

Fonaments d'àlgebra

Llista 5 de Problemes

Ideals primers-maximals. Axioma de Zorn Curs 2001/02, 1er semestre

1. Considerem $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ on $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Observeu que $(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, per tant tot element de $\mathbb{H}$ no nul·l és invertible. Calculeu tots els ideals dreta, esquerra i bilaterals per aquest anell.
2. És veritat que donat un anell R on tots els seus ideals són bilaterals, llavors R és un anell commutatiu?
3. Un element x de un anell A s'anomena nilpotent si existeix un natural $n > 0$ complint $x^n = 0$. Proveu llavors que $1 + x$ és una unitat de A .
4. Sigui R un anell commutatiu.
 - (a) Siguin $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ ideals primers de R i sigui $\mathfrak{a}$ un ideal contingut en $\cup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Demostreu llavors que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ per algun i .
 - (b) Siguin $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideals de R i sigui $\mathfrak{p}$ un ideal primer que conté $\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$. Proveu que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$ per a algun i . Proveu a més que si $\mathfrak{p} = \cap \mathfrak{a}_i$ llavors $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ per a algun i .
5. Els ideals primers de $\mathbb{Z}$ són 0 i $p\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ primer.
6. Sigui R un anell boole abeli. Proveu:
 - (a) cada ideal primer $\mathfrak{p}$ de R és maximal i $A/\mathfrak{p}$ és un cos.
 - (b) cada ideal generat per un nombre finit d'elements de R és un ideal principal.
7. Sigui R un anell commutatiu on cada element $x \in R$ satisfi $x^n = x$ per algun $n > 1$ (depenent de x). Proveu que cada ideal primer de R és maximal.
8. Sigui R un anell commutatiu. Denotem per N el conjunt de elements nilpotents de l'anell, és a dir els $x \in R$ on existeix un natural on $x^n = 0$. Anomenem N el nilradical de R .

- (a) Veure que el nilradical s un ideal de A i A/N no t cap element nilpotent $\neq 0$.
- (b) Provar que tot element nilpotent pertany a la intersecció de tots els ideals primers de R .
- (c) Proveu que la intersecció de tots els ideals primers de R s justament l'ideal N .
Indicació: utilitzeu el axioma de Zorn considerant fixat un element $f \in R$ que no fos nilpotent i sigui el conjunt Σ el conjunt d'ideals $\mathfrak{a}$ amb la propietat

$$n > 0 \Rightarrow f^n \notin \mathfrak{a}.$$

9. Sigui R un anell commutatiu. Definim el radical de Jacobson de R com la intersecció de tots els ideals maximals de l'anell R , anotem $r_J(R)$. Proveu:

$$x \in r_J(R) \Leftrightarrow 1 - xy \text{ és una unitat en } R \ \forall y \in R.$$

10. Sigui R un anell commutatiu, N el seu nilradical. Proveu que son equivalents:
- (a) R t exactament un ideal primer.
 - (b) Cada element de R s o una unitat o nilpotent.
 - (c) R/N s un cos.
11. En un anell commutatiu R , sigui Σ el conjunt de tots els ideals en els quals cada element s un divisor de zero. Proveu que el conjunt Σ t elements maximal i que cada element maximal de Σ s un ideal primer. Per tant el conjunt de divisors de zero de R s una uni d'ideals primers.
12. Un anell commutatiu R s'anomena local si t exactament un ideal maximal. Sigui ara R un anell commutatiu i $\mathfrak{m}$ un ideal diferent del total tal que per cada $x \in R - \mathfrak{m}$ s una unitat en R . Proveu llavors que R s un anell local i $\mathfrak{m}$ el seu ideal maximal.

Exercici suplementari Sigui A un anell commutatiu i sigui X el conjunt de tots els ideals primers de A . Per cada subconjunt E de A , denotarem $V(E)$ el conjunt de tots els ideals primers que contenen E . Proveu que:

- (a) si $\mathfrak{a}$ s el ideal generat per E , llavors $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

(b) $V(0) = X, V(1) = X$.

(c) si $(E_i)_{i \in I}$ s una familia qualsevol de subconjunts de A , llavors

$$V(\cup_{i \in I} E_i) = \cap_{i \in I} V(E_i)$$

(d) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Aquests resultats proven que els conjunts $V(E)$ satisfant els axiomes de conjunts tancats en un espai topologic. La topologia resultant s'anomena la topologia de Zariski(s un topologogia T_0 , no es Hausdorff!!). Intenteu veure que vol dir que en aquesta topologia un punt $\{x\}$ s tancat en $Spec(R)$.