

# Pràctiques Integrades 1er de Matemàtiques

Pràctica 2

Curs 2002–03

## 2 Càlculs Algebraics

Maple és un “C.A.S” , això vol dir un “**Computer Algebra System**” (que en català s’anomena normalment un *Manipulador Algebraic*). Això significa que Maple coneix totes les regles algebraiques que vosaltres sabeu. Al mateix temps que aneu progressant en el Càlcul, l’Àlgebra lineal i les altres especialitats matemàtiques veureu que Maple també conté les operacions essencials d’aquests temes introduïdes en el seu gran conjunt de comandes.

En aquesta secció aprendreu com introduir una expressió algebraica i a donar valors a les seves variables. Després aprendreu les comandes que us permetran expandir, factoritzar i simplificar expressions.

És recomanable iniciar les sessions executant la comanda `restart` que ja vam veure a la pràctica anterior, recordeu quin és el seu efecte?

```
> restart;
```

### 2.1 La comanda `subs( )`

La primera comanda que analitzarem ens permetrà substituir valors en les variables o paràmetres d’una expressió algebraica que haguem definit.

#### Exemple 2.1

Com a primer exemple comencem amb l’expressió  $3x^2+8$  i assignem-li com a nom `W`.

```
> W:=3*x^2+8;
```

```
> W;
```

Ara suposem que volem substituir la variable `x` de l’expressió  $3x^2+8$  pel valor 4. La forma més ràpida de fer-ho és utilitzar la comanda de Maple `subs( )`. Tot seguit veiem com fer-ho.

```
> subs(x=4,3*x^2+8);
```

De forma alternativa podem aplicar la comanda `subs( )` a `W`.

```
> subs(x=4,W);
```

**Exemple 2.2**

La comanda `subs( )` també funciona bé amb valors simbòlics. Per exemple, per a substituir  $x$  per  $5 + 2u$  en l'expressió  $3x^2 + 8$  executem la línia següent (en aquest cas posem l'etiqueta `M` al resultat).

```
> W:=3*x^2+8;
```

```
> M:=subs(x=5+2*u,W);
```

I ara per a fer que Maple “multipliqui” aquesta expressió utilitzem la comanda `expand( )`.

```
> expand(M);
```

**Exemple 2.3**

La comanda `subs( )` és molt versàtil. Podem utilitzar-la per a avaluar expressions en les que intervenen més d'una variable. Aquí substituïm la  $x$  per 7 i la  $y$  per 12 en l'expressió  $U = \frac{2x^2}{5} + 3y$ .

```
> U:=(2/5)*x^2+3*y;
```

```
> subs(x=7,y=12,U);
```

```
> evalf(%);
```

**Exemple 2.4**

També podem utilitzar la comanda `subs( )` per a substituir un valor en una equació. Això és el tipus de coses que cal fer per a verificar si un determinat valor “satisfà” l'equació. En les línies que venen a continuació substituïrem diferents valors en l'equació  $x^3 - 5x^2 + 7x - 12 = 0$ . És algun d'aquests valors una solució de l'equació?

Noteu que utilitzem “:=” per assignar el nom i només “=” per a l'equació mateixa.

```
> eqn:=x^3-5*x^2+7*x-12=0;
```

```
> subs(x=3,eqn);
```

```
> subs(x=4,eqn);
```

```
> subs(x=5,eqn);
```

**Exercici 2.1**

Assigneu el nom  $k$  a l'expressió  $x^2 + 4x - 3$ . Un cop fet això dieu  $M$  a l'expressió  $k^2 - 9$ . Finalment feu que Maple calculi  $3M + 6$ .

Nota: per fer que Maple multipliqui les expressions utilitzeu la comanda `expand( )`. És a dir, introduïu

```
> expand(3*M+6);
```

Apreneu més coses sobre la comanda `expand( )` en l'apartat següent.

### Exercici 2.2

Desenvolueu  $(1 + x)^4$  utilitzant la comanda `expand( )`.

### Exercici 2.3

Sigui  $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Calculeu  $P$  si  $x = 0.01$ ,  $a = -\frac{1}{5}$ ,  $b = \frac{2}{5}$ ,  $c = 0$ , i  $d = \frac{13}{15}$

### Exercici 2.4

Utilitzeu la comanda `subs( )` per a verificar si algun dels nombres 1, 2 o 3 és una solució de l'equació  $x^3 - 16x^2 + 51x - 36 = 0$ .

## 2.2 La comanda `expand( )`

L'ús principal de la comanda `expand( )` és el de “fer les multiplicacions” en els productes d'expressions polinòmiques. També es pot utilitzar per a desenvolupar funcions trigonomètriques i altres tipus de funcions més generals.

### Exemple 2.5

Utilitzeu la comanda `expand( )` per efectuar les multiplicacions en  $(x + 2)^2 (3x - 3)(x + 5)$ .

```
> k:=(x+2)^2*(3*x-3)*(x+5);
```

```
> expand(k);
```

**Exemple 2.6**

Maple aplica algunes de les identitats trigonomètriques més comuns per a desenvolupar  $\sin(2x)$  i  $\cos(2x)$ .

```
> expand(sin(2*x));
> expand(cos(2*x));
```

Feu alguna prova desenvolupant el sinus i el cosinus d'alguns altres múltiples enters de  $x$ . Per exemple:  $\sin(3x)$ ,  $\cos(6x)$ , etc.

**Exemple 2.7**

Finalment feu que Maple multipliqui l'expressió  $x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

```
> h:=x^(1/2)*(x^(3/2)+x^(-1/2));
> expand(h);
```

**Exercici 2.5**

Desenvolueu  $(x + 1)^n$  per a  $n = 2, 3$  i  $4$ .

**2.3 La comanda factor( )**

La comanda `factor` agrupa un polinomi en producte de factors utilitzant nombres enters i fraccions. Aprenem el seu funcionament amb una serie d'exemples.

**Exemple 2.8**

Factoritzem l'expressió:  $3x^2 - 10x - 8$

```
> w:=3*x^2-10*x-8;
> factor(w);
```

O podem fer el mateix en una sola línia:

```
> factor(3*x^2-10*x-8);
```

**Exemple 2.9**

Primer desenvolupem l'expressió  $2(x-2)(2x^2+5x+2)(x+4)$ . Després apliquem la comanda `factor()` al resultat. Podeu explicar per què el resultat final sembla diferent de l'expressió original?

```
> H:=2*(x-2)*(2*x^2+5*x+2)*(x+4);  
> ans:=expand(H);  
> factor(ans);
```

**Exemple 2.10**

Maple pot factoritzar expressions amb més d'una variable. Per exemple, factoritzem l'expressió, donada en funció de les variables  $x$  i  $y$ ,  $x^2y + 2xy + y$

```
> h:=x^2*y+2*x*y+y;  
> factor(h);
```

**Exemple 2.11**

Si Maple no pot factoritzar una expressió utilitzant nombres racionals (és a dir, enters i fraccions) donarà com a resultat el mateix que heu introduït sense cap canvi.

```
> factor(3*x^2-10*x-9);
```

**Exemple 2.12**

La comanda `factor()` no està limitada als polinomis. Es pot utilitzar per a factoritzar altres formes d'expressions, per exemple, les que contenen funcions trigonomètriques. Factoritzeu  $(\sin x)^2 - (\cos x)^2$ .

```
> factor((sin(x))^2-(cos(x)^2));
```

**Exemple 2.13**

Si la comanda `factor()` s'utilitza amb una expressió racional, es factoritza el numerador i el denominador i els factors comuns es cancel·len per a simplificar l'expressió:

```

> A:=(x^3-7*x^2+15*x-9)/(x^2+4*x+4);
> factor(A);
> B:=(x^3-7*x^2+15*x-9)/(x^2-4*x+3);
> factor(B);

```

El següent exemple us permet veure la forma factoritzada sense les simplificacions.

### Exemple 2.14

Les comandes de Maple `numer( )` i `denom( )` us permeten aïllar tant el numerador com el denominador d'una fracció. Aquí utilitzem aquestes comandes per examinar els factors del numerador i el denominador per separat (és a dir, abans de les simplificacions dels factors comuns).

```

> B:=(x^3-7*x^2+15*x-9)/(x^2-4*x+3);
> numer(B); denom(B);
> factor(numer(B)); factor(denom(B));

```

### Exercici 2.6

Factoritzeu l'expressió  $3x^4 - 2x^3 + 22x^2 - 18x - 45$ .

### Exercici 2.7

Factoritzeu l'expressió  $x^{(\frac{1}{2})} - x^{(\frac{3}{2})}$  i després utilitzeu la comanda `expand( )` per a comprovar el resultat.

## 2.4 La comanda `simplify( )`

La comanda `simplify( )` és la que ens permet simplificar diferents tipus d'expressions. Comencem veient el seu funcionament amb un seguit d'exemples.

**Exemple 2.15**

Considereu l'expressió  $(\cos x)^5 + (\sin x)^4 + 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 - \cos(2x)$ . Maple pot aplicar identitats per a simplificar expressions matemàtiques llargues, com ara expressions trigonomètriques.

```
> V:=cos(x)^5 + sin(x)^4 + 2*cos(x)^2 - 2*sin(x)^2 - cos(2*x);  
> simplify(V);
```

**Exemple 2.16**

Les expressions trigonomètriques amb arguments donats com a múltiples d'algun angle queden simplificades en termes de funcions trigonomètriques d'aquest angle si és possible:

```
> simplify(sin(5*t)+sin(3*t));
```

**Exemple 2.17**

La comanda `simplify( )` es pot utilitzar per a sumar expressions racionals. A continuació reescrivim la suma  $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1}$  com una única fracció.

```
> M:=(1/(x+1))+(x/(x-1));  
> simplify(M);
```

**Exercici 2.8**

Simplifiqueu l'expressió  $\frac{7}{x+2} + \frac{3x}{(x+2)^2}$

**Exercici 2.9**

Com simplifica Maple l'expressió  $\sin(3t) - \sin(7t)$ ? Si aquesta expressió "simplificada" és o no és útil dependrà del que es tingui planejat fer amb ella.

### 2.4.1 La comanda `collect( )`

Hi ha ocasions en les que el que es necessita no és una simplificació com les que dona la comanda `simplify()` si no que el que interessa és *agrupar* els termes d'una expressió segons les potències (enteres o fraccionaries) d'una variable en concret. Per fer aquest tipus de manipulació es pot utilitzar la comanda `collect( )` com en l'exemple següent:

#### Exemple 2.18

Si considereu l'expressió polinòmica  $x^3 - x^2 y + x^2 - 2xy - x - y^2 x + y^3 + y^2 - y - 1$  (respecte les variables  $x$  i  $y$ ) podeu agrupar respecte  $x$  amb

```
> collect(x^3-x^2*y+ x^2-2*x*y-x-y^2*x+y^3+y^2-y-1,x);
```

Com seria l'expressió agrupant respecte de la variable  $y$ ?

Si mireu en l'ajuda de Maple veureu que la comanda `collect( )` admet que la *variable* respecte de la que es fa l'agrupament pugui ser una expressió gairebé arbitrària.

#### Exercici 2.10

Agrupeu en funció de  $\ln(x)$  l'expressió  $a \ln(x) - x \ln(x) - x$ . Feu el mateix, respecte  $e^x$ , amb l'expressió  $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - \frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}$ .