

Una solució a una pràctica de Teoria de Galois

Curs 97-98

Números trascendents sobre $\mathbb{Q}$

- **Objectiu.**

L'objectiu d'aquest escrit es demostrar que infinits nombres que podem expressar de forma analítica són nombres trascendents suposant cert un teorema de Lindemann-Weierstrass.

- **Trobem nombres que són trascendents sobre $\mathbb{Q}$**

En tota aquesta pràctica suposarem que coneixem el següent resultat de l'any 1895

Teorema 0.1 (Lindemann-Weierstrass). *Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nombres algebraics sobre $\mathbb{Q}$ diferents. Llavors les exponencials $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ compleixen que no hi ha cap polinomi no nul $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ complint $f(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) = 0$.*

Per una prova de l'anterior resultat podeu consultar la pàgina 135 del llibre "Fields and Galois Theory" de P. Morandi, GTM 167.

Recordem que sabem que π i e són nombres trascendents. El primer que va provar que e era transcendent va ser Hermite l'any 1873. π va ser demostrat que era transcendent per Lindemann l'any 1882.

Proveu vosaltres, utilitzant l'anterior teorema que:

Corol·lari 0.2. *Els nombres π i e són nombres trascendents sobre $\mathbb{Q}$.*

Prova. Suposem que π fos algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Llavors també ho és $i\pi$. Considerem llavors els dos nombres algebraics sobre $\mathbb{Q}$: $0, \pi$; aplicant el teorema de Lindemann-Weierstrass obtenim llavors que $1 = e^0$ i $e^{\pi i} = -1$ són $\mathbb{Q}$ linealment independents, cosa que és impossible per tant això prova que π és un nombre transcendent.

Suposem ara que e fos algebraic sobre $\mathbb{Q}$. Això per definició ens diu que existeixen $r_i \in \mathbb{Q}$ on

$$\sum_{i=0}^m r_i e^i = 0$$

Això diu que els nombres $e^0, e^1, \dots, e^m$ són $\mathbb{Q}$ -dependents. Com $0, 1, \dots, m$ són nombres algebraics diferents, utilitzant el teorema de Lindemann-Weierstrass obtenim que e ha de ser transcendent. $\square$

Anem a construir altres nombres trascendents.

Corol·lari 0.3. *Proveu que si u és un nombre algebraic no zero, llavors $\sin(u)$ i $\cos(u)$ són nombres trascendents. (En particular tenim que $\sin(1), \cos(3), \dots$ són nombres trascendents).*

Prova. Recordeu que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Observem que si u és algebraic tenim llavors com que i és algebraic que el nombre iu és algebraic, observem llavors que el teorema de Lindemann-Weierstrass diu que no existeix polinomi no nul f , complint $f(e^{iu}, e^{-iu}) = 0$. Suposem que $\sin(u)$ fos

algebraic; això vol dir que existeix $g(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ on $g(\sin(u)) = 0$, observem llavors que això ens diu $g(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2}) = \sum_{i=0}^r a_i (\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2})^i = \sum_{j=v}^s b_j e^{iju} = 0$ amb $v, s \in \mathbb{Z}$ convenients ($v < 0, s > 0$) i $b_j \in \mathbb{Q}$, però l'anterior expressió ens dona un polinomi $f(x, y) = \sum_{j=v}^0 b_j y^{-j} + \sum_{j=0}^s x^j$ on $f(e^{iu}, e^{-iu}) = 0$ en contradicció, provant així que $\sin(u)$ és un nombre transcendent.

La prova en el cas del $\cos(x)$ es semblant considerant que $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. $\square$

Intentem veure també que les funcions trigonomètriques aplicades a un nombre algebraic donen nombres transcendents. Intentem provar:

Lema 0.4. *Si β és un nombre transcendent sobre un cos K arbitrari, llavors β^{-1} és transcendent sobre K . Igualment si α és un nombre algebraic sobre K no nul, també és algebraic α^{-1} .*

Prova. Suposem que β^{-1} fos algebraic. Llavors tindriem que existeix un polinomi a $K[x]$, $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ complint $f(\beta^{-1}) = 0$; és a dir

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = 0$$

multiplicant l'anterior expressió per β^n obtenim llavors

$$\sum_{i=0}^n a_i \beta^{n-i} = 0$$

per tant tenim un polinomi $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ on $g(\beta) = 0$ dient-nos que β és algebraic en contra la hipòtesi, provant així l'enunciat. Si α és no nul la prova anterior mostra l'enunciat en el cas algebraic. $\square$

Aplicant l'anterior lema obseveu que tenim:

Corol.lari 0.5. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre $\mathbb{Q}$, llavors $\sec(u)$ i $\operatorname{cosec}(u)$ són transcendents sobre $\mathbb{Q}$.*

Apliquem igualment l'anterior lema per provar:

Corol.lari 0.6. *Si u és un nombre algebraic no nul sobre $\mathbb{Q}$, llavors $\tan(u)$ i $\cotan(u)$ són nombres transcendents sobre $\mathbb{Q}$.*

Prova. Com $\cotan(u) = (\tan(u))^{-1}$ utilitzant el lema si veiem el resultat per $\tan(u)$ obtenim el resultat per $\cotan(u)$. Anem doncs a demostrar que $\tan(u)$ és un nombre transcendent quan u és un nombre algebraic no nul.

Recordem que $\tan(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = 1 - \frac{2}{1 + e^{-2iu}}$. Suposem que $\tan(u)$ fos algebraic llavors $\tan(u) - 1$ seria algebraic on tindriem que $-\frac{2}{1 + e^{-2iu}}$ seria algebraic. Observeu però llavors que $1 + e^{-2iu}$ seria algebraic en particular tindriem que e^{-2iu} seria algebraic. Però això entra en contradicció amb el teorema de Lindemann-Weierstrass. Efectivament si és algebraic vol

dir que existeix $g(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ on $g(e^{-2iu}) = 0$. Considerem llavors els nombres algebraics diferents entre ells $0, -2iu, -4iu, \dots, -2niu$ tenim llavors que de complir-se $g(e^{-2iu}) = 0$ tindriem

$$\sum_{j=0}^n a_j e^{-2iuj} = 0$$

una relació de $\mathbb{Q}$ -dependència entre $e^0, e^{-2iu}, \dots, e^{-2niu}$ en contra del teorema de Lindemann-Weierstrass, provant així l'enunciat. $\square$

Veiem més exemples de nombres transcendentals.

Corol·lari 0.7. *Si $u \neq 1$ un nombre algebraic no zero i f una de les funcions trigonomètriques inverses, proveu que el valor complex de $f(u)$ és transcendental sobre $\mathbb{Q}$.*

Prova. Fem-ho per $\arcsin(u)$. Per les altres es fan semblantment (exercici). Suposem que $\arcsin(u)$ fos algebraic. Com $u \neq 0$ tenim que $\arcsin(u) \neq 0$, apliquem-hi el sinus tenim llavors que utilitzant que el sinus d'un nombre algebraic no nul és transcendental tenim llavors:

$$u = \sin(\arcsin(u))$$

on u seria transcendental en contra de la hipòtesi, provant-nos que $\arcsin(u)$ és transcendentat. $\square$

Finalment donem un altre exemple de nombres algebraics.

Corol·lari 0.8. *Si $u \neq 1$ un nombre algebraic qualsevol llavors $\log(u)$ és transcendental sobre $\mathbb{Q}$.*

Prova. Suposem que $\log(u)$ fos un nombre algebraic, com $u \neq 1$ un nombre algebraic diferent és el 0. Aplicant el teorema de Lindemann-Weierstrass obtenim que $e^{\log(u)} = u$ no compleix cap equació polinomial però u era algebraic, provant així que $\log(u)$ és transcendent sobre $\mathbb{Q}$ si $u \neq 1$ és un nombre algebraic. $\square$

- És π algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ Hem demostrat suposant el teorema de Lindemann-Weierstrass que els nombres π i e són transcendents sobre $\mathbb{Q}$. És un problema obert saber si el nombre π és transcendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ o si el nombre e és transcendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$. Per provar això caldria veure que no existeix un polinomi no nul complint $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ amb $f(e, \pi) = 0$.

Definició 0.9. *Si K una extensió sobre un cos F . Triem $a_1, \dots, a_m \in K$. Diem que $a_1, \dots, a_m$ són algebraicament independents sobre F si tot polinomi $f \in F[x_1, \dots, x_m]$ complint $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ llavors $f = 0$.*

Reformulant el nostre problema obert amb el llenguatge de la definició, la pregunta oberta és demostrar si els nombres π, e són algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.

En aquest camp matemàtic hi ha la següent conjectura:

Conjectura 0.10 (Schanuel). Si $y_1, \dots, y_m$ són nombres complexos $\mathbb{Q}$ -independents, llavors com a mínim m dels nombres $y_1, \dots, y_m, e^{y_1}, \dots, e^{y_m}$ són algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.

Llavors si suposem que l'anterior conjectura sigui certa llavors obtenim

Corol·lari 0.11. Suposant que fos certa la conjectura de Schanuel llavors tenim que π és transcendent sobre $\mathbb{Q}(e)$, i que e és transcendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$.

Prova. Es deixa com exercici al lector veure que π és transcendent sobre $\mathbb{Q}(e)$ és equivalent a e transcendent sobre $\mathbb{Q}(\pi)$ i equivalent a que e, π siguin algebraicament independents sobre $\mathbb{Q}$.

Considerem els dos nombres algebraics $1, i\pi$ que són $\mathbb{Q}$ -independents. Llavors considerem $i\pi, 1, e^{i\pi} = -1, e$ utilitzant llavors la conjectura tenim que per força els únics dos valors que poden ser algebraicament independents són $i\pi, e$ per tant obtenim que no existeix f no nul en $\mathbb{Q}[x, y]$ on $f(i\pi, e) = 0$. És clar llavors el mateix resultat per π, e provant el resultat, ja que si π fos algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ com i és algebraic també seria $i\pi$ algebraic sobre $\mathbb{Q}(e)$ cosa que acabem de provar que no succeeix. $\square$

- El problema clàssic de la quadratura del cercle Un problema dels temps de la Grècia clàssica, era:

Es possible construir un quadrat d'àrea π ? És a dir sempre triant com una longitud fixada com a 1 podem construir en regla i compas el cercle de radi 1, el problema es si podem construir el quadrat d'àrea π , és a dir si per regla i compàs podem trobar una longitud de $\sqrt{\pi}$, el fet de poder aconseguir-ho s'anomenava la quadratura del cercle.

Veureu a teoria que per construir un valor α mitjançant regla i compas és necessari i suficient que l'extensió $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ sigui de grau una potència de 2 i algebraica. Utilitzant això tenim:

Teorema 0.12. És impossible la quadratura del cercle.

Prova. Observem com π és transcendent, tenim que $\sqrt{\pi}$ és transcendent. Per tant l'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})|\mathbb{Q}$ no és algebraica, provant que no és construïble. $\square$

- Una prova on el nombre e és transcendent Anem a fer aquí la prova de la transcendència del nombre e sense utilitzar el resultat de Lindemann-Weierstrass. No obstant la prova que farem segueix en el cas particular per e les traces que se segueixen per la prova del teorema de Lindemann-Weierstrass.

Suposeu que e no fos transcendent sobre $\mathbb{Q}$. Això ens diu que tenim:

$$a_m e^m + \dots + a_1 e + a_0 = 0$$

on podem triar els $a_i \in \mathbb{Z}$ complint que $a_0 \neq 0$.

Definim:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-m)^p}{(p-1)!}$$

on p denota un nombre primer arbitrari. Observem que $\deg(f) = mp + p - 1$. Definim:

$$F(X) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(mp+p-1)}(x)$$

Observeu que $f^{(mp+p)} = 0$ i que $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x)$.
D'aquí obtenim per cada j

$$a_j \int_0^j e^{-x} f(x) dx = a_j F(0) - a_j e^{-j} F(j)$$

multiplicant per e^j i sumant sobre $j = 0, 1, \dots, m$ obtenim

$$\sum_{j=0}^m (a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x) dx) = F(0) \sum_{j=0}^m a_j e^j - \sum_{j=0}^m a_j F(j) = - \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=0}^{mp+p-1} f^{(i)}(j) \quad (1)$$

del fet que $\sum_{j=0}^m a_j e^j = 0$.

Proveu llavors que $f^{(i)}(j)$ són enters, i és divisible per p a excepció per $j = 0$ i $i = p - 1$ i llavors $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \dots (-m)^p$.
Llavors tenim que el valor de (1) és

$$Kp + a_0(-1)^p \dots (-m)^p$$

per algun $K \in \mathbb{Z}$. Triant $p > \max(m, |a_0|)$ l'enter $Kp + a_0(-1)^p \dots (-m)^p$ no és divisible per p .

Per tant pels p suficientment grans el valor de (1) no és zero.

Estimem ara el valor de la integral. Observem que per $0 \leq x \leq m$ llavors

$$|f(x)| \leq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

on tenim llavors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^m a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x) dx \right| &\leq \sum_{j=0}^m |a_j e^j| \int_0^j \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^m |a_j e^j| j \frac{m^{pm+p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

compreveu que l'última expressió tendeix a 0 quan p tendeix a ∞ , en contradicció amb el fet que hem vist que aquest valor és no nul pels p suficientment grans, provant així:

Teorema 0.13 (Hermite). *El nombre real e és transcendent sobre $\mathbb{Q}$.*