Capítol 3

La conjectura de Fontaine-Mazur

Francesc Bars

Exposició: 20 de Gener 2004.

3.1 Introducció

Aquesta exposició únicament intenta introduir els ingredients bàsics pel plantejament de la conjectura Fontaine-Mazur formulada en [11]. La conjectura formula de manera precisa la següent idea: representacions del grup de Galois $Gal(\overline{K}/K)$ amb K un cos de nombres que venen de les representacions locals d'un tros d'un motiu sobre K amb coeficients amb un altre cos de nombres E tenen unes propietats algebraiques fixes i que a més aquestes propietats algebraiques caracteritzen que vinguin de la geometria algebraica aritmètica, és a dir d'un tros d'un motiu sobre un cos de nombres K amb coeficients en E.

Sota el support econòmic de DGI, BFM2003-06092.

Notacions i comentaris

En la §3.2, K denota un cos de nombres i E un altre cos de nombres. En la secció posterior §3.3 K denota un cos local amb cos residual de característica p amb E un cos local extensió finita de $\mathbb{Q}_l$. Usualment denotem λ per a un primer de K i per β un primer de E. Igualment G_K denotarà el grup de Galois absolut de K, és a dir $Gal(\overline{K}/K)$ on $\overline{F}$ sempre denota clausura algebraica del cos F, i igualment F_γ amb $\gamma \in Spec(F)$ denota el cos completat de F per l'ideal γ de F.
L denota una extensió finita de $\mathbb{Q}_l$ dins la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_l$ i L^0 una extensió de L dins $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Denotem per $\kappa(\lambda)$ el cos residual de K_λ, i $\kappa(F)$ pel cos residual d'un cos local F.
Observació: Les notes d'aquesta exposició difereixen de la exposició realitzada en el seu dia en el seminari STNB 2004, ja que en aquella exposició ens vam restringir a presentar la conjectura amb $E = \mathbb{Q}$ (és dir consideràvem motius sense coeficients!) i igualment no es va poder explicar res sobre la teoria referent a mòduls de Deligne, que si que escriurem breument en aquestes notes (§3.3) (no obstant tota aquesta teoria de mòduls de Deligne i filtrats ho escriurem únicament per a l-representacions, és a dir "$E = \mathbb{Q}$, $L = L^0 = \mathbb{Q}_l$").

3.2 Enunciat de la conjectura de Fontaine-Mazur

Anem primer a definir que vol dir que una representació de G_K, amb K cos de nombres, ve de la geometria algebraica (aritmètica).
Recordem que una representació L^0-àdica és un morfisme continu

$$\rho : Gal(\overline{K}/K) \to GL(V)$$

amb V un L^0-espai vectorial.(Una representació l-adica, significa una representació $\mathbb{Q}_l$-àdica)
Donada una varietat algebraica X sobre K llissa i projectiva, obtenim de manera natural molts espais vectorials V associats amb estructura addicional (realitzacions), nosaltres ens interessa que tingui una acció continua lineal per al grup de Galois G_K, considerem la realització

l-adica étale associada a X;

$$\oplus_{i=0}^{2dim(X)} H_{et}^i(X \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}} E \tag{3.1}$$

amb acció de G_K (observem que la categoria que presentem correspon a $Ch_{\mathbb{Q}}(K, E)$ que és isomorfa a la categoria de $Ch_E(K)$ per aquesta equivalència veieu Deligne 2.1 [6]) Ens interessa usualment restringir-nos a un $H_{et}^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes E$ (informació parcial de X en la realització l-àdica a coeficients en E). Les anteriors representacions són un cas concret de representacions provinents de la geometria algebraica considerant els objectes $M = (X, proj, r)$ dins la categoria de motius de Chow sobre K amb coeficients en E on $proj$ denota un projector i r un enter (Tate twist) i obtenim una realització l-àdica,

$$\oplus_{i=0}^{2dim(X)} proj^* H_{et}^i(X \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Q}} E \tag{3.2}$$

En general triar un sumand d'aquesta descomposició correspondria a representacions de la geometria "pures"(correspondria sol agafar un d'aquests factors en la suma directa que té un únic pes, recordem per X varietat projectiva el motiu $proj^* H_{et}^i(X \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l(r))$ és pur de pes $w = i - 2r$). Més en general en geometria algebraica podem considerar objectes geomètrics (X sense ser projectiva com fins ara) i considerar la realització l-àdica de X però ara X és una varietat algebraica qualsevol, on les components irreductibles de la seva realització en grups de cohomologia ètale poden tenir pesos mixtes (veieu Deligne en [7](complement d'una varietat amb creuament normal,...)). Obtenim així el que podríem anomenar representacions de la geometria "mixtes".

Escrivim

$$\rho_l = \prod_{\beta | l} \rho_\beta : G_K \to GL(V \otimes_{\mathbb{Q}_l} E_\beta),$$

com GL lineal amb E_β, és a dir E_β-representacions de G_K, amb V la realització l-àdica d'un objecte geomètric sobre K. Restringim-nos a ρ_β irreductible, i observeu que si V és simple i prové d'un subquocient d'algun grup de cohomologia étale a coeficients en E, llavors és una peça de $proj^* H_{et}^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes E_\beta$ amb X projectiva (cas pur).

D'aquestes consideracions es proposa la següent definició.

3.2.1 Definició Sigui ρ una L^0-representació irreductible de G_K, és a dir una representació irreductible continua

$$\rho : G_K \to GL(V)$$

on V és un L^0-espai vectorial i GL és lineal en L^0. Diem que ρ ve de la geometria algebraica (aritmètica) si és isomorfa a un subquocient d'algun grup de cohomologia étale provinent de la realització l-àdica d'alguna varietat X sobre K amb coeficients en un E, diem-li M on existeix $\beta \in Spec(E)$ amb $E_\beta \cong L$ i que $V \cong M \otimes_L L^0$ com $L^0[G_K]$-representacions.

Anem a estudiar les propietats de la representació de G_K en $H^i_{et}(X \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l)$, que passin a subquocients. Ens restringim amb X/K és projectiva i llisa sobre K (és a dir el cas de representacions "pures", bàsicament doncs estudiarem representacions irreductibles simples de la geometria algebraica).

Considerem la representació:

$$\rho : G_K \to GL(H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L).$$

Recordem que una representació L-àdica s'anomena no ramificada en el primer λ de K si el grup d'inèrcia de λ en G_K, I_λ, actua de manera trivial.
Com X és una varietat, fora d'un conjunt finit S de places de K tenim que X té bona reducció i per tant per tot $\lambda \notin (S \cup \{\lambda' | l\})$ finit, el grup d'inèrcia I_λ es conegut que actua de manera trivial en la realització l-àdica de X (és a dir en cada component de (3.1)) i per tant en qualsevol subquocient d'una component, per tant s'obté;

3.2.2 Lema. *Una representació de G_K de la geometria algebraica és no ramificada fora d'un conjunt finit de places finites de K. És a dir la representació factoritza a traves de $G_{K,S} = Gal(K_S/K)$ on K_S denota la extensió maximal de K no ramificada fora del conjunt S.*

Hi ha aquí la pregunta natural següent,

3.2.3 Questió Existeix una representació local irreductible semi-simple de G_K ($\rho : G_K \to GL_L(V)$) de manera que no existeix cap conjunt finit S de $Spec(K)$ on la representació ρ factoritzi a través de $G_{K,S}$? (La resposta és que si, hi ha exemples amb V no provinents de la geometria on ramifica a un numero no finit de primers, veieu [14] i §5 en [13]. Agrair aquí a en Luis Dieulefait per comentarme aquestes referències).

Restringim la nostra representació

$$\rho : G_K \to GL(H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L)$$

al grup de descomposició G_λ de G_K en una plaça finita $\lambda \in Spec(K)$. Denotem per $p = car(\kappa(\lambda))$ on $\kappa(\lambda)$ és el cos residual de λ. L'estudi d'aquesta representació local de $G_\lambda \cong G_{K_\lambda}$ (elegint immersió) té un comportament diferent per a $l \neq p$ i per a $l = p$ "tota la informació").
Estudi per a $l \neq p$
Considerem una representació local

$$\rho_\lambda : G_\lambda \to GL_L(V),$$

amb $\kappa(\lambda) = p$ amb L extensió finita de $\mathbb{Q}_l$ dins $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

Si ens restringim a V com un tros (pur) d'una realització l-àdica per una v.a. X projectiva i llissa sobre K ($H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L$), llavors si $X \times_{K_\lambda} \overline{K_\lambda}$ té bona reducció en λ la inèrcia I_λ actua de manera trivial en cadascun dels grups de cohomologia étale de la seva realització l-àdica, si tè potencialment bona reducció llavors en una extensió finita $K'_{\lambda'}$ de K_λ obtenim $I_{\lambda'}(\subset G_{K'_{\lambda'}})$ actua de manera trivial sobre cada peça de la realització l-adica associada a $(X, proj, r)$ i en particular en $proj^* H^i_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes L$.

3.2.4 Definició Diem que ρ_λ una representació local arbitrària L-àdica ($\rho_\lambda : G_\lambda \to GL_L(V)$) s'anomena de bona reducció si I_λ es troba en el nucli de ρ_λ (condició que també es diu que és no-ramificada en λ).
Diem que ρ_λ és potencialment de bona reducció si existeix un subgrup obert de I_λ que actua de manera trivial (és a dir hi ha una extensió finita $K'_{\lambda'}$ de K_λ dins $\overline{K_\lambda}$ on $I_{\lambda'} \subset Ker(\rho_\lambda | G_{K'_{\lambda'}})$).

En quan a l'estudi general de representacions amb $l \neq p$ tenim el següent resultat de Grothendieck (veieu 1 en [5]),

3.2.5 Proposició. *Sigui $\rho_\lambda : G_\lambda \to GL_L(V)$, com abans amb $l \neq p$. Imposem a més que cap extensió finita de $\kappa(\lambda)$ contingui totes les arrels l^n-èssimes de la unitat $\forall n$ (aquesta condició es compleix per exemple quan $\kappa(\lambda)$ és finit). Llavors existeix un obert H de I_λ de manera que $\rho(h)$ és unipotent per a tot $h \in H$.*

Demostració:[sketch] Reduïm-nos cas $L = \mathbb{Q}_l$. Via una extensió finita de K_λ podem suposar que tot element $x \in I_{\lambda'}$ compleix que $\rho(x)$ és una matriu a coeficients en $\mathbb{Z}_l$ i congruent amb la matriu Id mòdul l^2, denotem igualment per K_λ aquesta extensió. Amb aquestes condicions tenim $\rho(I_\lambda)$ és un pro-l-grup. Per veure que $\rho(x)$ és unipotent argumentem de la forma següent;
sigui K_{nr} l'extensió maximal no ramificada de K_λ, $I_\lambda = Gal(K_\lambda^{sep}/K_{nr})$; K_l la l-part de l'extensió maximal moderadament ramificada de K (és a dir és l'extensió de K_{nr} generada per les l^m-arrels d'un uniformitzant a K_{nr}). Es prova llavors que l'ordre de $Gal(K_\lambda^{sep}/K_l)$ com nombre supernatural és primer amb l, i per tant si $x \in Gal(K_\lambda^{sep}/K_l)$, $\rho(x)$ és una potencia de l; per tant $\rho(Gal(K_\lambda^{sep}/K_l)) = \{1\}$. Per estudiar llavors l'acció en la inèrcia ens restringim a la imatge del grup de Galois,

$$Gal(K_l/K_{nr}) \cong \varprojlim \mu_{l^n} = T_l(\mu)$$

compatible amb $Gal(\overline{\kappa(\lambda)}/\kappa(\lambda)) \cong Gal(K_{nr}/K_\lambda)$ per automorfismes interns. Considerem el caracter

$$\chi : G_\kappa := Gal(\overline{\kappa(\lambda)}/\kappa(\lambda)) \to \mathbb{Z}_l^*$$

donat per l'acció de G_κ sobre $T_l(\mu)$. Donat $x \in Gal(K_l/K_{nr})$ tenim x i $x^{\chi(t)}$ conjugats en $Gal(K_l/K_\lambda)$ per qualsevol $t \in G_\kappa$.
Considerem $X = log\rho(x)$ el logaritme l-adic. De $log(\rho(x)^{\chi(t)}) = \chi(t)X$, tenim que X i $\chi(t)X$ son matrius conjugades $\forall t \in G_\kappa$. Sigui $a_i(X)$ la funció i-simètrica de les arrels característiques de X, de la igualtat anterior obtenim: $a_i(X) = \chi(t)^i a_i(X)$, com no conté totes les arrels l-èssimes de la unitat la imatge de χ es un subgrup infinit de $\mathbb{Z}_l^*$, triem t complint que $\chi(t)$ no és una arrels de la unitat, obtenint

$a_i(X) = 0$ per tot $i > 0$, i per tant X és una matriu nilpotent.
Com $\rho(x) \equiv 1(mod\ l^2)$ obtenim

$$\rho(x) = exp(log(\rho(x))) = exp(X) \text{ \emph{és unipotent.}}$$

□

3.2.6 Definició Sigui ρ una L-representació de G_{K_λ} del L-espai vectorial V amb $car(\kappa(\lambda)) = p \neq car(L)$.
Diem que ρ és semiestable si l'acció de I_{K_λ} opera de manera unipotent.
Diem que ρ és potencialment semiestable si existeix una extensió finita F/K_λ ($F \subset \overline{K_\lambda}$) on $\rho|Gal(\overline{K_\lambda}/F)$ és semiestable (equivalentment existeix un subgrup obert H de I_{K_λ} on ρ actua de manera unipotent en H).

3.2.7 Corol·lari. *La L-representació local de G_{K_λ} amb V igual a $H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L$ és potencialment semiestable $\forall\lambda \nmid l$, és a dir tota representació simple de la geometria algebraica és potencialment semiestable $\forall\lambda \nmid l$.*

Denotem per $Rep_{L,l}(G_{K_\lambda})$ amb $l = car(\kappa(L)) \neq p = car(\kappa(\lambda))$ la categoria tannakiana de les L-representacions de G_{K_λ}. Podem considerar les representacions amb bona reducció que formen una subcategoria (de $Rep_{L,l}(G_{K_\lambda})$) tannakiana que denotem per $Rep_{L,l,f}(G_{K_\lambda})$ (si considerem les representacions que són potencialment bona reducció, el seu conjunt el denotem per $Rep_{L,l,pf}(G_{K_\lambda})$) i si considerem les representacions que són semiestable tenim llavors la categoria $Rep_{L,l,st}(G_{K_\lambda})$, i finalment denotem per $Rep_{L,l,pst}(G_{K_\lambda})$ per a la categoria de representacions potencialment semiestables. Hem demostrat en 3.2.5 per $K_\lambda/\mathbb{Q}_p$ finita(la nostra situació) $Rep_{L,l}(G_{K_\lambda}) = Rep_{L,l,pst}(G_{K_\lambda})$ (*). Tenim el següent diagrama on totes les inclusions son estrictes a excepció de la igualtat (*) per $K_\lambda/\mathbb{Q}_p$ finita:

$$\begin{tikzcd}
 & Rep_{L,l,pf}(G_{K_\lambda}) \arrow[dr] & & \\
Rep_{L,l,f}(G_{K_\lambda}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & Rep_{L,l,pst}(G_{K_\lambda}) \arrow[r] & Rep_{L,l}(G_{K_\lambda}) \\
 & Rep_{L,l,st}(G_{K_\lambda}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Estudi per a $l = p$

Considerem ara que $l = p$, i centrem-nos en les representacions de motius purs de Chow a $\mathbb{Q}$-coeficients, més concretament amb les representacions G_{K_λ} amb $\lambda | l$ de $V = H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$, amb X projectiva i llisa sobre K, recordem que tenim els següents resultats de comparació que ens donen certa forma d'estudiar aquest G_{K_λ}-representacions d'algun altre punt de vista.
Comencem amb el següent resultat de comparació (per una altra exposició més extensa de teoremes de comparació i anells Fontaine veieu [17]):

$$(Faltings)\ H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} \mathbb{C}_l \cong \oplus_{o+q=m}(H^o(X, \Omega^q_{X/K_\lambda}) \otimes_{K_\lambda} \mathbb{C}_l(-o))$$

que respecta l'acció de Galois G_{K_λ}, on $\mathbb{C}_l = \hat{\overline{\mathbb{Q}_l}}$ i $\Omega^{\cdot}$ és el complex de cadenes de diferencials de X/K_λ.
Reescrivim l'anterior isomorfisme de comparació entre una cohomologia de diferencials amb una topològica via un anell de Fontaine $B_{HT,l} := \oplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_l(j)$ d'una altra manera. Recordeu que la cohomologia diferencial de Hodge-Tate es defineix via $H^i_{Hod}(X/K_\lambda) := \oplus_{o+q=i} H^o(X, \Omega^q_{X/K_\lambda})$ i així el morfisme de comparació és;

$$H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{HT,l} \cong (H^m_{Hod}(X/K_\lambda) \otimes_{K_\lambda} B_{HT,l}.$$

3.2.8 Observació. (d'en X.Xarles) La B dels anells de Fontaine es probablement en honor a Barsotti, i aquests anells han estat també anomenats anells de Barsotti-Tate [8]. Barsotti va introduir anells d'aquest tipus al estudiar com es relacionaven les diferencials d'una varietat abeliana sobre els p-adics amb bona reducció amb certs objectes cohomològics associats a la reducció (e.g. el mòdul de Dieudonné), veieu [1].

Fixem-nos que si considerem la cohomologia de Rham $H^m_{dR}(X/K_\lambda)$ tenim un K_λ-espai vectorial que té una filtració natural, si volem comparar amb la cohomologia étale que té una estructura de G_{K_λ}-mòdul i volem que aquest isomorfisme sigui canònic i mantingui les propietats d'aquests grups cohomològics, necessitem un altre anell de

Fontaine però ara amb acció de Galois i una filtració, és l'anell $B_{dR,l}$.
Tenim l'isomorfisme,

$$(Faltings\ 1988) \quad H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{dR,l} \cong H^m_{dR}(X/K_\lambda) \otimes_{K_\lambda} B_{dR,l}$$

que és compatible amb l'acció de G_{K_λ} que actua per $\sigma \otimes \sigma$ en l'esquerra i per $id \otimes \sigma$ en el terme de la dreta, compatible amb les filtracions, és a dir $id \otimes Fil^q \leftrightarrow \sum_{a+b=q} Fil^a \otimes Fil^b$, dualitat de Poincaré,...

3.2.9 Observació. Recordeu que $Gr_{Fil} H^m_{dR}(X/K_\lambda) = H^m_{Hod}(X/K_\lambda)$, i per tant el la cohomologia de Hodge-Tate perdem aquesta filtració, i deixem escrit aquí que $Gr_{Fil} B_{dR,l} = B_{HT,l}$.

Anem ara a endinsar-nos sobre quin tipus de reducció té la varietat X/K_λ en l'unic primer tancat de K_λ, especialitzant-nos obtenim que varietats amb cert tipus de reducció tenen de manera natural una topologia de Grothendieck amb més propietats com son un Frobenius, una monodromia,... Anem a escriure-hi un parell de cosetes.
Suposem que X té bona reducció en λ, tenim la cohomologia cristal.lina que es compara amb la de de Rham (veieu p.9 [17]), que ens associa un $K_{0,\lambda}$-e.v. ($K_{0,\lambda}$ és la subextensió maximal no ramificada dins K_λ) junt amb un Frobenius i una filtració.
Tenim l'isomorfisme (Fontaine,Messing,Faltings,Kato,Tsuji):

$$H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{cris,l} \cong H^m_{cris}(Y_X/K_{0,\lambda}) \otimes_{K_{0,\lambda}} B_{cris,l};$$

compatible amb G_{K_λ}, Frobenius i filtració.
En cas que X no té bona reducció en λ (ni potencialment bona reducció), però té reducció semiestable en λ (és a dir existeix un model propi $\mathcal{X}/\mathcal{O}_{K_\lambda}$ on localment per la topologia ètale és $\mathcal{O}_{K_\lambda}[t_1, \ldots, t_n]/(t_1 \cdot \ldots \cdot t_r - \pi)$, π uniformitzant de l'anell enters $\mathcal{O}_{K_\lambda}$) tenim una cohomologia de Grothendieck (cohomologia log-cristalina) que té una monodromia N, filtració, frobenius; (i també tenim un isomorfisme amb la cohomologia de de Rham $H^m_{log-cris}(\mathcal{X}) \otimes_{K_{0,\lambda}} K \cong H^m_{dR}(X/K_\lambda)$ (com en el cas cristal.lí)), i obtenim un altre anell de Fontaine $B_{st,l}$ que ens la compara amb la cohomologia étale compatible amb aquestes estructures:
(Kato, Tsuji, Faltings)

$$H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{st,l} \cong H^m_{log-cris}(\mathcal{X}) \otimes_{K_{0,\lambda}} B_{st,l},$$

isomorfisme compatible amb N, φ(Frobenius), G_{K_λ} i amb filtracions després de tensorialitzar $B_{dR,l} \otimes_{B_{st,l}}$.
Per entendre millor necessitem dir alguna cosa sobre els anells de Fontaine B, (veieu la subsecció posterior §3.3.1) diem aquí que $B_{cris,l} \subset B_{st,l}$ i fixant uniformitzant $B_{st,l} \subset B_{dR,l}$ i la filtració en $B_{st,l}$ prové d'aquesta inclusió.
Denotem per B, si no es diu el contrari, a qualsevol dels anells de Fontaine amb $p = l$ $B_{cris,l}, B_{st,l}, B_{dR,l}$ o $B_{HT,l}$.

3.2.10 Lema. *1. Sigui V una representació p-àdica de G_{K_λ}. Llavors:*

$$dim_{K_B}(B \otimes_{\mathbb{Q}_l} V)^{G_{K_\lambda}} \leq dim_{\mathbb{Q}_l} V,$$

on $K_B = \begin{cases} K_\lambda \text{ per a } B = B_{dR,l} \text{ o } B_{HT,l} \\ K_{0,\lambda} \text{ per a } B = B_{cris,l} \text{ o } B_{st,l} \end{cases}$

2. Si tenim $dim_{K_B}(B \otimes_{\mathbb{Q}_l} V)^{G_{K_\lambda}} = dim_{\mathbb{Q}_l} V$, llavors el morfisme natural:

$$B \otimes_{K_B} (B \otimes_{\mathbb{Q}_l} V)^{G_{K_\lambda}} \to B \otimes_{\mathbb{Q}_l} V$$

és un isomorfisme.

3.2.11 Definició 1. Una representació p-àdica V de G_{K_λ} s'anomena B-admissible si $dim_{K_B}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K_\lambda}} = dim_{\mathbb{Q}_p} V$.
Si $B = B_{cris}$ s'anomena representació cristal.lina. Si $B = B_{st}$ s'anomena representació semiestable. Si $B = B_{dR}$ s'anomena representació de de Rham. Si $B = B_{HT}$ s'anomena representació de Hodge-Tate.

2. Una representació p-àdica V de G_{K_λ} s'anomena potencialment B-admissible si $dim_{K_B}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K'_\lambda}} = dim_{\mathbb{Q}_p} V$; amb K'_λ una extensió finita de K_λ dins $\overline{K_\lambda}$.
Si $B = B_{cris}$ s'anomena representació potencialment cristal.lina.
Si $B = B_{st}$ s'anomena representació potencialment semiestable.

3.2.12 Observació. Les nocions de potencialment Hodge-Tate i potencialment de Rham no existeixen ja que directament són aquestes representacions de Hodge-Tate i de de Rham respectivament.

Del lema 3.2.10 i dels teoremes de comparació obtenim que la representació p-adica amb $V = H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ és de Rham i de Hodge-Tate. A més si X té reducció semiestable és semiestable la G_{K_λ}-representació p-àdica V. I si X té bona reducció llavors V és cristal.lina. Si X té potencialment bona reducció llavors V és una representació potencialment cristal.lina, i si X té potencialment reducció semiestable, llavors V és potencialment semiestable.

3.2.13 Observació. El twist de Tate va bé amb els isomorfismes de comparació per tant provem que $H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)(r)$ és sempre de Rham i segons la seva reducció pot ser cristal.lina o semiestable. No obstant un gran resultat de l'any 2002 de Laurent Berger prova que no hi haurà diferencies entre representacions potencialment semiestables i de Rham ([2]).

3.2.14 Observació. Per simplificar la notació hem fet els isomorfismes de comparació per motius purs i a coeficients en $\mathbb{Q}$, amb això volem dir per $V = H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_p(r))$.

Si volem a coeficients en E enlloc de $\mathbb{Q}$, i per tant no treballar en $\mathbb{Q}_l$-representacions sinó en $L \cong E_\beta$-representacions de G_{K_λ} també hauriem d'obtenir els resultats anteriors sobre aquestes representacions amb la mateixes definicions (prenent aquest V E-espai vectorial com a $\mathbb{Q}_l$-espai vectorial en les definicions) i resultats anteriors, no obstant no ho he vist explícitament escrit.

3.2.15 Questió Considereu una varietat projectiva sobre un cos local K arbitrari i considerem la $l = p$-representació de G_K donada en $V = H^m(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r))$. Podeu trobar els anells de Fontaine per a obtenir els morfismes de comparació amb bona reducció i reducció semiestable? (Veieu §1 [12] per a la construcció de B_{cris} per a cossos locals amb cos residual no perfecte).

Denotem per $Rep_B(G_{K_\lambda})$ (o $Rep_{pB}(G_{K_\lambda})$) la categoria (tannakiana) formada per les representacions L-àdiques B-admissibles (o respectivament potencialment B-admissibles) tenim llavors el següent diagrama:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & Rep(G_{K_\lambda}) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & Rep_{st}(G_{K_\lambda}) & & & & Rep_{HT}(G_{K_\lambda}) \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \uparrow \\
Rep_{cris}(G_{K_\lambda}) & & & & Rep_{pst}(G_{K_\lambda}) & = & Rep_{dR}(G_{K_\lambda}) \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & Rep_{pcris}(G_{K_\lambda}) & & & &
\end{array}
$$

on $Rep(G_{K_\lambda})$ denota totes les representacions L-àdiques de G_{K_λ}, i cada $\rightarrow$ és estricta a excepció de la igualtat entre ser potencialment semiestable amb de Rham (Berger [2]).

3.2.16 Definició Una representació L^0-àdica de G_K que anomenem V, amb K un cos de nombres ($car(\kappa(L^0)) = l$), s'anomena geomètrica si existeix L i una L-representació de G_K, diem-li W, on $W \otimes_L L^0 \cong V$ com $L^0[G_K]$-representacions i la representació W compleix les dues condicions següents:

1. és no ramificada fora d'un conjunt finit de places de K (és a dir I_λ actua de manera trivial en la L-representació per tot λ a excepció d'un conjunt finit de $\lambda's$).

2. La restricció de la L-representació a G_{K_λ} (λ no arquimediana) és potencialment semiestable (tan si $\kappa(\lambda) = p \neq l$ com $\kappa(\lambda) = l = p$).

3.2.17 Proposició. *Una L^0-representació simple (i irreductible) de la geometria algebraica és geomètrica.*

DEMOSTRACIÓ: Una L^0-representació de la geometria algebraica simple prové d'una L-representació de la geometria algebraica per un L-espai vectorial, per força ve d'un motiu pur (pel fet de ser simple la representació), per tant s'inclou $V \subset H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L$ per certa varietat llissa i projectiva X sobre $\mathbb{Q}$, amb certs m, r que ens donen el pes $w = m - 2r$ (és a dir prové dels motius purs de Chow amb pes w i amb multiplicació E on existeix $\beta \in \mathrm{Spec}(E)$ on $E_\beta \cong L$).

Per tant ens podem restringir a estudiar l'enunciat per la L-representació $V = H^m_{et}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_l} L$. Ja sabem que fora de les places on X té mala reducció és no ramificada, per tant compleix la primera condició per tal de ser una representació geomètrica.
Restringim la representació a G_{K_λ}, si $\lambda \nmid \kappa(L) = l$ tenim pel corol.lari 3.2.7, és semiestable. Si $\lambda \mid \kappa(L) = l$, tenim que és de Rham pel teorema de comparació i pel resultat de Berger [2] que és semiestable. Per tant es compleix la segona propietat per ser una representació geomètrica. $\square$

3.2.18 Observació. Podriem considerar la categoria tanakiana generada per totes les representacions de motius purs, són les que anomenem representacions semisimples, és la categoria de representacions semisimples i que provenen de la geometria algebraica. Aquesta categoria és subcategoria tanakiana de les representacions que provenen de la geometria algebraica (aquestes inclouen els motius mixtos). La proposició anterior prova que aquesta categoria es troba dins la categoria formada per representacions geomètriques. Per a extendre aquest resultat (proposició anterior) per a representacions irreductibles però no simples de la geometria algebraica (i.e. per a motius mixtes) s'estén l'argument anterior però pensant que la representació ens dona submòduls simples purs i escrivint-ho com Ext's de motius purs podem atacar-ne la semiestabilitat ($p = l$) obtenint que són representacions geomètriques.

Per tant hem provat que una representació L-àdica (mòdul conjectures bones en motius mixtes) de la geometria algebraica és llavors una representació L-àdica geomètrica.

3.2.19 Conjectura (Fontaine-Mazur, 1993) *Una representació irreductible L-àdica és geomètrica si i només si és de la geometria algebraica.*

3.2.20 Observació. Si la L-representació és potencialment abeliana, és a dir existeix un subgrup obert de G_K que opera en V a través d'un grup quocient abelià, llavors la condició de ser geomètrica, usant teoria de classes ens permet obtenir un caracter de Hecke i d'aquest una varietat abeliana CM amb el mòdul de Tate ($m = 1$ en cohomologia étale per la varietat) junt amb un twist de Tate convenient provant que és de la geometria algebraica (no obstant la construcció no és molt explícita i estaria bé escriure-ho amb més detall i més explícitament). Aquest és el primer cas en que podem provar la conjectura de Fontaine-Mazur.

3.2.21 Observació. El treball de Wiles [16] (i de Taylor-Wiles [15]) sobre el teorema de Fermat, permet associar una forma modular a certes representacions geomètriques de dimensió 2, i en particular veure que provenen de la geometria algebraica per a certa corba el.líptica amb $m = 1$ i $K = \mathbb{Q}$.

En general falten idees per a poder demostrar que una representació geomètrica és de la geometria algebraica i fins i tot centrant-nos en representacions simples irreductibles. No obstant el pes que hauria de tenir està determinat.

Fixem-nos que una representació irreductible V que sigui geomètrica de les propietats locals, són interessants únicament per a $\lambda \mid l = p$ (per al cas $l \neq p$, el resultat del Grothendieck (3.2.5), no tenim cap restricció, recordem K és en aquesta secció un cos de nombres). Ser semiestable per $\lambda \mid l = p = car(\kappa(L))$ implica que és de Hodge-Tate i es poden associar de manera fàcil els pesos de Hodge-Tate. Abans d'associar-los anem a definir el pes de V que denotem per $w(V)$. Si V és 1-dimensional existeix un únic enter i complint que l'acció de G_K és finita en $V(i)$ (això succeeix quan el pes és zero i com $w(V(i)) = w(V) - 2i$), definim llavors $w(V) := 2i$. Si V té dimensió N definim $w(V) := \frac{w(\wedge^N V)}{N}$ (si V és simple i de la geometria algebraica, serà un enter (cas motiu pur), si és geomètrica i és simple, per la conjectura de Fontaine-Mazur tindria que ser un enter).
A la representació V irreductible i geomètrica, per ser de Hodge-Tate li associem els pesos de Hodge Tate:

$$h(\lambda) := (h_r(\lambda))_r \ amb \ h_r(\lambda) := dim_L(\hat{\overline{L}}(r) \otimes_L V)^{G_{K_\lambda}},$$

per cada $\lambda | l = p = \kappa(L)$ i $r \in \mathbb{Z}$, usualment s'escriu $h_r(\lambda) = h_{r,s}(\lambda)$ amb $r, s \in \mathbb{Z}$ complint $r + s = w$. (Observem que per a qualsevol representació podem associar-li aquests pesos de Hodge-Tate).
Denotem per: $Geom(K, S, h)$ el conjunt de les L-representacions irreductibles de $G_{K,S}$ (i.e. representacions de G_K no ramificades fora

de S) amb pes h de Hodge-Tate fixats per cada $\lambda \mid \kappa(L) = l = p$ mòdul isomorfisme.

3.2.22 Conjectura *(Fontaine-Mazur) Per a qualsevol conjunt de places S amb $l = p = \kappa(L) \in S$, el conjunt $Geom(K, S, h)$ és finit.*

3.3 Estudi de representacions locals semiestables

Recordem que en aquesta secció K denota un cos local extensió finita de $\mathbb{Q}_p$ (tot i que alguns resultats són més genereals). Ens restringim a $\mathbb{Q}_l$-representacions enlloc de L-representacions.

3.3.1 Una pinzellada dels anells de Fontaine.

Considerem K un cos local extensió finita de $\mathbb{Q}_p$,(tot i que es possible fer-ho per cossos locals K amb cos residual no perfecte [12]).
Anem a introduir primer una noció vaga i no del tot precisa de que serà els cossos que nosaltres volem (anomenats anells de Fontaine). Els volem obtenir com un anell de periodes, és a dir d'un pairing:

$$H^m_{dR}(X/\tilde{K}) \times H^m_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \to B$$

$$< \omega, \gamma > \mapsto b = \int_\gamma \omega$$

per tota X una varietat algebraica projectiva llisa sobre un cos de nombres $\tilde{K}$ (on K és la completació de $\tilde{K}$ en un plaça finita) de cert tipus aritmètic que estem interessats a estudiar, B és l'anell de comparació d'una cohomologia de diferencials amb una cohomologia provinent de la topologia de X.
Tensorialitzem la cohomologia de Betti per $\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$ obtenint que és isomorfa a la cohomologia étale (Grothendieck) i preguntem-nos sobre aquest anell de períodes necessari per a comparar després d'aquesta tensorialització.
Si té bona reducció la varietat X/K, tenim que podem triar com anell de períodes l'anell $\mathbb{Q}_l$ si $l \neq p$ i l'anell de Fontaine anomenat

B_{cris} si $l = p$. Si X és varietat projectiva qualsevol tenim que quan $l = p$ l'anell de períodes és B_{dR}. Aquests anells de Fontaine (B's) ja han sortit en el seminari durant alguna edició per tant, solament en farem un breu resum i introduírem els anells corresponent a varietats semiestables tan en el cas $l = p$ com $l \neq p$ (aquest últim cas, pel resultat de Grothendieck 3.2.5, correspon també, llevat d'una extensió finita, amb els períodes de totes les varietats algebraiques projectives).

Anem a recordar breument la construcció de $B_{cris,p}$ (denotem per $B_{cris,l} = \mathbb{Q}_l$ quan $l \neq p$), i $B_{dR,p}$ cas $l = p$. Per a una exposició més extensa d'aquests anells podeu consultar la lectura 2 en [3].

Denotem per $\mathbb{C}_p \cong \hat{\overline{K}}$ i $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ el seu anell d'enters, obtenim l'anell integre de característica p i perfecte següent:

$$R_{\mathcal{O}} := \lim_{\leftarrow}(\mathcal{O}/p \leftarrow \mathcal{O}/p \leftarrow \ldots)$$

amb morfismes elevar a p, és a dir $a \mapsto a^p$. Considerem el morfisme de Teichmuller $[\ ] : R_{\mathcal{O}} \to W(R_{\mathcal{O}})$, ($W$ denota l'anell de Witt) i sigui $\underline{p} := (p^{(n)}) \in R_{\mathcal{O}}$ sistema compatible de p^n-arrels de p, i $\underline{\epsilon} := (\epsilon^{(n)}) \in R_{\mathcal{O}}$ format per sistema arrels p^n-èssimes de 1. Definim per

$$A_{cris,p} := \{\sum w_n \frac{(p - [\underline{p}])^n}{n!},\ w_n \to 0,\ w_n \in W(R_{\mathcal{O}})\}$$

considerem l'element de $A_{cris,p}$ següent

$$t = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{([\underline{\epsilon}] - 1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!(-1)^{n+1}\frac{([\underline{\epsilon}] - 1)^n}{n!} \in A_{cris,p},$$

s'obté de σ el Frobenius en l'anell de Witt s'estén a $A_{cris,p}$, denotem per $B^+_{cris,p} := A_{cris,p}[1/p]$ i $B_{cris,p} := B_{cris,p}[1/t]$, l'element t dona la filtració en el cos $B_{cris,p}$ on $B^+_{cris,p}$ és anell de valoració discreta $val(t) = 1$. Tenim doncs que $B_{cris,p}$ és un anell amb filtració i amb un Frobenius φ provinent de σ i una acció de G_K. Compleix $B^{G_K}_{cris,p} = K_0$ (maxima subextensió de K no ramificada enlloc)

Anem a definir $B_{dR,p}$. Definim $B^+_{dR,p} := \lim\limits_{\longleftarrow} \frac{W(R_{\mathcal{O}})[1/p]}{(p - [\underline{p}])^n}$ que és un anell de valoriació discreta complet amb maximal $\mathfrak{m} = (p - [\underline{p}])$, i $B_{dR,p} := Quot(B^+_{dR,p})$. Tenim que $t \in (p - [\underline{p}])$ i és uniformitzant,

dona així una filtració on $Fil^m B_{dR,m}/Fil^{m+1}B_{dR,p} = \mathbb{C}_p(m)$. A més $B_{dR,p}$ té acció natural de G_K complint $B_{dR,p}^{G_K} = K$, i tenim de manera natural $B_{cris,p} \subset B_{dR,p}$.
Després d'aquest repàs d'aquests dos anells de Fontaine anem a introduir el B_{st}.
L'anell B_{st}.
Escrivim per $B_l = \begin{cases} \mathbb{Q}_l & si\ l \neq p\ amb\ G_K - acció\ trivial \\ B_{cris,p} & si\ l = p \end{cases}$
elegim $q \in K$ que no sigui 0 ni una unitat. Anem a definir $B_{st,l,q}$ una B_l-àlgebra amb G_K-acció i una derivació $N : B_{st,l,q} \to B_{st,l,q}$ de nucli B_l.
Sigui $T_{l,q} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\overline{K}/q^{\mathbb{Z}})_{l^n}$ i $W_{l,q} := \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} T_{l,q}$. Considerem $a = (a_n) \in T_{l,q}$, elegim $\tilde{a_n}$ de a_n en $\overline{K}$ compleix que existeixen $r_n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{a_n}^{l^n} = q^{r_n}$ amb $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(a) \in \mathbb{Z}_l$ on aquest element és independent d'aquests aixecaments elegits de a, aquest v s'estén a $W_{l,q}$ amb linealitat, és G_K-equivariant i té nucli $\mathbb{Q}_l(1)$, és a dir tenim (tensoriatitzant per $\otimes_{\mathbb{Q}_l}\mathbb{Q}_l(-1)$):

$$0 \to \mathbb{Q}_l \to W_{l,q}(-1) \to \mathbb{Q}_l(-1) \to 0.$$

Considerem la $\mathbb{Q}_l$-àlgebra $Sym_{\mathbb{Q}_l} W_{l,q}(-1)$ que és isomorfa a l'àlgebra de polinomis en dues indeterminades. Denotem per

$$B_{l,q} := Sym_{\mathbb{Q}_l} W_{l,q}(-1)/(''1\ en\ grau\ 0 = 1\ en\ grau\ 1'')$$

que denota a un anell de polinomis a coeficients en $\mathbb{Q}_l$ en indeterminada u amb $u \in W_{l,q}(-1)$, $u \notin \mathbb{Q}_l$ amb acció de G_K. Definim en $B_{l,q}$ una derivació,

$$N : B_{l,q} \to B_{l,q}(-1)$$

la $\mathbb{Q}_l$-derivació que a $u \in V_{l,q}(-1)$ va a $1 \otimes v(u) \in V_{l,q}(-1) \otimes \mathbb{Q}_l(1)$.
Anem doncs a definir els anells de Fontaine semiestables per,

$$\begin{cases} B_{st,l,q} := B_{l,q}\ si\ l \neq p \\ B_{st,l,q} := B_{cris,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{p,q}\ si\ l = p \end{cases}$$

En el cas $l = p$ tenim en $B_{st,l,q}$ una G_K-acció via $g(b \otimes c) = gb \otimes gc$, acció Frobenius φ:$\varphi(b \otimes c) = \varphi(b) \otimes c$, d'una derivació $N(b \otimes c) = b \otimes N(c)$ on $b \in B_{cris}$ i $c \in B_{st,p,q}$. Es comprova que φ i N commuten amb G_K (i si fem actuar φ sobre $B_{st,p,q}(-1)$ per $\varphi(b \otimes c) = \varphi(b) \otimes c$ llavors N commuta amb φ).

3.3.1 Observació. Usualment el $B_{st,p,q}$ pel teorema de comparació que hem vist en la secció anterior es pren q un uniformitzant de K i a més té un operador $N : B_{st,p,q} \to B_{st,p,q}$ (i a més una filtració però que encara no li hem introduït!!!). Per relacionar la nostra definició amb aquesta, observem que $\mathbb{Q}_p(1) \subset B_{cris,p}$ on si t generador de $\mathbb{Q}_p(1)$ va al t definit anteriorment en $B_{cris,p}$,

$$i : B_{st,p,q}(-1) \to B_{st,p,q}$$
$$b \otimes t^{-1} \mapsto bt^{-1},$$

i es defineix l'operador de monodromia per $N_{mon} := i \circ N$ (si $val(q) \geq 0$ que és el cas de triar q un uniformitzant).

3.3.2 Observació. Referent a la dependència de q. Si $l = p$ tenim un isomorfisme canònic entre $B_{st,p,q} \cong B_{st,p,q'}$ compatible amb G_K i φ, però no sempre amb N, únicament és compatible en N si q/q' és una unitat de K.
Si $l \neq p$ tenim iso canònic si $\overline{q}$ i $\overline{q}'$ generen el mateix s.e.v en $Kum_l(K) = \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \varprojlim_n (K^*/K^{*l^n}) = H^1(K, \mathbb{Q}_l(1))$ (que sempre es compleix si el cos residual de K és finit).

Podriem pensar $B_{st,p,q} = B_{cris,p}(u)$ amb u una indeterminada. Si volem introduir-hi una filtració i pensar com l'anell de periodes (és anell de comparació), és a dir u com un període, estem pensant aquest anell dins de $B_{dR,p}$ i aquesta inclusió ens dona la filtració en $B_{st,p,q}$ però depèn fortament de q aquesta inclusió!!!

$$B_{cris,p} \to B_{st,p,q} \to B_{dR,p}$$

on $u \mapsto log(b) \in B_{dR,p}$, aquest b es construeix usant el q triat ($val(q) = 1$ ara) que prové d'un període concret en una corba el.líptica de Tate, veieu la construcció explicíta del període $log(b)$ en la pàgina 13-14, exemple 12 [17].

3.3.2 Mòduls de Deligne ($l \neq p$ i $l = p$)

Sigui V una representació l-àdica de G_K, anem a associar-hi uns mòduls que ens donen informació de V. Deixeu-me escriure que les proves dels resultats següents les trobeu en [10].

3.3.3 Definició (Mòdul de Deligne)

1. Suposem $l \neq p$. Un l-mòdul de Deligne (relatiu a $\overline{K}/K$) es donar un $\mathbb{Q}_l$-espai vectorial Δ junt amb una acció lineal de G_K i una aplicació $\mathbb{Q}_l$-lineal G_K-equivariant
$$N : \Delta \to \Delta(-1).$$

2. Suposem $l = p$. Sigui $\overline{k}$ el cos residual de $\overline{K}$ i denotem per $P_0 = Quot(W(\overline{k}))$ el cos de fraccions de l'anell de Witt $W(\overline{k})$; P_0 té acció natural de G_K (amb I_K actuant trivialment) i un Frobenius σ.
Un p-mòdul de Deligne és donar un P_0-espai vectorial Δ junt amb una acció semi-lineal de G_K, un frobenius
$$\varphi : \Delta \to \Delta$$
σ-lineal, injectiu i commutant amb l'acció de Galois i d'una aplicació P_0-lineal, G_K-equivariant:
$$N : \Delta \to \Delta$$
verificant $N\varphi = p\varphi N$

S'anomena la dimensió d'un mòdul de Deligne a la dimensió com espai vectorial (com $\mathbb{Q}_l$-e.v. si $l \neq p$ o bé com P_0-e.v. si $l = p$).

Els mòduls de Deligne formen una categoria tannakiana, on els morfismes son aplicacions lineals ($\mathbb{Q}_l$ si $l \neq p$, P_0 si $l = p$), commuta l'acció de G_K i de N i amb φ si $l = p$. Denotem per $\underline{Del}_*(G_K)$ la subcategoria plena dels $*$-mòduls de Deligne amb $dim\Delta < \infty$ complint:

1. l'acció de G_K és contínua i I_K actua a traves d'un quocient finit.

2. l'operador de monodromia N és nilpotent (per $l \neq p$ denotem per N també a $N \otimes id(-i) : \Delta(-i) \to \Delta(-i-1)$).

(Observeu que la segona condició es satisfà directament per $l = p$ ja que no hi ha aplicació P_0-lineal on $N\varphi = p^r\varphi N$ per $r >> 0$, i per $l \neq p$ també es compleix si el cos residual és finit).
Anem a construir un mòdul de Deligne a partir d'una representació. Considerem doncs V una representació l-àdica de G_K i considerem

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_l} B_{st,l}$$

és un l-mòdul de Deligne (a partir d'ara l pot ser $= p$ o $\neq p$ si no s'especifica) amb:

$$g(v \otimes b) = gv \otimes gb,\ g \in G_K,\ v \in\ V,\ b \in B_{st,l}$$

$$N(v \otimes b) = v \otimes Nb,$$

$$(si\ l = p\ exigim)\ \varphi(v \otimes b) = v \otimes \varphi(b).$$

Recordem que localment donar representacions per $l \neq p$ correspon a donar una acció de N i de G_K(és una cosa coneguda pels especialistes en el camp, veieu per exemple lemma 3.1.1. en lecture 3 de Breuil en [3], i observeu aquí que la restricció que posa en la lecture 3 per la potència en p de commuta frobenius de G_K amb N prové del twist de com aquí definim l'operador de monodromia en els mòduls de Deligne per a $l \neq p$) , amb aquesta idea i per caracteritzar les representacions potencialment amb certes propietats, considerem el l-mòdul de Deligne:

$$\underline{\hat{D}}_{pst,q}(V) := \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B_{st,l} \otimes_{\mathbb{Q}_l} V)^H,$$

on $\mathcal{H}$ té per elements els subgrups oberts de I_K.

3.3.4 Teorema. *Sigui V una representació l-àdica de G_K i $\Delta = \underline{\hat{D}}_{pst,q}(V)$. Llavors:*

1. *$dim\Delta \leq dim_{\mathbb{Q}_l} V$ i $\Delta \in \underline{Del}_l(G_K)$.*
2. *L'aplicació natural,*

$$\alpha_V : B_{st,l,q} \otimes \Delta \to B \otimes_{\mathbb{Q}_l} V$$

és injectiva.

3. *Les següents afirmacions són equivalents:*
   (a) $dim(\Delta) = dim_{\mathbb{Q}_l} V$
   (b) α_V *és isomorfisme,*
   (c) V *és potencialment semiestable,*
   (d) *existeix* K'/K *finita on* Δ *com element de* $\underline{Del}_l(G_{K'})$ *tenim que* I_L *actua trivialment.*

D'aquí obtenim una manera via moduls de Deligne com saber si una representació local és semiestable, de bona reducció,...

3.3.5 Corol·lari. *Denotem per* B_l *el cos* $\mathbb{Q}_l$ *si* $l \neq p$ *i pel cos* B_{cris} *si* $l = p$. *Donada* V *una representació* l*-àdica denotem per:*

$$\underline{\hat{D}}_{st,q}(V) := (B_{st,q} \otimes_{\mathbb{Q}_l} V)^{I_K},\ \underline{\hat{D}}_f(V) := (B_l \otimes V)^{I_K},\ \underline{\hat{D}}_{pf}(V) := \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B_l \otimes V)^H.$$

Sigui V *una representació potencialment semiestable de* G_K *i* $\Delta = \underline{\hat{D}}_{pst,q}(V)$. *Llavors:*

1. V *semiestable* $\Leftrightarrow$ I_K *opera trivialment sobre* Δ *i* $\Delta = \underline{\hat{D}}_{st}(V)$.
2. V *potencialment bona-reducció* $\Leftrightarrow$ $N = 0$ *sobre* Δ *i llavors* $\Delta = \underline{\hat{D}}_{pf}(V)$.
3. V *bona reducció* $\Leftrightarrow$ $N = 0$ *i* I_K *actua trivialment en* Δ.

Preguntem-nos si donat un mòdul de Deligne $\underline{Del}$ un pot obtenir la representació, la resposta és NO per a $l = p$ i SI per a $l \neq p$:

3.3.6 Proposició. *Sigui* $p \neq l$. *Sigui* $\Delta \in \underline{Del}_l(G_K)$, *definim per*

$$\underline{V}_{pst}(\Delta) := \{v \in B_{st,q} \otimes \Delta | Nv = 0\}.$$

Llavors;

1. $\underline{V}_{pst}(\Delta) \in Rep_{\mathbb{Q}_l,pst}(G_K)$,
2. $\underline{V}_{pst}$ *indueix una* $\otimes$*-equivalència entre* $\underline{Del}_l(G_K)$ *i* $Rep_{\mathbb{Q}_l,pst}(G_K)$ *on* $\underline{\hat{D}}_{pst}$ *és el quasi-invers.*

3.3.7 Observació. Quan $l = p$, necessitem posar una filtració en $\underline{\hat{D}}_{pst}(V)$ per a poder retrobar V del mòdul de Deligne, per fer això de com triem el logaritme q obtenim

$$B_{st,p,q} \subset B_{dR}$$

i això ens permet identificar $(\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K}$ amb $D_{dR}(V)$ i per tant una filtració. Fontaine proposa en [10] posar aquesta filtració en els mòduls de Deligne per a obtenir l'equivalència de categories.

3.3.8 Observació. Crec que es pot fer una modificació per L-representacions definint L-mòduls de Deligne i obtenir el resultat anteriors, no obstant falta comprovar-ho en detall (exercici).

3.3.3 Mòduls amb Frobenius i monodromia. Afegim-hi filtració.

Anem a introduir una noció equivalent de mòduls de Deligne posant-hi en aquest llenguatge la filtració que comentàven que necessitem per $p = l$ (en l'acabament de la subsecció anterior). **Aquí durant tota aquesta subsecció imposem que** $l = p$. Deixem escrit que les proves dels resultats següents i/o indicacions amb referències per les proves les podeu trobar a [10] i [3].

Sigui K' una extensió de K.

3.3.9 Definició Un $(\varphi, N, G_{K'/K})$-mòdul és un K'_0-espai vectorial D (recordem si M és un cos local M_0 és la maxima subextensió de M no ramificada) amb:

1. $\varphi : D \to D$ σ-lineal (σ és el Frobenius de K'_0)
2. aplicació K'_0-lineal $N : D \to D$,
3. acció semilineal de $G_{K'/K}$ complint
   (a) $N\varphi = p\varphi N$
   (b) $\forall g \in G_{K'/K}$ $g\varphi = \varphi g$ i $gN = Ng$.

3.3.10 Definició Diem que un $(\varphi, N, G_{K'/K})$-mòdul és discret si $\{g \in G_{K'/K} | gd = d, \ \forall d \in D\}$ és un obert a $G_{K'/K}$.

Considerem,

$$\underline{Mod}(\varphi, N, G_{K'/K})$$

la subcategoria plena dels $(\varphi, N, G_{K'/K})$-mòduls on els seus objectes són '$(\varphi, N, G_{K'/K})$-mòduls discrets de dimensió finita on es defineix la dimensió d'un $(\varphi, N, G_{K'/K})$-mòdul per $dimD := dim_{K'_0} D$. Denotem els $(\varphi, N, 1)$-mòduls com (φ, N)-mòduls.

3.3.11 Proposició. *Considerem el següent funtor:*

$$\underline{Co} : \underline{Mod}(\varphi, N, G_K) \to \underline{Del}_p(G_K)$$

$$D \mapsto P_0 \otimes_{K_0^{nr}} D.$$

És una ⊗-equivalència de categories.

Prenem $K' = K$ i per tant (φ, N)-mòduls (aquesta simplificació fa que ens restringim en aquesta secció a trobar una categoria de mòduls equivalent a representacions semi-estables sobre K enlloc de potencialment semiestables, veieu observació 3.3.18).

3.3.12 Definició Un (φ, N)-mòdul filtrat és un (φ, N)-mòdul D amb una filtració decreixent en $D_K := D \otimes_{K_0} K$, $(Fil^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$ per K-espais vectorials on $Fil^i D_K = D_K$ per $i << 0$ i $Fil^i D_K = 0$ per $i >> 0$.

Considerem D un (φ, N)-mòdul filtrat, $d = dimD = dim_{K_0} D$, obtenim que $\otimes^d_{K_0} D$ és un (φ, N)-mòdul filtrat amb $\varphi := \otimes^d \varphi$ i $N := N \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes N \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes N$, i filtració $Fil^i(\otimes^d D_K) := \sum_{i_1 + \ldots + i_d = i} Fil^{i_1} D_K \otimes \ldots \otimes Fil^{i_d} D_K$. Igualment podem considerar $\wedge^d_{K_0} D$ com un (φ, N)-mòdul filtrat amb l'estructura provinent de $\otimes D$. Del fet que $dim_{K_0}(\wedge^d_{K_0} D) = 1$ existeix un únic $i_0 \in \mathbb{Z}$ complint,
$Fil^i(\wedge^d D_K) = \begin{cases} \wedge^d{}_K D_K \ \textit{per} \ i \leq i_0 \\ 0 \ \textit{per} \ i > i_0 \end{cases}$
Igualment obtenim que existeix un únic $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ on $e_1 \in \wedge^d_{K_0} D \setminus \{0\}$ $\varphi(e_1) = \lambda_0 e_1$ amb $val(\lambda_0) = \alpha_0$.
Es defineix $t_H(D) := i_0$ i $t_N(D) := \alpha_0$.

3.3.13 Definició Donat D un (φ, N)-mòdul filtrat. Diem que D' és un (φ, N)-submòdul filtrat de D, si és un (φ, N)-mòdul amb $D' \hookrightarrow D$ commutant amb φ i N i complint $Fil^i(D'_K) = D'_K \cap Fil^i(D_K)$.

Anem a definir els mòduls pels quals obtindrem una equivalència de categories amb les representacions semiestables pel cas $p = l$.

3.3.14 Definició Sigui D un (φ, N)-mòdul filtrat. D s'anomena dèbilment admissible (=:w.a.=weak admissible) si compleix que $t_H(D) = t_N(D)$ i a més $t_H(D') \leq t_N(D')$ per a qualsevol (φ, N)-submòdul filtrat D' de D.

Fent la immersió de B_{st} en B_{dR} (triant així un uniformitzant concret) obtenim una filtració en $B_{st,p,q}$ donada per $Fil^m(B_{st,p,q}) := B_{st,p,q} \cap Fil^m(B_{dR})$.

3.3.15 Lema. *Sigui V una representació l-àdica de G_K (recordeu $l = p$). Sigui $D_{st}(V) := (B_{st,q} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ i definim en $D_{st}(V)$ el frobenius per $\varphi := \varphi_{B_{st,q}} \otimes Id$, $N = N_{B_{st,q}} \otimes Id$ i $Fil^i D_{st}(V)_K := (Fil^i B_{st,q} \otimes V) \cap D_{st}(V)_K$. Llavors;*
$D_{st}(V)$ és un (φ, N)-mòdul filtrat dèbilment admissible.

Denotem per

$$\underline{MF}^f_{K/K}$$

la categoria dels (φ, N)-mòduls filtrats discrets de dimensió finita que són dèbilment admissibles.

3.3.16 Teorema. (Colmez-Fontaine,[4]) *El functor,*

$$D_{st} : Rep_{st,\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \underline{MF}^f_{K/K}(\varphi, N)$$

$$V \mapsto (B_{st,q} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

és una equivalència de categories. S'obté V mitjançant,

$$V \cong \underline{V}_{st}(D_{st}(V)) = Hom_{\varphi,N,Fil^{\cdot},K_0-lineal}(D^*_{st}(V), B^+_{st,q}).$$

3.3.17 Observació. Observeu que si $N = 0$ en el (φ, N)-mòdul debilment admissible, llavors correspon a una representació cristal.lina.

3.3.18 Observació. Per a obtenir l'anterior resultat per a potencialment semiestables, tindriem que obtenir una inclusió de mòduls filtrats admissibles per extensions finites i prendre després limit inductiu.
Treballant amb $N = 0$ en aquests limit inductius de mòduls dèbilment admissibles trobariem l'equivalència amb les representacions potencialment cristal.lines.

Si enlloc de treballar amb $\mathbb{Q}_p$-representacions volem treballar amb L-representacions cal introduir algunes modificacions en la definició de (φ, N)-mòduls i la filtració, com per exemple treballar en $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-mòduls enlloc de K_0-espai vectorial, per veure les generalitzacions en detall consulteu [4].

3.3.19 Observació. Per a veure exemples concrets d'aquest mòduls filtrats i fer-ne la llista completa en dimensió 2 en alguns casos i llegir-ne les cristal.lines, consulteu §11 i §12 en [11].

Bibliografia

[1] *Barsotti, I.*: Varietà abeliane su corpi p-adici. I. Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68),Vol.1 (1969), 109–173.

[2] *Berger, L.*: Représentations p-adiques et équations différentielles. Inv.Math. 148 (2002), 219-284.

[3] *Breuil,C.*: p-adic Hodge theory, deformations and local Langlands. In Advanced course on Modular forms and p-adic Hodge theory. Quaderns num. 20 (july 2001) in CRM (Barcelona), pp.7-82.

[4] *Colmez, P., Fontaine, J.-M.*: Construction des représentations p-adiques semi-stables. Inv.Math.140, 2000, 1-43.

[5] *Deligne, P.*: Résumé des premiers exposés de A. Grothendieck, 1–24 I, SGA 7, Exposé I. LNM 288 Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, 1972. 1995.

[6] *Deligne, P.*: Valeurs de fonctions L et periodes d'integrals. Proc.Symp. Pure Math. 33 (2), 1979.

[7] *Deligne, P.*:La conjecture de Weil: II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137–252.

[8] *Fontaine, J.M.*: Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978). Astérisque 65(1979) Vol.III, 3–80.

[9] *Fontaine, J.M.*: Représentations p-adiques semi-stables. Exposé III in Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1998). Astérisque 223(1994), 113-184.

[10] *Fontaine, J.M.*: Représentations l-adiques potentiellement semi-stables. Exposé VIII in Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1998). Astérisque 223(1994), 321-347.

[11] *Fontaine, J.M. i Mazur, B.*: Geometric Galois Representations. Elliptic curves, modular forms, and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41–78, Ser. Number Theory, I, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[12] *Kato, K.*: Generalized explicit reciprocity laws. Adv. Stud. Contemp. Math.1(1999),57–126.

[13] *Khare, Ch. i Ramakrishna, R.*: Finiteness of Selmer groups and deformation rings. Invent.math.154 (2003), 179-198.

[14] *Ramakrishna, R.*: Infinitely ramified Galois representations. Ann.Math.(2)151 (2000), 793–815.

[15] *Taylor, R. i Wiles, A.*: Ring theoretic properties of certain Hecke algebras. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 553–572.

[16] *Wiles, A.*: Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

[17] *Xarles, X.*: Comparison theorems between crystalline and ètale cohomology: a short introduction. Publicat en la pàgina web personal d'en X.Xarles a http://mat.uab.es/∼xarles/articles.htm

Francesc Bars Cortina
Depart. Matemàtiques,
Edifici C,
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra, Barcelona,

CATALUNYA.
SPAIN.
e-mail: francesc@mat.uab.es