_A(x,-y)$. El Polígon de Newton de $\zeta_A(x,-y)$ és l'envolvent convexa a $\mathbb{R}^2$ dels punts

$$\{(m, v_m(y))|m \geq 0\}.$$

Recordem que si el Polígon de Newton de $\zeta_A(x,-y)$ té un costat de pendent λ amb projecció a l'eix X de longitud l, llavors $\zeta_A(x,-y)$ té precisament l zeros, amb multiplicitat inclosa. Si $v_{m-1}(y)$ i $v_m(y)$ són finits, definim

$$\lambda_y(m) := v_m(y) - v_{m-1}(y). \tag{8}$$

Observem que estaran definits quan $T^{my}S_m(y)$ sigui diferent de zero. Quan $\lambda_y(m)$ està definit, és el pendent del segment que va de $(m-1, v_{m-1}(y))$ a $(m, v_m(y))$.
A partir d'això podem distingir dos casos:
En el Cas 1 $\zeta_A(x,-y)$ és un polinomi de grau d, i s'haurà de veure que tant $\lambda_y(m)$ està definit i és monòtonament creixent en el conjunt $\{1, 2, \cdots, d\}$.
En el Cas 2 $\zeta_A(x,-y)$ no és un polinomi i s'ha de veure que λ_y està definit i és estrictament creixent per a tot $\mathbb{Z}^+$.
En cada cas s'ha de veure que (11) són costats del Polígon de Newton per ζ_A. Això comportarà que aquests segments tenen la projecció de longitud 1, haurem vist que els zeros de $\zeta_A(x,-y)$ són simples i estan a K_∞.

Cas 1: Abans de seguir presentem un resultat que utilitzarem per veure un fet clau en la demostració del Cas 1.

Proposició 6.3. *Sigui N tal que $1 \leq N < q^m - 1$, m natural. Llavors $S_m(N) = 0$.*

Corol·lari 6.4. *Sigui N tal que $1 \leq N < q^m - 1$, m natural. Llavors $U_{m+1}(N) = \emptyset$*

La demostració de Proposició 6.3 es pot consultar a [6, Remarca 8.12.1.1], i el Corol·lari 6.4 és conseqüència d'aplicar el Teorema 6.3 juntament amb la Proposició 6.3
Sigui y un enter positiu. Llavors com hem dit abans $T^{my}S_m(y)$ és el coeficient de x^{-m} en $\zeta_A(x,-y)$, on $S_m(y)$ són les sumes que hem estudiat. Com que per Corol·lari 6.4 $U_{m+1}(y)$ és buit per un m prou gran, el Teorema 6.3 implica que $\zeta_A(x,-y)$ és un polinomi[9] de x^{-1}. Sigui d el grau de $\zeta_A(x,-y)$. Llavors

[9] Un no pot evitar pensar en la propietat de ser essencialment algebraica de les funcions enteres a S_∞. No he explorat aquesta opció

$U_k(y)$ és buit per $k > d+1$. En canvi si $1 < k \leq d+1$ llavors $U_k(y) \neq \emptyset$, ja que $U_{d+1}(y) \neq \emptyset$, i per $1 \leq k \leq d$, si $(x_1, \cdots, x_{d+1}) \in U_{d+1}(N)$ llavors $(x_1, \cdots, x_k + \cdots x_{d+1}) \in U_k(N)$. Un altre cop pel Teorema 6.3 i per definició de valoració tenim

$$v_m(y) = \{ \begin{array}{rll} my - degS_m(y) & per & 0 \leq m \leq d \\ \infty & per & m > d \end{array} \tag{9}$$

És a dir λ_y està definit per $\{1, \cdots, d\}$. A més, per $2 \leq m \leq d$ tenim

$$\begin{aligned} \lambda_y(m) - \lambda_y(m-1) = (v_m(y) - v_{m-1}(y)) - (v_{m-1}(y) - v_{m-2}(y)) = \\ \deg S_{m-1}(y) - \deg S_m(y) - (\deg S_{m-2}(y) - \deg S_{m-1}(y)). \end{aligned} \tag{10}$$

Reordenant ens queda

$$\deg S_{m-1}(y) - \deg S_{m-2}(y) - (\deg S_m(y) - \deg S_{m-1}(y)).$$

Sigui $f = (f_1, \cdots, f_{m-1})$, $g = (g_1, \cdots g_m)$ i $h = (h_1, \cdots h_{m+1})$ els elements greedy de $U_{m-1}(y)$, $U_m(y)$ i $U_{m+1}(y)$. Pel Corol·lari 6.3 tenim

$$\lambda_y(m) - \lambda_y(m-1) = [wt(g) - wt(f)] - [wt(h) - wt(g)] \tag{11}$$

Definim $z = (h_1, \cdots, h_{m-1}, h_m + h_{m+1})$. Llavors z és un element de $U_m(y)$. Pel Lema 6.4 tenim $wt(z) \leq wt(g)$. De (11) obtenim

$$\lambda_y(m) - \lambda_y(m-1) \geq [wt(z) - wt(f)] - [wt(h) - wt(z)].$$

per tant, utilitzant que $wt(z) = wt(h) - h_{m+1}$

$$\lambda_y(m) - \lambda_y(m-1) \geq [wt(z) - wt(f)] - h_{m+1}. \tag{12}$$

Per últim considerem la composició $a = (h_1, \cdots, h_m)$. Com que h és l'element greedy de $U_{m+1}(y)$, a és l'element greedy de $U_m(y - h_{m+1})$. Per construcció de a tenim

$$wt(a) = wt(z) - mh_{m+1}. \tag{13}$$

Observem que a és també l'element greedy a $V_m(y - h_{m+1})$. Com que $(q-1)|y - h_{m+1}$, podem utilitzar la Proposició 6.2 utilitzada en la demostració del Lema 6.4 per veure que

$$0 < wt(a) - (m-1)(y - h_{m+1}).$$

Sumant h_{m+1} a cada costat de la desigualtat, sumat a (13) obtenim

$$h_{m+1} < wt(a) + mh_{m+1} - (m-1)y = wt(z) - (m-1)y. \tag{14}$$

Recuperant l'element greedy de $U_{m-1}(y)$ que havíem denotat amb f, el pes del qual és menor o igual a $(m-1)y$, podem utilitzar (14) i (12) per veure

$$\begin{aligned} \lambda_y(m) - \lambda_y(m) &\geq [wt(z) - wt(f)] - h_{m+1} \\ &\geq wt(z) - (m-1)y - h_{m+1} > 0. \end{aligned}$$

Per tant obtenim que els pendents dels segments que uneixen els punts consecutius són creixents. Pel mateix raonament fet anteriorment, això implica que el Polígon de Newton és la unió de punts consecutius i per tant la projecció de cada costat a l'eix de les X és de longitud 1. Això conclou la prova del Cas 1

Cas 2: La estratègia serà intentar reduir-nos al Cas 1. Suposem que $y \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{N}$, és a dir, l' expansió p-àdica de y té un nombre infinit de dígits diferents de zero. Per continuar necessitarem el següent lema.

Lema 6.5. *Sigui $\hat{y}(t)$ la suma dels primers t termes de l'expansió p-àdica de y, és a dir*

$$\hat{y}(t) := \sum_{i=0}^{t} y_i p^i.$$

Llavors fixat un m existeix un t' tal que $U_m(\hat{y}(t))$ és diferent del conjunt buit per a tot $t \geq t'$.

Dem. Fixem un natural m. Intentem trobar un t' i construir un element $s = (s_1, \cdots, s_m)$ de $U_m(\hat{y}(t))$ que sigui no buit per a tot $t \geq t'$.
Per $0 \leq h \leq n-1$, on n és tal que $p^n = q$, definim

$$z_h := \sum_{i=0}^{\infty} y_{is+h} p^{is+h}.$$

On y_j denota els coeficients de p^j de l'expansió p-àdica de y. Llavors per definició de z_h, $y = z_0 + \cdots + z_{s-1}$. Existeix un h' tal que $z_{h'}$ té un nombre infinit de nombres diferents de zeros en la seva expansió p-àdica. Considerem la successió $(a_k)_0^{\infty}$ formada per blocs de $y_{is+h'}$ còpies de $p^{is+h'}$ per a cada i, és a dir la successió $(a_0 = p^{0s+h'}, \cdots, a_{y_{0s+h'}} = p^{0s+h'}, a_{y_{0s+h'+1}} = p^{1s+h'}, \cdots, a_{y_{1s+h'}} = p^{1s+h'}, a_{y_{1s+h'+1}} = p^{2s+h'}, \cdots)$. Definim s_1 com la suma dels $q-1$ primers termes de (a_i), s_2 com la suma dels pròxims $q-1$ termes de (a_i) i així successivament fins s_{m-1}. Llavors escollim t' tal que $p^{t'}$ és el terme més petit de (a_i) tal que no està a cap suma s_k. Llavors per a tot $t \geq t'$ definim $s_m := \hat{y}(t) - (s_+ \cdots + s_{m-1})$. Definim $s := (s_1 + \cdots + s_m)$. Per construcció no hi ha cap desplaçament p-àdic en la suma $\sum_{k=1}^{m} s_k$. Per últim fent mòdul $q-1$ obtenim que cada s_k per $0 \leq k \leq m-1$ són suma de $q-1$ elements congruents amb 1 mòdul $q-1$ i per tant cada s_k és congruent amb 0 mòdul $q-1$. Així doncs $s \in U_m(\hat{y}(t))$. □

Sigui $\hat{y}(t)$ com en el lema anterior. Si veiem que per a tot m existeix un t_m tal que si $t \geq t_m$ llavors $v_m(y) = v_m(\hat{y}(t))$ haurem acabat el Cas 2, ja que llavors λ_y esta definit per a tot $m \geq 1$. Llavors per la primera igualtat en (10) obtenim

$$\lambda_y(m) - \lambda_y(m-1) = \lambda_{y(\hat{t})}(m) - \lambda_{\hat{y}(t)}(m-1)$$

per a $m \geq 2$ i per a tot $t \geq \max\{t_{m-2}, t_{m-1}, t_m\}$ on en el Cas 1 ja hem vist que la banda dreta de la igualtat és positiva i podríem donar el cas per acabat. Així el Cas 2 queda reduït a Cas 1. Intentem veure per tant que per a tot $m \geq 0$

existeix un t_m tal que si $t \geq t_m$ llavors $v_m(y) = v_m(\hat{y}(t))$.
Com que $v_0(y) = 0$ per a tot y, podem assumir que $m \geq 1$. Pel Lema 6.5 existeix un nombre positiu t' tal que $U_{m+1}(\hat{y}(t))$ és no buit per a tot $t \geq t'$, per tant per $t \geq t'$ podem definir $g^t = (g_1^t, g_2^t, \cdots, g_{m+1}^t)$ com l'element greedy de $U_{m+1}(\hat{y}(t))$. Notem que per a tot $x \in U_{m+1}(\hat{y}(t))$ tenim les igualtats

$$wt(x) = x_1 + \cdots + mx_m + (m+1)x_{m+1}.$$
$$0 = (m+1)\hat{y}(t) - (m+1)x_1 - \cdots - (m+1)x_{m+1}.$$

Combinant les igualtats obtenim

$$wt(x) - \hat{y}(t) = m\hat{y}(t) - (mx_1 + \cdots + 2x_{m-1} + x_m).$$

Per tant per Teorema 6.3 i (9) obtenim que per $t \geq t'$ tenim

$$v_m(\hat{y}(t)) = m\hat{y}(t) - \deg S_m(\hat{y}(t)) = mg_1^t + \cdots + 2g_{m-1}^t + g_m^t. \tag{15}$$

Deduïm d'aquí que $v_m(\hat{y}(t))$ depèn només dels primers m termes de g^t. L'objectiu ara és veure que existeix un t_m tal que si $t \geq t_m$ llavors l'única diferència entre g^t i g^{t_m} és el seu terme $(m+1)$-èssim.

Proposició 6.4. *Es té que* $g_i^{t_m} = g_i^{t_m}$ *per* $1 \leq i \leq m$ *i per tant* $v_m(\hat{y}(t)) = v_m(\hat{y}(t_m))$

Dem. Observem que el fet que $g^t = (g_1^t, g_2^t, \cdots, g_{m+1}^t) \in U_{m+1}(\hat{y}(t_m))$ implica

$$(g_1^t, \cdots, g_m^t, g_{m+1}^t + y_{t+1}p^{t+1}) \in U_{m+1}(\hat{y}(t+1)) \tag{16}$$

Per altra banda, per propietats del element greedy, el nombre $\hat{y}(t+1) - g_{m+1}^{t+1}$ és el mínim en el conjunt

$$\{\hat{y}(t+1) - x_{m+1} | x \in U_{m+1}(\hat{y}(t+1))\}.$$

Per tant per (16)

$$\hat{y}(t+1) - g_{m+1}^{t+1} \leq \hat{y}(t+1) - (g_{m+1}^t + y_{t+1}p^{t+1}) = \hat{y} - g_{m+1}^t.$$

És a dir $\hat{y}(t) - g_{m+1}^t$ és una successió d'enters que decreix de forma monòtona quan t creix. Com que més $\hat{y}(t) - g_{m+1}^t$ és sempre més gran que 0 ha d'existir un t' prou gran tal que per $t > t'$ la successió sigui constant. Triem un t_m més gran que aquest t' i que per tant compleix

$$\hat{y}(t) - g_{m+1}^t = \hat{y}(t_m) - g_{m+1}^{t_m} \tag{17}$$

per a tot $t \geq t_m$. Per (17) tenim que $U_m(\hat{y}(t_m) - g_{m+1}^{t_m}) = U_m(\hat{y}(t) - g_{m+1}^t)$. En particular l'element greedy serà el mateix en els dos conjunts. D'altre banda l'element greedy de $U_m(\hat{y}(t) - g_{m+1}^t)$ s'obté traient l'últim element de l'element greedy $g^t = (g_1^t, g_2^t, \cdots, g_{m+1}^t)$ de $U_{m+1}(\hat{y}(t))$. Per tant si $t \geq t_m$ llavors $g_i^t = g_i^{t_m}$ per $1 \leq i \leq m$. $\square$

En conclusió Proposició 6.4 juntament amb (15) implica que tenim $v_m(\hat{y}(t)) = v_m(\hat{y}(t_m))$ per a tot $t \geq t_m$.
Com que $y = \lim_{t\to\infty} \hat{y}(t)$ tenim

$$v_m(y) = v_m(\lim_{t\to\infty} \hat{y}(t)).$$

Com que la valoració v_∞ és una valoració discreta, hi ha un moment que per molt que t creixi, el seu valor pararà de crèixer. Per tant

$$v_m(\lim_{t\to\infty} \hat{y}(t)) = \lim_{t\to\infty} v_m(\hat{y}(t)).$$

Per la Proposició 6.4, això últim és igual a $v_m(\hat{y}(t_m))$. Llavors ens hem reduït al Cas 1 i per tant la demostració del Cas 2 conclou. $\square$

Annex

A.1 L'exponencial de Carlitz

Definició A.1.1 *Per $d > 0$, sigui $A(d) := \{a \in A | deg(a) < d\}$. Definim*

$$e_d(x) := \prod_{a \in A(d)} (x - a) = \prod_{a \in A(d)} (x + a)$$

per $x \in \mathbb{C}_\infty$

Aquesta funció té la propietat de ser $\mathbb{F}_q$-lineal (consultar capítol 3 de [6]). El següent resultat relaciona els elements de Definició 3.1 amb $e_d(x)$.

Teorema A.1.1

$$e_d(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i} x^{r^i} \frac{D_d}{D_i L_{d-i}^{r^i}}$$

La demostració es pot trobar al capítol 3 de [6].
Si fem tendir la d de $e_d(x)$ a infinit, obtenim l'exponencial de Carlitz.

Definició A.1.2 *La funció*

$$e_C(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{r^j}}{D_j}$$

rep el nom d'exponencial de Carlitz, on D_j és un dels elements definits en la Definició 3.1.

Aquesta funció està ben definida per a tot $x \in \mathbb{C}_\infty$, i la seva definició recorda al desenvolupament en sèrie de l'exponencial. Per veure com s'arriba a aquesta expresió i la convergència per a tot $\mathbb{C}_\infty$ consultar el capítol 3 de [6].
Per últim, l'exponencial de Carlitz compleix una equació funcional "similar" a la que compleix l'exponencial. En concret, sigui $a \in A$, llavors es compleix $e_C(ax) = C_a(e_C(x))$, on C_a és el mòdul de Carlitz, un funcional que té a com a paràmetre i que va de $\mathbb{C}_\infty$ a $\mathbb{C}_\infty$. Per la definició exacta del mòdul de Carlitz i com es dedueix l'anterior equació funcional consultar la secció 3.3 de [6].

A.2 Polígon de Newton

Definició A.2.1 *Sigui K un cos amb una valoració no arquimediana v, i sigui $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un element de $K[X]$. Llavors el polígon de Newton és la frontera de la regió convexa formada pels segments que uneixen* *els punts $P_i = (i, v(a_i))$, $a_i \neq 0$*

En el nostre cas però no tenim un polinomi d'un anell $K[X]$ si no que a nosaltres ens interessaria aplicar el polígon de Newton a un element de $K_\infty[[X]]$ per tant necessitem una altra definició.

Definició A.2.2 *Sigui v la valoració associada a K. Sigui $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in K[[X]]$. Sigui $S = \{A_i\} \subset \mathbb{R}^2$, on $A_i = (i, v(a_i))$. Llavors l'envolvent convexa inferior de S és el Polígon de Newton de $f(x)$*

En la definició hem utilitzat el concepte envolvent convexa inferior. Aquest terme es refereix a la intersecció de tots els semiplans que contenen la col·lecció de punts S. A diferència de l'envolvent convexa, la regió delimitada no té perquè ser tancada.
El següent resultat és el que hem aplicat a la secció 5.

Proposició A.2.1 *Si no existeix cap costat del polígon de Newton de $f(x)$ amb pendent $-t$ $(t > \rho(f))$, llavors $f(x)$ no té zeros en el cercle $v(x) = t$. Per contra si sí que té un costat amb pendent -t, $t > \rho(f))$ llavors $f(x)$ té exactament m zeros en $v(x) = t$ on m és la llargada de la projecció del costat del polígon de Newton de pendent -t a l'eix d'ordenades.*

En l'anterior proposició entenem com a costat qualsevol segment que uneixi dos punts amb les dues coordenades finites.

Proposició A.2.2 *Sigui$\{m_i\}$la seqüència de pendents del Polígon de Newton de $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$. Llavors$\{m_i\}$és una seqüència monòtona creixent.*

Les demostracions o esquemes de demostracions d'aquests resultats es poden trobar al capítol 2 de [6].

Si es dona el cas de que la projecció al eix X de cada costat és unitària, llavors les arrels de la funció a la que li estem fent el Polígon de Newton estan al cos de coeficients $K[[X]]$, és a dir K. Aquest fet es deu a com s'utilitza el Polígon de Newton per factoritzar polinomis, fet que s'estén a sèries de potències. Per més informació consultar Teorema 6.3, 6.4 del capítol 2 de [8]

A.3 Demostracions

A.3.1 Demostració de Proposició 3.1 *Sigui m un enter positiu. Considerem la suma*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \alpha^m$$

Llavors la suma anterior s'anul·la si q-1 no divideix m, i és igual a -1 quan sí

que ho fa.
Dem. Denotem per S la suma anterior. Considerem el grup $\mathbb{F}_q^*$. Aquest grup és cíclic i per tant per a un element $\xi \in \mathbb{F}_q^*$ es té que $\mathbb{F}_q^* = \langle \xi \rangle$. Per tant

$$S = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^m = \sum_{k=1}^{q-1} (\xi^k)^m.$$

Fent un canvi en els índex transformem l'expressió anterior en $\sum_{k=0}^{q-2} (\xi^{k+1})^m$. Llavors es té que

$$\sum_{k=0}^{q-2} (\xi^{k+1})^m = \sum_{k=0}^{q-2} \xi^{(k+1)m} = \xi^m (\sum_{k=0}^{q-2} \xi^{km}) = \xi^m (\sum_{k=0}^{q-2} \xi^{km} - \xi^{0m} + \xi^{(q-1)m}) = \xi^m S.$$

De l'expressió anterior arribem a que $(1 - \xi^m) S = 0$, i per tant deduïm que si $(1 - \xi^m)$ no s'anul·la, S s'anul·la. És a dir quan $q - 1$ no divideix m. Per altra banda si $q - 1$ divideix m, S és simplement sumar la unitat $q - 1$ vegades, per tant $S = -1$. □

A.3.2 Demostració Teorema 5.5: *ζ_A té una expressió equivalent al producte d'Euler del cas clàssic, és a dir*

$$\zeta_A(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

Dem. Definim $\mathbb{P}_k$ com els elements mònics irreductibles de A de grau menor o igual a k. Llavors el producte $H_k = \prod_{p \in \mathbb{P}_k} (1 - \frac{1}{p^s})$ convergeix uniformement a $\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})$: efectivament, existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $m, n > N$, es compleix que $|H_m - H_n|_\infty < \epsilon$. Per altra banda A és un domini d'Ideals principals, per tant tots els polinomis mònics de A són producte de polinomis irreductibles (que podem considerar mònics) de A. Sigui w un d'aquests polinomis irreductibles. Llavors $(1 - \frac{1}{w^s}) \zeta_A(s) = \sum_{a \in A - (w)} a^{-s}$, on hem denotat per $A - (w)$ al conjunt A excepte els múltiples de w. Per tant, si considerem $H_k \zeta_A(s)$ i fem tendir k a infinit obtenim

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s}) \zeta_A(s) = 1$$

on $\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})$ és un element de $\mathbb{C}_\infty$ i per tant $\zeta_A(s) = (\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s}))^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$ □

Bibliografía

[1] Anglès, B., Bandini, A., Bars Cortina, F., & Longhi, I. *Iwasawa main conjecture for the Carlitz cyclotomic extension and applications.* Mathematische Annalen (2020). 376(1–2), 475–523. https://doi.org/10.1007/s00208-019-01875-8.

[2] Carlitz, L. *On certain functions connected with polynomials in a Galois field.* Mathematische Annalen (1935). 1(2), 137–168. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00114-4.

[3] Carlitz, L. *Finite sums and interpolation formulas over* $GF[p^n, x]$ Duke Mathematical Journal (1948). 15(4), 1001–1012. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-48-01589-0.

[4] Conrad, Keith. *Jacobi sums and Stickelberger's congruence.* J. Enseign. Math (1995). (2) 41 , no. 1-2, 141–153.

[5] Engler, A. J., & Prestel, A. *Valued Fields by Antonio J. Engler, Alexander Prestel.*. Springer Berlin Heidelberg (2005). https://doi.org/10.1007/3-540-30035-X.

[6] Goss, David. *Basic Structures of Function Field Arithmetic.* Springer (1996).

[7] Goss, David. *Zeta phenomenology. Noncommutative geometry, arithmetic, and related topics.* Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2011. 159–182.

[8] Neukirch, J. *Algebraic number theory / Jürgen Neukirch.* Springer-Verlag. (1999).

[9] Serre, J. P. *Local fields / Jean-Pierre Serre; translated from the French by Marvin Jay Greenberg.* Springer-Verlag.(1979)

[10] Sheats, J. T. *The Riemann Hypothesis for the Goss Zeta Function for* $\mathbb{F}_q[T]$. Journal of Number Theory (1998). 71(1), 121–157. https://doi.org/10.1006/jnth.1998.2232.

[11] Wan, Daqing. *On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function.* J. Number Theory 58 (1996). no. 1, 196-212.