L'anàleg per a cossos de funcions de la conjectura de Shimura Taniyama Weil

Francesc Bars *

Exposició: 8 de Febrer 2001

1 Introducció

Quins problemes i conjectures clàssiques en cossos de nombres tenen una analogia en cossos de funcions, i com és aquesta analogia? Aquesta exposició intenta explicar aquesta pregunta referent a la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil. Recordem que aquesta conjectura, recentment 1995-99 provada, (Wiles [17] i en generalitat per Breuil-Conrad-Diamond-Taylor [1]), ha estat a la mira de tot amant de la Teoria de nombres després de que Ribet [12] va demostrar que la prova d'aquesta conjectura implicava el teorema de Fermat.

Conjectura 1.1 (Shimura-Taniyama-Weil). *Sigui E una corba el.líptica definida sobre $\mathbb{Q}$ amb conductor N. Llavors existeix un morfisme π definit sobre $\mathbb{Q}$ de la corba modular $X_0(N)$ en E,*

$$\pi : X_0(N) \rightarrow E.$$

En aquesta situació tenim una bijecció entre:

1. *classes d'isogènea sobre $\mathbb{Q}$ de corbes el.lictiques definides sobre $\mathbb{Q}$ amb conductor N.*

2. *Factors 1 dimensionals de la $\mathbb{Q}$-descomposició de la part nova de la Jacobiana de $X_0(N)$, que denotem per $J_0^{new}(N)$.*

3. *forma nova cuspidal normalitzada de $S_2(\Gamma_0(N))$ vector propi dels operadors de Hecke.*

En el cas de cossos de funcions, tenim espais de moduli groller per mòduls de Drinfeld de rang r amb estructura de nivell, [18]. El cas anàleg de les corbes modulars $X_0(N)$ en cossos de funcions correspon als espais de moduli $X_0(\mathfrak{n})$ ([18]) amb un punt ∞ del cos de funcions fixat i $\mathfrak{n}$ un ideal coprimer amb ∞. Aquestes corbes corresponen a certs espais de moduli groller anteriors amb $r = 2$ amb nivell $\infty\mathfrak{n}$. Drinfeld va provar que aquestes corbes tenen en la seva jacobiana les corbes el.líptiques definides sobre el mateix cos de funcions amb conductor igual al nivell de la corba modular $X_0(\mathfrak{n})$ i això ens permet fer una conjectura anàloga pel cas de cossos de funcions, veieu §2 per la seva formulació.

En el cas de cossos de funcions la prova és molt fàcil gràcies que tenim que les funcions L per corbes el.líptiques sobre cossos de funcions tenen les propietats desitjades (Deligne), cosa que a priori en el cas de corbes el.liptiques sobre $\mathbb{Q}$ aquest fet es dedueix després d'haver provat la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil, ja que es coneixia el resultat per la funció L associada a una

*Sota el support econòmic de DGI, BHA2000-0180.

forma cuspidal nova, però en principi no per la funció L per una corba el.líptica definida sobre $\mathbb{Q}$.

Aquest capítol de [16] esbossa els principals elements per la formulació de la conjectura pel cas de cossos de funcions, la prova i questions sobre paramatritzacions de Weil en el cas mes simple de $\mathbb{P}^1$ sobre un cos finit $\mathbb{F}_q$(que com a cos de funcions correspon a $\mathbb{F}_q(T)$). Per mes generalitat per tota corba C projectiva no singular definida sobre $\mathbb{F}_q$ veieu l'article original de Gekeler i Reversat [8], una altra referència interessant és l'article de Gekeler [7] en que fa un survey de l'article [8].

Notacions

Fixem notacions per tot aquest capítol. C denota una corba projectiva no singular, geomètricament connexa sobre el cos finit $\mathbb{F}_q$ de característica p, $q = p^e$. Fixem ∞ un punt de la corba C, $\mathbb{A}$ denota l'anell de funcions regulars en $C \backslash \{\infty\}$, K és el cos quocient, K_∞ la completació en la plaça ∞ de K. Per simplificar $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ i l'uniformitzant de ∞ $\frac{1}{T}$ i considerarem

$$(K, \infty, \mathbb{A}) = (\mathbb{F}_q(T), \infty, \mathbb{F}_q[T]),$$

observem que $cl(K) = 1$ cosa que fa menys tècnic la presentació dels resultats, presentarem també la situació general $(K, \infty, \mathbb{A})$ i algun dels detalls que comporta $cl(K) \neq 1$ en algunes situacions, per completitut en el cas general consulteu [8].

$\mathfrak{n}$ denota un ideal de $\mathbb{A}$,
$X_0(\mathfrak{n})$ la corba modular de Drinfeld associada al grup $\Gamma_0(\mathfrak{n})$, (veieu final de l'exposició 8 [18]).
$J_0(\mathfrak{n})$ denota la jacobiana associada a la corba $X_0(\mathfrak{n})$.

2 La conjectura

Sigui en aquest capítol $(K, \infty, \mathbb{A})$ una tripleta general. Donat $\mathfrak{n}$ un ideal no zero de A arbitrari, recordem que $J_0(\mathfrak{n})$ està definida sobre K i la varietat abeliana $J_0(\mathfrak{n})/K_\infty$ té reducció totalment split multiplicativa de la descripció analítica [18], i per tant cadascun dels seus factors K_∞-isògens té reducció split multiplicativa a ∞. Per tant per formular la conjectura de Shimura-Taniyama-Weil per cossos de funcions ens hem de restringir amb corbes el.liptique E definides sobre K amb reducció multiplicativa split en el primer fixat ∞ i per tant $cond(E) = \infty\mathfrak{n}$ amb $(\mathfrak{n}, \infty) = 1$. Observem ([Tate] Theorem 5.3 [14]) que E com a corba sobre K_∞ és una corba de Tate.

Conjectura 2.1 (Shimura-Taniyama-Weil per cossos de funcions). *Sigui E/K una corba el.líptica sobre K amb reducció totalment multiplicativa a ∞ i $cond(E) = \infty\mathfrak{n}$. Llavors existeix un morfisme dominant K-definit de corbes algebraiques,*

$$\pi : X_0(\mathfrak{n})_{/K} \to E_{/K},$$

π s'anomena parametrització de Weil.

Observació 2.2. 1. *La restricció split multiplicativa per trobar parametritzacions de Weil de corbes el.líptiques E sobre K no és molt restrictiva. Si $j(E)$ no és constant, sempre podem triar una plaça de K que la elegim com la plaça ∞ amb $v_\infty(j(E)) < 0$, llavors hi ha una extensió finita i separable K' de K i una extensió ∞' de ∞ en K' on $E/K'_{\infty'}$ té reducció multiplicativa split. Si $j(E)$ és constant, és a dir $j(E) \in \mathbb{F}_q$, aquestes corbes el.líptiques son classificades directament.*

2. *La conjectura de Shimura-Taniyama-Weil 1.1, ens dona una relació entre factors 1 dimensionals de la jacobiana de corbes modulars, amb certes formes cuspidals; sobre K obtindrem aquestes bijecció entre factors 1 dimensionals de la jacobiana per corbes modulars de Drinfeld i certes representacions cuspidals, observem que les formes modulars de Drinfeld ([11]) viuen en característica p i això no ens permet distingir diferents corbes el.liptiques, no així les representacions cuspidals (que es troben a característica zero). Veieu l'exemple 2 §5 (observació 5.2), on fem explicit que les formes cuspidals no ens diferencien corbes el.líptiques sobre K no K-isògenes.*

La conjectura ens afirma la existència de parametritzacions de Weil. Suposant la existència ens podem preguntar sobre la de menor grau, que correspondrà al factor isògen de la jacobiana de la corba modular de Drinfeld d'aquesta corba el.líptica, aquesta parametrització s'anomenarà seguint la teoria clàssica parametrització forta de Weil.

Anem a centrar-nos d'ara en endavant amb $(\mathbb{A}, \infty, K) = (\mathbb{F}_q[T], 1/T, \mathbb{F}_q(T))$. Aquesta exposició s'estructura bàsicament en dues parts. En la primera,§3, es fa un overwiev de la prova de l'anterior conjectura: la prova es basa en el fet bàsic que tenim equació funcional per la funció L per aquestes corbes el.liptiques, i utilitzant el treball de Jaquet-Langlands junt amb la relació entre formes cuspidals i jacobianes de corbes modulars de Drinfeld (Drinfeld) s'obté el resultat. La segona part, §4 i §5 tracta de la construcció de parametritzacions fortes de Weil, i explicitar-ne alguns exemples concrets, veient com en l'arbre de Bruhat-Tits tota informació de parametritzacions fortes de Weil en el cas de cossos de funcions.

3 Una pinzellada de la prova del teorema 2.1

Sigui E/K corba el.líptica sobre cos K i imposem que el j-invariant no prèn valor en $\mathbb{F}_q$ ($\mathbb{F}_q \subset K$) i $cond(E) = \infty\mathfrak{n}$. Considerem les realitzacions étales $H^1(E \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l)$ amb $l \neq p$ primer, obtenim associada una $Gal(K^{sep}/K)$-representació que anomenem π_E que forma un sistema compatible de representacions l-àdiques (veieu §8[2] per la definició, exemple 9.6 [2]). Considerem les representacions que s'obtenen twistant la representació anterior mitjançant χ, caràcters unitaris de I_K/K^*. Sigui $L_E(\chi, s)$ la funció L associada, llavors tenim els següents resultats de Grothendieck-Deligne (§9[2]):

1. Les funcions $L_E(\chi, s)$ són funcions polinomial en q^{-s} a coeficients a $\mathbb{Q}$;

2. satisfan, via una definició de factors epsilon (veieu [2]), l'equació funcional,

$$L_E(\chi, s) = \epsilon_E(\chi, s) L_E(\overline{\chi}, 2 - s).$$

De 2, la correspondència de Jacquet-Langlands, thm. 11.3 [5], ens afirma l'existència d'una única representació automorfa cuspidal ($\rho_E = \rho(\pi_E)$,V_{ρ_E}) en

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{n}) := \{\begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix} | \underline{c} \equiv 0 (mod \mathfrak{n})\}$$

on $\underline{\alpha}$ denota elements en l'anell de les àdeles de K.

Anem a precisar més aquesta representació cuspidal. Com E/K_∞ és una corba de Tate ([Tate] thm. 5.3[14]): $\pi_E|_{Gal(K_\infty^{sep}/K_\infty)}$ és la representació especial de Galois sp o sp_l de $GL_2(K_\infty)$ que es defineix per: $l \neq p = car(\mathbb{F}_q)$, definim $E_l = K_\infty^{unr}$((arrels l^r-èssimes de $\pi_\infty)_r$) on π_∞ és un uniformitzant per K_∞^{unr} i r recorre tots els naturals. Llavors la representació especial es defineix per la composició següent,

$$sp : Gal(K_\infty^{sep}/K) \to Gal(E_l/K_\infty) \cong$$

$$\cong Gal(K_\infty^{unr}/K_\infty) \ltimes Gal(E_l/K_\infty^{unr}) \cong \hat{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Z}_l \xrightarrow{i} GL(2, \mathbb{Q}_l)$$

definida per $i(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q_\infty^{-1} \end{pmatrix}$ i $i(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La representació automorfa cuspidal s'escriu $V_{\rho_E} = \otimes_v V_{\rho_E,v}$ on en la plaça ∞ és $(\rho_\infty, V_{\rho_{E,\infty}}) \cong (\rho_{sp}, V_{sp})$.

Utilitzant altre cop la correpondència de Jacquet-Langlands, obtenim que a la representació automorfa cuspidal li associem una forma automorfa cuspidal nova $\varphi_E \in V_{\rho_E}$ en un espai concret de formes automorfes cuspidals que en el nostre cas correspon a $W_{sp}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$, (consulteu III [15] per la definició explícita de forma cuspidal) espai ($\mathbb{C}$-e.v.) format per funcions,

$$Y(\mathcal{K}) := GL(2, K) \setminus GL(2, \mathfrak{U})/\mathcal{K}Z(K_\infty) \to \mathbb{C}$$

sota certes hipòtesis, on $\mathfrak{U}$ denota les ádeles de K, i $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_{fin,0}(\mathfrak{n}) \times \mathcal{I}_\infty$ amb

$$\mathcal{K}_{fin,0}(\mathfrak{n}) = \{\begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix} | \in \mathfrak{U}_{fin}, \underline{c} \equiv 0 mod \mathfrak{n}\}$$

(aquí fin denota tots els primers de K a excepció del primer fixat de K que anomenem ∞) i

$$\mathcal{I}_\infty = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in K_\infty, c \equiv 0 mod \infty\}$$

(el grup d'Iwahori), i el subindex sp, indica que la formes automorfes cuspidals transformen com sp en $GL(2, K_\infty)$.

La teoria de Jacquet-Langlands [2], afirma que la forma cuspidal φ_E és vector propi pels operadors de Hecke T_v (veieu §4.9[8] o [15] per definició i propietats dels operadors de Hecke en formes cuspidals), amb $v \nmid \mathfrak{n}\infty$ i té valors propis en la nostra situació $\lambda_v = q_v + 1 - \#E(k(v)) \in \mathbb{Q}$, amb $q_v = \#k(v)$ on $k(v)$ denota el cos residual de K en la plaça v.

Observeu que $W_{sp}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ és un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió finita, $Y(\mathcal{K})$ és un conjunt discret i les formes cuspidals automorfes tenen suport en un subconjunt finit de $Y(\mathcal{K})$ (1.2.3 [10]). La propietat de ser cuspidal dona una relació lineal finita de valors de $\varphi(\in W_{sp}(\mathcal{K}, \mathbb{C}))$, on els coeficients son volums de doble cosets amb nombres racionals com radis. Això ens permet tenir una estructura $\mathbb{Q}$-racional en $W_{sp}(\mathcal{K},\mathbb{C})$, que denotarem per $W_{sp}(\mathcal{K},\mathbb{Q})$, que compleix per tot cos F amb car 0,(en particular per $F=\mathbb{C}$)

$$W_{sp}(\mathcal{K},\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}} F = W_{sp}(\mathcal{K},F).$$

Hem obtingut una projecció

$$proj : W_{sp}(\mathcal{K},\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}\varphi_E,$$

ja que podem normalitzar φ_E definida dins la $\mathbb{Q}$-estructura del fet que T_v estan definits sobre $\mathbb{Q}$ amb autovalors racionals.

Questió 3.1. *Com relacionar $\varphi_E \in W_{sp}(\mathcal{K},\mathbb{Q})$ amb un factor 1-dimensional de la $J_0(\mathfrak{n})$ que sigui K-isògen amb E?*

Recordem ([18]) donat $\mathcal{K}$ tenim un problema de moduli de Drinfeld de nivell $\mathfrak{n}$ definit sobre K i tenim la corba $X_0(\mathfrak{n})$ corresponent a $\mathcal{K}_{0,f}$. Tenim en aquestes corbes de moduli uns operadors de Hecke, definits via v-isogènies (per una definció precisa consulteu (7.6) [7]) i que aquestos operadors es traslladen a $J_0(\mathfrak{n})$.

El resultat clau per respondre la pregunta 3.1 és el següent resultat anomenat llei de reciprocitat de Drinfeld (Prop.10.3 i Thm.2 [3]),

Teorema 3.2 (Drinfeld). *Sigui $l \neq p = carK$. Llavors*

$$J_0(\mathfrak{n})\otimes\mathbb{Q}(-1) = H^1_{et}(X_0(\mathfrak{n})\times C,\mathbb{Q}_l) \cong W_{sp}(\mathcal{K}_{0,f}\times\mathcal{I}_\infty,\mathbb{Q}_l)\otimes sp_l$$

canònicament, és a dir compatible amb operadors (no-ramificats) de Hecke i amb l'acció de $Gal(\overline{K_\infty}^{sep}/K_\infty)$ (que actua amb el terme de l'esquerra de manera natural del fet que aquest grup galoisà coincideix amb el grup d'automorfismes continus de C/K_∞ i que la corba modular de Drinfeld $X_0(\mathfrak{n})$ està definida sobre K).

Per construcció φ_E correspon a una forma automorfa nova de pes $\mathfrak{n}$. Per construir la parametrització anem a relacionar la Jacobiana de l'anterior resultat amb el factor 1 dimensional que ens dona a dins, necitem un endomorfisme de la Jacobiana on la imatge ens doni E o una corba K-isògena per poder acabar, nosaltres tenim un endomorfisme de W_{sp} donar per $proj$ anem doncs a obtenir-lo venint de la Jacobiana. Per questions de facilitar i no treballar en formes cuspidals, introduïm les cocadenes armòniques.

Sigui $\mathcal{T}$ l'arbre de Bruhat-Tits de $GL_2(K_\infty)$ i $Y(\mathcal{T})$ denota les arestes i $X(\mathcal{T})$ els vèrtexs (consulteu per més detalls de arbre de Bruhat-Tits, [4]).

Definició 3.3. *Denotem per B un grup abelià. Diem que φ és una co-cadena armònica de B per un arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{T}$ si és una aplicació*

$$\varphi : Y(\mathcal{T}) \to B$$

complint

1. *$\varphi(\overline{e}) = -\varphi(e)$, on $\overline{e}$ es la aresta e però en la direcció oposada,*

2. $\sum_{origen(e)=v} \varphi(e) = 0$ *per tot* $v \in X(\mathcal{T})$. *Al conjunt de cocadenes armòniques el denotarem per*

$$\underline{H}(\mathcal{T}, B).$$

Denotem per

$$\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\Gamma} \quad (1)$$

amb $\Gamma \subseteq GL(2, K)$ *un subgrup aritmètic, al conjunt de cocadenes armòniques que a més satisfant:*

3. $\varphi(\gamma e) = \varphi(e)\ \forall \gamma \in \Gamma$.

S'anomenen cuspidals i s'anota tot el seu conjunt per,

$$\underline{H}_{!}(\mathcal{T}, B)^{\Gamma}$$

el subconjunt de (1), complint que tinguin suport finit mod Γ*, això vol dir que a les semilinees de l'arbre de Bruhat-Tits de* $\mathcal{T}/\Gamma$ *s'anul.la en cada semilinea a partir d'un cert lloc, realment després de la primera aresta.*

S'anomenen doble cuspidals i s'anota per

$$\underline{H}_{!!}(\mathcal{T}, B)^{\Gamma}$$

si és cuspidal i a més s'anul.la a les puntes (és a dir s'anul.la en cadascuna i en tota aresta de les semilineas de $\mathcal{T}/\Gamma$*).*

Observació 3.4. *Els conceptes cuspidal i doble cuspidal coincideixen si* B *és lliure de torsió, veieu prop.3.10 i)[7].*

Treballar en l'arbre de Bruhat-Tits és molt més senzill, i en particular treballar en les co-cadenes armòniques. El proper resultat ens permet traslladar el nostre estudi que necessitem en formes automorfes a un estudi dins co-cadenes armòniques.

Teorema 3.5 (Drinfeld). *Sigui* F *un cos de característica 0, llavors,*

$$\underline{H}_{!}(\mathcal{T}, F)^{\Gamma_0(\mathfrak{n})} \cong W_{sp}(\mathcal{K}_{0,f} \times \mathcal{I}_{\infty}, F). \quad (2)$$

on $\Gamma_0(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{A}_K) | c \equiv 0(\mathfrak{n}) \right\}$.

Aquest isomorfisme (2) és natural, en el sentit que en les co-cadenes tenim definit uns operadors de Hecke i part nova i que aquest isomorfisme es compatible amb operadors de Hecke i la part nova. Definim en les co-cadenes cuspidals aquests conceptes que ens comporten bé via l'anterior isomorfisme (2).

Definició 3.6. *Sigui* $\mathfrak{m}$ *un ideal de* $\mathbb{A}$*, pensem* $\varphi \in GL(2, K_{\infty})$*, definim l'operador de Hecke* $T_{\mathfrak{m}}$ *via,*

$$(T_{\mathfrak{m}}\varphi)(g) := \sum \varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g),$$

on la suma recorre les tripletes $(a, b, d) \in \mathbb{A}^3$ *amb* a, d *mònics,* $(ad) = \mathfrak{m}$, $(a, \mathfrak{n}) = 1$ *i* $deg b < deg d$*. Aquests operadors actuen dins les formes cuspidals, commuten entre ells. Els operadors de Hecke* $T_{\mathfrak{m}}$ *amb* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = 1$ *s'anomenem no-ramificats.*

Per simplificar notació,

$$H(\mathfrak{n}) := \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\Gamma_0(\mathfrak{n})}.$$

Tenim en l'arbre de Bruhat-Tits un producte de Peterson, $(,)_\mu$ que es defineix de la forma següent,

Definició 3.7. *Donat un grup aritmètic Γ, és defineix el producte de Peterson per Γ,*

$$(,)_\mu : \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma \times \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma \to \mathbb{Z}$$

per

$$(f,g) = \sum_{e \in Y(\Gamma \backslash \mathcal{T})} f(e)g(e)vol_\mu(e),$$

on $vol_\mu(e) := \frac{\#(Z(K)\cap\Gamma)}{2\#(\Gamma_e)}$. Observem que cada aresta geomètrica $\{e, \overline{e}\}$ fa sumar dos cops aquest sumatori el mateix valor (fixem-nos que estem pensant sempre $e, \overline{e}$ son arestes de l'arbre de Bruhat-Tits). Multiplicant $\otimes_{\mathbb{Z}} F$ obtenim un producte escalar per qualsevol cos de caracterítica zero.

Si $\mathfrak{n}'|\mathfrak{n}$ tenim un morfisme natural per cada divisor mònic a de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$,

$$i_{a,\mathfrak{n}'} : H(\mathfrak{n}') \to H(\mathfrak{n})$$

donat per,

$$i_{a,\mathfrak{n}'}(\varphi)(g) := \varphi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g).$$

Definició 3.8. *La part nova de les formes cuspidals de $H(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q}$ és, ho anotarem per $(H(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q})^{new}$, el complement ortogonal en $H(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q}$ respecte al producte de Peterson de les images de tots els $i_{a,\mathfrak{n}'} \otimes \mathbb{Q}$ on $\mathfrak{n}'$ recorre tots els divisor propis de $\mathfrak{n}$. Denotem per $H(\mathfrak{n})^{new} := H(\mathfrak{n}) \cap (H(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q})^{new}$.*

Els operadors de Hecke $T_{\mathfrak{m}}$ actuen en $H(\mathfrak{n})^{new}$. Denotem per $\mathfrak{H}(\mathfrak{n})$ la $\mathbb{Z}$-algebra generada pels operadors no-ramificats de Hecke, i $\mathfrak{H}(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q}$ la $\mathbb{Q}$-àlgebra que és commutativa i semisimple, per tant un producte de cossos totalment reals. Com l'acció dels operadors de Hecke es compatible amb els dos isomorfismes de Drinfeld anteriors (3.2,3.5), això ens permet explicitar *proj* com un morfisme de la Jacobiana. Efectivament, per això recordeu ([4]):

1. tot endomorfisme de $Jac(X_0(\mathfrak{n}))$ es puja al seu tor associat $T_{\Gamma_0(\mathfrak{n})} := Hom(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})}, \mathbb{G}_m)$, on $\overline{\Gamma} := \Gamma^{ab}/tor(\Gamma^{ab})$;

2. hi ha una equivalència de categories,

$$\overline{\Gamma} \leftrightarrow T_\Gamma;$$

3. hi ha una aplicació injectiva natural,

$$j : \overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})} \to H(\mathfrak{n})$$

que correspon a la composició de les aplicacions canòniques següents: $\overline{\Gamma} \cong (\Gamma/\Gamma_f)^{ab} =: (\Gamma^*)^{ab}$, ($\Gamma_f$ és el subgrup normal de Γ generat pels elements d'ordre finit); recordant que Γ^* s'identifica canònicament amb el grup fonamental de $\Gamma \setminus \mathcal{T}$, obtenim $(\Gamma^*)^{ab} \cong H_1(\Gamma \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z})$, definim l'aplicació

$$\tilde{}: H_1(\Gamma \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z}) \to \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma$$

$$(\tilde{\varphi})(e) := \frac{\#(\Gamma_e)}{\#(\Gamma \cap Z(K_\infty))} \varphi(\tilde{e})$$

on e denota les arestes de $\mathcal{T}$ mod Γ (veieu una definició explícita de j en 3.3[8] orientant l'arbre de Bruhat-Tits).

Conjectura 3.9. *L'aplicació j és bijectiva per tot Γ grup aritmètic de $GL_2(K_\infty)$.*

L'anterior conjectura està provada pel cas concret de $C = \mathbb{P}^1$ en que estem treballant (no ho està per C genèrica).

De les consideracions 1,2 i 3 anteriors tenim el diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd} & End(J_0(\mathfrak{n})) \arrow[d] \\ \mathfrak{H}(\mathfrak{n}) \arrow[ur] \arrow[r] & End(H(\mathfrak{n})) \end{tikzcd} \tag{3}$$

Recordem que $T_\mathfrak{m}$ són morfismes K-racionals de $J_0(\mathfrak{n})$, per tant $\mathfrak{H}(n)$ ens dona una descomposició llevat de K-isogènia per $J_0(\mathfrak{n})$, és a dir,

$$J_0(\mathfrak{n}) \sim_K \prod A_i$$

amb A_i varietats abelianes definides sobre K.

Observem que $T_\mathfrak{m}$ els podem restringir en la part nova i via l'isomorfismes canònics, teoremes 3.2,3.5, tenim que la part nova de les co-cadenes cuspidals correspon a la part nova de la Jacobiana (definida de la manera usual). Denotem per $\mathfrak{H}(n)^{new}$ la $\mathbb{Z}$-àlgebra de Hecke $\mathfrak{H}(n)$ que pensem com l'algebra generada pels operadors de Hecke no ramificats, però pensant els operadors actuant en la part nova. Tenim el diagrama

$$\begin{tikzcd} & End(J_0^{new}(\mathfrak{n})) \arrow[d] \\ \mathfrak{H}(\mathfrak{n})^{new} \arrow[ur] \arrow[r] & End(H(\mathfrak{n})^{new}) \end{tikzcd} \tag{4}$$

La $\mathbb{Q}$-algebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{n})^{new} \otimes \mathbb{Q}$ és commutativa semisimple i per tant un producte de cossos totalment reals, on obtenim que $H^{new}(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{C}$ té una base de vectors

propis φ per l'acció de $\mathfrak{H}(\mathfrak{n})^{new}$. Sigui $\lambda(\varphi, \mathfrak{m})$ el valor propi per $T_{\mathfrak{m}}$. A més tenim,
principi de multiplicitat fort: donats $\varphi, \varphi' \in H^{new}(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{C}$ amb $\lambda(\varphi, \mathfrak{m}) = \lambda(\varphi', \mathfrak{m})$ per quasi tot $\mathfrak{m}$ llavors $\varphi' = cte\varphi$.
D'aquí, $\mathfrak{H}^{new}(\mathfrak{n}) \otimes \mathbb{Q}$ és una $\mathbb{Q}$-algebra semisimple de dimensió $g^{new} := dim J_0(\mathfrak{n})^{new} = rang_{\mathbb{Z}} H^{new}(\mathfrak{n})$, i per tant per la classificació dels anells d'endomorfismes per varietats abelianes dona l'acció de l'àlgebra de Hecke una descomposició completa de la $J_0(\mathfrak{n})^{new}$ via K-isogènea.

Per tant, $proj$ poden pensar-lo $proj \in End(J_0(\mathfrak{n})^{new}) \otimes \mathbb{Q}$ donat per φ_E (via l'isomorfisme 3.5) amb $\lambda(\varphi_E, \mathfrak{m})$ són enters, per tant corresponent a un factor 1-dimensional en la descomposició de la jacobiana en K, és a dir tenim E' una corba el.líptica definida sobre K, que és un K-factor dins $J_0^{new}(\mathfrak{n})$, i tenim una parametrització de Weil de E' que correspon a la composició de l'aplicació natural de $X_0(\mathfrak{n})$ a la jacobiana i la projecció de la jacobiana a la corba E'.

Per acabar ens falta únicament demostrar que les corbes E' i E, ambdues definides sobre K, son K-isògenes, obtenint així una parametrització de Weil per a E. Com E i E' coincideixen com $Gal(K^{sep}/K)$-submòduls de $H^1_{et}(X_0(\mathfrak{n}) \times C, \mathbb{Q}_l)$ concloem.

La prova anterior ens dona l'anàleg d'equivalencies del teorema 1.1 pel cas de cossos de funcions,

Teorema 3.10. *Hi ha una bijecció entre,*

1. *conjunt de classes de K-isogènia de corbes el.líptiques definides sobre K amb conductor $\mathfrak{n}\infty$;*

2. *factors 1-dimensionals (mòdul K-isogènies) en la K-descomposició de $J_0^{new}(\mathfrak{n})$ de $Jac(X_0(\mathfrak{n}))$;*

3. *classes (mòdul multiplicació d'escalars no nul) de vectors propis pels operadors de Hecke amb valors racionals en l'espai de formes cuspidals*

$$W_{sp}^{new}(\mathcal{K}_{f,0}(\mathfrak{n}) \times \mathcal{I}_\infty, \mathbb{C})$$

o en l'espai de co-cadenes cuspidals $\underline{H}_!^{new}(\mathfrak{n})^{\Gamma_0(\mathfrak{n})} \otimes \mathbb{C}$.

4 Vers parametritzacions fortes de Weil

Sigui E una corba el.líptica definida sobre K and $cond(E) = \infty\mathfrak{n}$. Hem construït en l'apartat anterior una corba el.líptica E' definida sobre K i K-isògena a E, que és un factor de la $Jac(X_0(\mathfrak{n}))$, i a més per construcció aquesta E' és única. Recordeu que anomenem parametrització (dèbil) de Weil per la corba el.lípitica E a un morfisme no trivial K-definit, $\pi : X_0(\mathfrak{n}) \to E$, diem que és forta si via K-morfismes tota parametrització dèbil de Weil per corbes el.líptiques K-isògenes a E factoritza via π. Observem que donada E l'apartat anterior ens prova l'existènica de la parametrització forta de Weil donada per la projecció de la $Jac(X_0(\mathfrak{n}))$ a E' factor K-isògen a E la corba el.liptica inicial, on la parametrització de Weil $X_0(\mathfrak{n}) \to E'$ és forta.

Anem a explicitar la construcció de parametritzacions fortes de Weil.

Estudiem primer sobre C, busquem E' i per tant una xarxa en C^*. De ([4]),

$$1 \to \overline{\Gamma_0(N)} \xrightarrow{\bar{c}} Hom(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})}, \mathbb{C}^*) \to J_0(\mathfrak{n})(C) \to 0;$$

i de la identificació $j : \underline{H}_!(\mathcal{T},\mathbb{Z})^{\Gamma_0(N)} \to \overline{\Gamma_0(N)}$, triem $\varphi \in \underline{H}_!(\mathcal{T},\mathbb{Z})^{\Gamma_0(\mathfrak{n})}$, vector propi amb valors propis enters, i a més primitiu, és a dir $\varphi \in j(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})})$ però $\varphi \notin nj(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})})$ per $n \in \mathbb{N}_+$. Definim així l'aplicació

$$ev_\varphi : Hom(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})}, C^*) \to C^*$$

$$f \mapsto f(\varphi).$$

Teorema 4.1 (Gekeler-Reversat). *Denotem per* $\Lambda := Imag(ev_\varphi) \subset C^*$ *(realment* $\subset K_\infty$*). Llavors* $\exists t \in C^*$, $|t| < 1$ *on* $\Lambda = t^{\mathbb{Z}}$.

Observació 4.2. Quan $\mathbb{A}$ no és $\mathbb{F}_q[T]$, $\Lambda = \mu_d \times t^{\mathbb{Z}}$ on μ_d són les arrels d-èssimes de la unitat en K_∞^* on d és un divisor de $q_\infty - 1$, (9.5.1,2 [8]).

Tenim el següent diagrama commutatiu,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})} & \overset{\bar{c}}{\to} & Hom(\overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})}, C^*) & \to & J_0(\mathfrak{n})(C) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & ev_\varphi \downarrow & & pr_\varphi(C) \downarrow & & \\ 1 & \to & \Lambda & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & C^*/\Lambda & \to & 0 \end{array} .$$

Observem:

- C^*/Λ és isomorf als C-punts de la corba el.líptica de Tate $Tate(t)$, per tant C^*/Λ correspon a una corba el.líptica E_φ definida sobre K_∞ amb C-punts C^*/Λ (Tate, thm.5.3 [14]),

- tenim que pr_φ és una aplicació analítica de varietats abelianes definida sobre K_∞, utilitzant Gaga (treballs de Raynaud i Kiehl) obtenim que pr_φ és algebraica.

-cada $T_\mathfrak{m}$ no ramificat dona un $End_{K_\infty}(E_\varphi)$ (realment $T_\mathfrak{m}$ estan definits en K en el cas $A = \mathbb{F}_q[T]$)que correspon a multiplicar per $\lambda(\varphi, \mathfrak{m})$ que per les hipòtesis de φ és enter (a $\mathbb{Z}$). Per tant la classe isogènia de E_φ correspon al subespai $\mathbb{Q}\varphi \subseteq W_{sp}(\mathcal{K}_0(\mathfrak{n}) \times \mathcal{I}_\infty, \mathbb{Q})$.

-obtenim del punt anterior que pr_φ pertany a l'algebra de Hecke dels operadors no ramificats que estan definits en el nostre cas sobre K per tant pr_φ està definida sobre K

-$X_0(\mathfrak{n})$ i $J_0(\mathfrak{n})$ estan definides sobre K; considerem l'algebra de Hecke dels operadors no ramificats dins $End(J_0(\mathfrak{n}))$. Tenim $E_\varphi = J_0(\mathfrak{n})/M$ on M és una varietat abeliana K-racional que correspon a l'ortogonal de pr_φ en l'algebra de Hecke dins $End(J_0(\mathfrak{n}))$. Per thm.1[Shimura] [13] E_φ està definida sobre K.

Observació 4.3. *Els tres punts anteriors en la situació* $\mathbb{A}$ *general, són correctes sobre el cos de classes de Hilbert* H *de* K*. Per obtenir la parametrització modular forta de Weil que busquem i* E_φ *a* K *en el cas general, necessitem treballar cada element de* S *en la partició de la Jacobiana, on* $\#S = cl(K)$*, i recordeu que* $J_0(\mathfrak{n})(C) = \prod_{x \in S} J_{\Gamma_x}(C)$.

Fixem ∞ com K-punt racional, obtenim la parametrització forta de Weil π_φ per la composició,

$$X_0(\mathfrak{n}) \to J_0(\mathfrak{n}) \to E_\varphi$$

on la primera aplicació és la inclusió usual amb el punt K-racional triat i la segona correspon a pr_φ.

Observació 4.4. *Pel cas de corbes modulars clàssiques $X_0(N)$ sobre $\mathbb{Q}$, per determinar la classe isogènia de E_φ és suficient donar la forma cuspidal i per la parametrització forta de Weil, via la conjectura de la constant de Manin, la forma modular ens la determina. Pel cas de cossos de funcions no serà suficient com ho veurem en un exemple, però si que donada una parametrització modular poder associar-hi una forma modular. Anem a associar-li. Denotem per u_φ la funció theta associada a $\varphi \in \overline{\Gamma_0(\mathfrak{n})}$ ([4]), tenim el següent diagrama commutatiu,*

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega & \overset{u_\varphi}{\to} & C^* & \to & C^*/\Lambda \\
\downarrow & & & & || \\
\Gamma \setminus \Omega & & & & E_\varphi(C) \\
\downarrow & & & & || \\
Y_0(\mathfrak{n})(C) & \to & X_0(\mathfrak{n})(C) & \overset{\pi_\varphi}{\to} & E_\varphi(C)
\end{array}$$

C^* denotem amb la coordenada w, la diferencial associada a E_φ és $\frac{dw}{w}$, tenim llavors

$$\pi_\varphi^*(\frac{dw}{w}) = \frac{u'_\varphi(z)}{u_\varphi(z)}dz$$

on obtenim $f(z) := \frac{u'_\varphi(z)}{u_\varphi(z)}$ dona una forma cuspidal en $M^2_{2,1}(\Gamma_0(\mathfrak{n}))$ (veieu [11]).

5 Alguns exemples de parametritzacions de Weil.

Tenim el següent diagrama commutatiu (6.5 [8]),

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\Gamma} \arrow[dl, "\overline{u}"'] \arrow[dr, "j"] & \\
\Theta_h(\Gamma)/C^* \arrow[rr, "\overline{r}", "\cong"'] \arrow[d, "\theta"] & & \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma \arrow[d, "red"] \\
M^2_{2,1}(\Gamma, \mathbb{F}_p) \arrow[rr, "residu \atop \cong"] & & \underline{H}_{!!}(\mathcal{T}, \mathbb{F}_p)^\Gamma
\end{tikzcd} \tag{5}$$

on j definida anteriorment, red denota reducció de coeficients modul p, $residu(f)$ li associem la forma diferencial holomorfa ω (veieu [11]), triem $e \in Y(\mathcal{T})$, es tria un disc convenient en geometria rígida (veieu §1.8 [8]), i $residu(f)(e)$ és el residu del desenvolupant de la forma en aquest disc que correspon a la variable z de l'aplicació edifici amb $\lambda(z) = origen(e)$(veieu tot seguit); $\overline{u}(\varphi) = u_\varphi$ és l'aplicació natural que a cada forma cuspidal li associem la funció theta; $\theta(u_\varphi) = \frac{u'_\varphi}{u_\varphi}$. L'aplicació $\overline{r}$ es defineix de la manera següent, sigui $\lambda : \Omega \to \mathcal{T}(\mathbb{R})$ l'aplicació edifici, definim $r(u_\varphi)(e) := log_{q_\infty}|\frac{f(w)}{f(z)}|$ on $\lambda(z) = origen(e)$ i $\lambda(w) = final(e)$, definim $\overline{r}$ el pas mòdul C^*.

Observeu que tenim un producte escalar de Petersson, aquest es pot traslladar a $\underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma$ (fent el càlcul més simple) de la manera següent: siguin $\alpha, \beta \in \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma$ llavors

$$(\alpha, \beta) = \sum_{e \in Y(\Gamma \setminus \mathcal{T})} \alpha(e)\beta(e)vol_\mu(e)$$

on $vol_\mu(e) = \frac{1}{2\#\tilde{\Gamma}_e}$, (aquest 2 apareix del fet que $e, \overline{e} \in Y(\Gamma \setminus \mathcal{T})$, estem pensant que no hi ha orientació). Saber-ne el valor ens permetrà calcular grau de π_φ;

Proposició 5.1 (Gekeler). *Sigui $\varphi \in \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\Gamma_0(\mathfrak{n})}$ com en §4 primitiu.*

1. *Sigui $\mathbf{m}(\varphi) := min\{(\varphi, \alpha) > 0 | \alpha \in \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\Gamma_0(\mathfrak{n})}\}$. Llavors*

$$\mathbf{m}(\varphi) = -v_\infty(j(E_\varphi)),$$

   és a dir la valoració a ∞ del j-invariant de la corba el.liptica de la parametrització modular forta de Weil.

2. *Denotem $\mathbf{r}(\varphi) := (\varphi, \varphi)/m(\varphi)$. Llavors $\mathbf{r}(\varphi) \in \mathbb{N}$ i $\mathbf{r}(\varphi) = deg\pi_\varphi$, és a dir el grau de la parametrització forta de Weil.*

Anem a donar dos exemples de buscar les equacions de los corbes el.liptiques que donen totes les parametritzacions modulars d'una corba modular i el grau de la parametrització.

Exemple 1. Cas $X_0(T^2(T-1))$ en $\mathbb{A} = \mathbb{F}_2[T]$.
Tenim que l'arbre de Bruhat-Tits $\Gamma \setminus \mathcal{T}$ és de la forma,

Observem que

$$\overline{\Gamma_0(T^2(T-1))} \cong \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\Gamma_0(T^2(T-1))} \cong H_1(\Gamma_0(T^2(T-1)) \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z}).$$

Sigui φ el generador de $\underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\Gamma_0(T^2(T-1))}$. Recordem que φ s'anul.la en les semi-liníes (prop.3.1.4[8]) i que $\sum_{terminal(aresta\ e)=v, en\ \Gamma \setminus \mathcal{T}} [\Gamma_v : \Gamma_e]\varphi(e) = 0$, i $\sum [\Gamma_e : \Gamma_v] = q_\infty + 1 = 3$. Com tenim sempre tres arestes que van a cada punt $[\Gamma_e : \Gamma_v] = 1$, tenim $\varphi(e_i) = -\varphi(\tilde{e_{i+1}})$ i recordant $\varphi(e_i) = -\varphi(\tilde{e_i})$, tenim ($\varphi$ és un generador)

$$(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{6} (\varphi(e_i)^2 vol_\mu(e_i) + \varphi(\tilde{e_i})^2 vol_\mu(\tilde{e_i})) =$$

$$\sum_{i=1}^{6} (1^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2}) = 6.$$

D'aquí obtenim $\mathbf{m}(\varphi) = 6$ i $\mathbf{r}(\varphi) = 1$, (on el valor de $\mathbf{m}(\varphi)$ era evident que de l'arbre de Bruhat-Tits). Sabem que $\mathbf{m}(\varphi) = -v_\infty(E_\varphi)$ i tenim un isomorfisme

$$X_0(T^2(T-1)) = E_\varphi \to Tate(t)$$

sobre K_∞ on $v_\infty(t) = \mathbf{m}(\varphi)$. Anem però a descriure explícitament E_φ.
Considerem $E : Y^2 + TXY + TY = X^3$ corba el.líptica definida sobre $\mathbb{F}_2(T)$. Un càlcul prova $cond(E) = T^2(T-1)\infty$, per tant té una parametrització de

Weil, on obtenim per §2 que és K-isògena amb E_φ. Sigui $\eta : E_\varphi \to E$ aquesta parametrització. Observem que $j(E) = T^8/(T-1)^2$ per tant $E_\varphi \cong Tate(t)$ i $E \cong Tate(t')$ sobre K_∞ amb $v_\infty(t) = v_\infty(t')$. Recordem llavors si $Tate(t)$ és isògena a $Tate(t')$ sobre K_∞ amb $v_\infty(t) = v_\infty(t')$ llavors és isomorfisme. Aplicant-ho a η obtenim que sobre K_∞ és isomorfisme, per tant obtenim que η és isomorfisme sobre K, d'on

$$X_0(T^2(T-1)) \cong_{/K} (Y^2 + TXY + TY = X^3).$$

Exemple 2. Cas $X_0(T(T^2+T+1))$ en $\mathbb{A} = \mathbb{F}_2[T]$. Denotem per $\Gamma = \Gamma_0(T(T^2+T+1))$. L'arbre de Bruhat-Tits és de la forma,

Aquí tenim $H_1(\Gamma \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z}) = \underline{H}_!(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ on triem l'orientació de γ_1, γ_2 indicada en l'arbre de Bruhat-Tits. Es pot provar que una base de vectors propis pels operadors de Hecke a coeficients racionals són,

$$\varphi_1 = \gamma_1 + \gamma_2,\ \varphi_2 = -\gamma_1 + \gamma_2.$$

Amb consideracions semblants a l'exemple anterior s'obté,

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{2}((\gamma_1+\gamma_2)(e_i)^2 + (\gamma_1+\gamma_2)(\tilde{e_i})^2) =$$

$$(\sum_1^6 1) + \frac{1}{2}((\gamma_1+\gamma_2)(e_7)^2 + (\gamma_1+\gamma_2)(\tilde{e_7})^2) = 6 + 0$$

per la orientació triada de γ_1 i γ_2 que un pren positiu i l'altre negatiu, semblantment

$$(\varphi_2, \varphi_2) = 6 + \frac{1}{2}((\gamma_1+\gamma_2)(e_7)^2 + (\gamma_1+\gamma_2)(\tilde{e_7})^2) = 10.$$

Per calcular els valors minimals pel producte de Peterson s'obté,

$$(\varphi_1, \gamma_1) = \frac{1}{2}(2(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0 \times 1 + 0^2 + 0^2 + 0^2)) = 3,$$

$$(\varphi_2, \gamma_2) = \frac{1}{2}(2(0 + 0 + 0 + 2 \times 1 + 1^2 + 1^2 + 1^2)) = 5,$$

d'aquí obtenim que els graus de les parametritzacions $\mathbf{r}(\varphi_1) = 6/3 = 2 = 10/5 = \mathbf{r}(\varphi_2)$ obtenim que $X_0(T(Y^2+T+1))$ és una corba modular de Drinfeld biel.líptica. Tenim

$$Jac(X_0(T(T^2+T+1))) \sim_{K-isog} E_1 \times E_2$$

on E_i són corbes el.líptiques definides sobre K on sobre K_∞, $E_i \cong Tate(t_i)$ amb $v_\infty(t_i) = \begin{cases} 3, & i=1 \\ 5, & i=2 \end{cases}$
Amb arguments semblants al exemple anterior obtenim

$$E_1 = (Y^2 + (T+1)XY + Y = X^3 + T(T^2+T+1))$$

amb $j(E_1) = (T+1)^{12}/(T(T^2+T+1))^3$, i

$$E_2 = (Y^2 + (T+1)XY + Y = X^3 + X^2 + T + 1)$$

amb $j(E_2) = (T+1)^{12}/T^5(T^2+T+1)$.

Notem que en corbes modulars de Drinfeld hi tenim també involucions Atkin-Lehner, definides anàlogament al cas clàssic, denotades per $w_{\mathfrak{a}}$ amb $\mathfrak{a}$ un ideal de K dividint $\mathfrak{n}$ i coprimer amb $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$. En aquest exemple es pot provar,

$$E_1 = X_0(T(T^2+T+1))/w_{(T)}$$

$$E_2 = X_0(T(T^2+T+1))/w_{(T^2+T+1)},$$

on tenim una corba biel.líptica amb involucions biel.líptiques donades per involucions del tipus Atkin-Lehner.

Observació 5.2. *El cas clàssic de corbes modulars, les formes modulars ens donen la decomposició en factors K-isògens de la Jacobiana. En el cas de mòduls de Drinfeld necessitem formes automorfes, no es suficient l'estudi de formes modulars en $M^2_{2,1}(\Gamma, \mathbb{F}_p)$ (mireu el diagrama (5)). En el nostre exemple ($\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_2$) tenim que $\varphi_1 \equiv \varphi_2 (mod\ 2)$. Això implica $u'_{\varphi_1}/u_{\varphi_1} = u'_{\varphi_2}/u_{\varphi_2}$, com formes modulars són la mateixa però defineixen diferent factors no K-isògens en la jacobiana de la corba modular de Drinfeld.*

6 Algunes Taules

Centrem-nos en el cas $\mathbb{F}_q(T)$. Considerem $\mathfrak{n}$ com abans amb el grup que correspon a $X_0(\mathfrak{n})$, i anem a intentar trobar quantes parametritzacions fortes hi ha per nivell $\mathfrak{n}$, amb $\mathfrak{n}$ petit, és a dir en restringirem amb $deg(\mathfrak{n}) \leq 3$. Ens restringim com sempre al cas $(\mathbb{F}_q[T], \infty = 1/T, \mathbb{F}_q(T))$. Consulteu per les proves i com Gekeler [6].
Anem a entendre primer l'espai de formes cuspidals.

Lema 6.1 (Gekeler, prop.2.1 and §3.1 [6]). *Si $deg(\mathfrak{n}) \leq 2$ no hi ha cap forma automorfa cuspidal amb conductor $\mathfrak{n}\infty$. Per cas $deg(\mathfrak{n}) = 3$ es segueix de la taula seguent:*

tipus	$dimW_{sp}$
$\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}_1$	q
$\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_2$	q
$\mathfrak{q}_3$	q
$\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1^2$	*q-1*
$\mathfrak{q}_1^3$	*q-1*

on els subindexs $1, 2$ o 3 denota el grau de l'ideal de $\mathbb{A}$, on aquests ideals corresponen a la descomposició en ideals primers de $\mathfrak{n}$.

Es pot estudiar l'àlgebra de Hecke $\mathfrak{H}(\mathfrak{n})\otimes\mathbb{Q}$ i tots els factors en $\mathbb{Q}$ ens donaran corbes K definides, anem a fer una llista, per veure l'algorisme i com es pot fer consulteu [6] (observeu que els dos primers exemples de la taula són precisament els exemples de la §5);

$q(\ \mathbb{F}_q(T))$	Polinomi$=\mathfrak{n}$	$\mathfrak{H}(\mathfrak{n})\otimes\mathbb{Q}$	#c.e. amb $cond=\infty\mathfrak{n}$ (mod$K$-isog)
2	$T(T^2+T+1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	2
2	T^3+T+1	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	0
2	$T^2(T-1)$	$\mathbb{Q}$	1
2	T^3	$\mathbb{Q}$	1
3	$T(T^2-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	3
3	$T(T^2+T+2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{17})$	1
3	$T(T^2-2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	1
3	T^3+T^2+2	$\mathbb{Q}(X^3+3X^2-X-4)$	0
3	T^3-T+1	$\mathbb{Q}(X^3+X^2-4X+1)$	0
3	$T^2(T-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	2
3	T^3	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	2
4	$T(T^2+T+v)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})\times\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	0
4	T^3+T+1	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\times\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	0
4	T^3-v	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(X^3+X^2-9X+1)$	1
4	$T^2(T-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	1
4	T^3	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	3
5	$T(T-1)(T-2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	3
5	$T(T^2+T+1)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{7}\times\mathbb{Q}(X^3-4X+2))$	0
5	$T(T^2+T+2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{37})\times\mathbb{Q}(\sqrt{17})$	1
5	$T(T^2-2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(\sqrt{13})\times\mathbb{Q}(\sqrt{21})$	1
5	T^3+T^2+1	cos de grau 5	0
5	T^3+2T+1	cos de grau 5	0
5	$T^2(T-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$	4
7	$T(T-1)(T-2)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times$altr.	3
7	$T(T-1)(T-3)$	$\mathbb{Q}\times$altres cossos($\neq\mathbb{Q}$)(=:altr.)	1
7	$T(T^2+T+3)$	$\mathbb{Q}\times$altr.	1
7	$T(T^2+T+4)$	altr.	0
7	$T(T^2+T+6)$	altr.	0
7	$T(T^2-3)$	$\mathbb{Q}\times$altr.	1
7	T^3+T+1	altr.	0
7	T^3+3T+2	altr.	0
7	T^3-2	$\mathbb{Q}\times$altr.	1
7	T^3-4	$\mathbb{Q}\times$altr.	1
7	$T^2(T-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times$altr.	4
8	$T(T^2+T+1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times$altr.	2
..	...	...	...
9	$T(T^2-1)$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times$altr.	3
9	$T(T-1)(T-v)$	$\mathbb{Q}\times$altr.	1
	.....	....	...

References

[1] *C.Breuil,B.Conrad,F.Diamond,R.Taylor*:On the modularity of elliptic curves over **Q**: wild 3-adic exercises. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 843–939.

[2] *P. Deligne*: Les constantes des quations fonctionnelles des fonctions L, in Modular Functions of One Variable II, LNM 349, pp.501-597 (1972).

[3] *V.G. Drinfeld*: Elliptic Modules. Math.Sbornik 94, 594-627(1974); English Transl.:Math. USSR-Sbornik 23, 561-592 (1976).

[4] *C. Infante*: en [16].

[5] *H.Jacquet, R.P.Langlands*:Automorphic forms on GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. vii+548 pp

[6] *E.U. Gekeler*: Automorphe Formen uber $\mathbb{F}_q(T)$ mit kleinem Fuhrer. Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 55, 111-146 (1985).

[7] *E.-U. Gekeler* : Jacquet-Langlands theory over K and relations with elliptic curves. Lecture 12, 224-257 in [9].

[8] *E.-U.Gekeler, M. Reversat*:Jacobians of Drinfeld modular curves. J. Reine Angew. Math. 476 (1996), 27–93.

[9] *Gekeler,van der Put,Reversat,Van Geel ed.*: Drinfeld modules, modular schemes and applications. Proceedings of the workshop held in Alden-Biesen, September 9–14, 1996. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1997. xiv+361 pp.

[10] *G. Harder*:Chevalley groups over function fields and automorphic forms. Ann. Math. 100, 249-306 (1974).

[11] *E.Nart*: en [16].

[12] *K.A. Ribet*:On modular representations of Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) arising from modular forms. Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 431–476.

[13] *G.Shimura*:On the factors of the Jacobian variety of a modular function field. J.Math.Soc.Japan 25, 523-544 (1973).

[14] *J.H. Silverman*: Advanced Topics in the arithmetic of elliptic curves. GTM 151, Springer (1994).

[15] STNB 1996-97, *P.Bayer i al.*: Representacions automorfes de $GL(2)$. Notes del Seminari, UB-UAB-UPC, Barcelona (1997).

[16] STNB 2001-2002, *F. Bars,E. Nart,X. Xarles i al.*: Mduls de Drinfeld. Notes del Seminari Teoria de Nombres UB-UAB-UPC, Barcelona (2002).

[17] *A. Wiles*:Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

[18] *X. Xarles*: Corbes modulars de Drinfeld, pag. in [16].

Francesc Bars Cortina
Depart. Matemàtiques,
Edifici C,
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona,
Spain.
e-mail: francesc@mat.uab.es