Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 4

curs 2002–03

4 Resoldre equacions

En aquesta pràctica aprendrem a aplicar la comanda de Maple `solve( )` per a obtenir les solucions **exactes** d'equacions (quan això sigui possible). Recordeu que en nombrosos casos no és possible obtenir solucions exactes de les equacions i que s'ha de deixar la feina als *solucionadors numèrics* per a poder calcular solucions **aproximades**. Més endavant en aquesta mateixa pràctica utilitzarem la comanda de Maple `fsolve( )` per a obtenir aproximacions decimals de solucions. També es discutirà la resolució de sistemes d'equacions lineals.

Comencem reinicialitzant les variables i carregant el paquet **plots**.

```
> restart:
```

```
> with(plots):
```

4.1 Introduir i manipular equacions: les comandes lhs( ) i rhs( )

En aquest apartat veurem unes comandes bàsiques que ens permeten manipular equacions i extreure'n informació.

Exemple 4.1

Es pot donar un nom a una equació igual que es fa amb qualsevol altre expressió. En la línia següent introduïm l'equació $x^3 - 5\,x^2 + 23 = 2\,x^2 + 4\,x - 8$ i li posem com a nom `eqn1`.

```
> eqn1:=x^3-5*x^2+23=2*x^2+4*x-8;
> eqn1;
```

Exemple 4.2

Podem aïllar la part esquerra i la part dreta de l'equació utilitzant les comandes `lhs( )` i `rhs( )`.

```
> lhs(eqn1);
```

```
> rhs(eqn1);
```

Exemple 4.3

Vegeu com podem utilitzar les comandes `lhs( )` i `rhs( )` per a obtenir una equació que és equivalent a l'equació original `eqn1` però que té com a part dreta un 0. Posem-li com etiqueta `eqn2`.

```
> eqn2:=lhs(eqn1)-rhs(eqn1)=0;
> eqn2;
```

4.2 Obtenir solucions exactes: la comanda `solve( )`

En aquest apartat veurem com utilitzar la comanda `solve` en diferents situacions i el seu funcionament. Per començar considerarem equacions polinòmiques. Existeixen algoritmes per a calcular les solucions **exactes** per a polinomis que tenen fins a **grau 4**. La comanda de Maple `solve( )` coneix aquests algoritmes i els aplica. Aquesta comanda necessita dos arguments: l'equació i el nom de la variable.

Exemple 4.4

Per a obtenir les solucions exactes de l'equació polinòmica $3\,x^3 - 4\,x^2 - 43\,x + 84 = 0$ utilitzem la comanda `solve( )`. Noteu que el segon argument de la comanda li diu a Maple que x és la incògnita respecte de la qual volem obtenir la solució.

```
> solve(3*x^3-4*x^2-43*x+84=0,x);
```

Aquí Maple ha trobat les tres solucions i les ha ensenyades. Les solucions són retornades en una estructura de dades que s'anomena llista.

Exemple 4.5

A vegades voldrem seleccionar una solució de la llista de solucions obtinguda i utilitzar-la posteriorment en un altre càlcul. Podem fer això assignant primer un nom (en aquest cas utilitzem la lletra `N`) al resultat obtingut de la comanda `solve()`. Aleshores podem utilitzar un índex numèric per aïllar elements de la llista. Per exemple `N[1]` és el primer número de la llista, `N[2]` és el segon i així successivament (fixeu-vos que utilitzem claudàtors).

```
> N:=solve(x^2-5*x+3=0,x);
> N[1];
```

Exemple 4.6

Quan es treballa amb la comanda `solve( )` sovint és convenient començar donant un nom a l'equació. Recordeu que utilitzem "`:=`" per assignar el nom i només "`=`" per a l'equació pròpiament dita.

```
> eqn1:=7*x^3-11*x^2-27*x-9=0;
```

Seguidament resolem l'equació utilitzant la comanda `solve( )` i assignem el nom `H` al resultat.

```
> H:=solve(eqn1,x);
```

Per a practicar comproveu que cada un d'aquests valors satisfà l'equació. Això es pot fer fàcilment utilitzant la comanda `subs( )` que ja ha estat analitzada en una pràctica anterior. Repaseu-ne la síntaxi i el seu funcionament.

```
> subs(x=H[1],eqn1);
> subs(x=H[2],eqn1);
> subs(x=H[3],eqn1);
```

Exemple 4.7

A vegades les solucions "exactes" són massa complicades per a poder ser realment útils. En les dues línies següents resolem l'equació $x^3 - 34\,x^2 + 4 = 0$.

```
> eqn1:=x^3-34*x^2+4=0;
> H:=solve(eqn1,x);
```

Com podeu veure, llegir aquestes solucions exactes és realment un repte! Noteu que I representa $\sqrt{-1}$. Quan una solució és així de complicada és més útil mirar una solució aproximada utilitzant la comanda `evalf( )` que ja coneixeu.

```
> evalf(H);
```

Una bona alternativa a la comanda `solve( )` en una situació com la de l'exemple que acabem de veure és la comada `fsolve( )` que discutirem en la secció següent.

La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a determinar solucions exactes d'equacions **no polinòmiques**. Tot seguit veurem una llista d'alguns exemples simples d'aquest tipus. En tot cas, si les equacions són complicades, per exemple si combinen exponencials, polinomis i expressions trigonomètriques, normalment no es podrà disposar de les solucions exactes. Un altre cop la comanda `fsolve( )` serà una alternativa.

Exemple 4.8

Resoleu l'equació $5\,e^{\left(\frac{x}{4}\right)} = 43$.

```
> solve(5*exp(x/4)=43,x);
```

Exemple 4.9

A vegades Maple no mostra **totes** les solucions possibles.

```
> solve(sin(x)=1/2,x);
```

Com podeu utilitzar el resultat que acabeu d'obtenir amb la comanda `solve` per a poder escriure el conjunt de totes les solucions de l'equació?

Exercici 4.1

Resoleu l'equació $x^3 - 11\,x^2 + 7\,x + 147 = 0$. Per què Maple produeix només dues solucions diferents per a aquesta equació cúbica? Per què una d'elles està escrita dues vegades? (**Indicació:** Factoritzeu la part esquerra de l'equació).

El fet que $(x - 7)$ és un **factor repetit** porta com a conseqüència que l'equació cúbica tingui només dues solucions diferents -3 i 7. Diem que l'arrel 7 té **multiplicitat 2**, això significa que hi ha dos factors de la forma $(x - 7)$ en la factorització del polinomi.

4.3 Obtenir solucions aproximades: la comanda `fsolve( )`

La comanda `fsolve()` es pot utilitzar per a aproximar solucions de qualsevol tipus d'equació i funciona de manera anàloga a la comanda `solve()`. Per a equacions polinòmiques `fsolve()` produeix una **llista completa** de totes les solucions reals en un sol pas (mireu l'Exemple 4.10). Per a altres tipus d'equacions, `fsolve( )` es pot utilitzar per a obtenir les solucions **d'una en una** (mireu els Exemples 4.11 i 4.12).

Exemple 4.10

La comanda de Maple `fsolve( )` calcularà una aproximació numèrica per a cada una de les solucions reals d'una equació polinòmica. En aquest exemple l'utilitzarem per aproximar totes les solucions reals de l'equació: $x^4 - x^3 - 17\,x^2 - 6\,x + 2 = 0$.

```
> eqn:=x^4-x^3-17*x^2-6*x+2=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Les quatre solucions que es mostren ens donen una llista completa de les solucions de l'equació polinòmica.

Exemple 4.11

En aquest exemple trobarem **totes** les solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$ utilitzant la comanda `fsolve( )`.

```
> eqn:=x^3+1-exp(x)=0;
> fsolve(eqn,x);
```

Maple ens dóna una solució real però aquest cop Maple no ens ha explicat la historia completa. Hi ha altres solucions? Com es poden trobar? Tot seguit en l'Exemple 4.12 es presenta un procediment sistemàtic per a determinar les solucions que resten.

Exemple 4.12

Trobem les altres solucions reals de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$. El primer pas per a trobar les altres solucions és fer un dibuix del gràfic de la part esquerra de l'equació. Recordeu que els talls amb l'eix de les x de $y = x^3 + 1 - e^x$ es corresponen exactament amb les solucions de l'equació $x^3 + 1 - e^x = 0$.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..5,y=-5..15);
```

El gràfic mostra **quatre** interseccions amb l'eix de les x. Una d'elles correspon a la solució que hem obtingut en l'Exemple 4.11. Sabrieu dir quina? Com trobaríeu les altres que falten?

Podem estendre la comanda `fsolve( )` per a que miri de trobar una solució en un interval particular. Per exemple per a trobar la solució negativa li demanem a Maple que busqui en l'interval $[-1, -0.2]$ ja que podem veure a partir del gràfic que hi ha exactament una solució en aquest interval. La manera de fer-ho es escriure l'interval corresponent juntament amb el nom de la variable a la comanda `fsolve`.

```
> fsolve(eqn,x=-1..-.2);
```

Per a determinar les altres dues solucions utilitzem `fsolve( )` un altre cop, però aquesta vegada buscant a l'interval $[1, 2]$ i a l'interval $[4, 5]$.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
> fsolve(eqn,x=4..5);
```

Què passa si demaneu a Maple que busqui una solució en un interval on no hi ha solucions? Proveu-ho.
A partir del gràfic és clar que no hi ha talls amb l'eix de les x entre 2 i 4 (i per tant no hi ha solucions).

```
> fsolve(eqn,x=2..4);
```

Noteu que Maple simplement respon amb la línia que originalment heu introduït sense cap canvi quan no pot trobar una solució a l'interval donat.

Hi ha altres solucions? Per exemple, hi ha alguna solució per a x més gran que 5? Podem comprovar això fent més gran l'interval sobre el que fem el gràfic. En la línia següent allarguem l'interval fins al $[-3, 50]$.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..50,y=-10..15);
```

No apareixen nous talls amb l'eix de les x. El gràfic confirma el que podem esperar mirant els termes de l'equació, és a dir el terme exponencial domina i fa que el gràfic vagi baixant a la llarga.
Alternativament podem utilitzar la comanda `fsolve( )`, ara buscant en aquest interval més gran.

```
> fsolve(eqn,x=5..50);
```

Tal com esperàvem Maple no haurà trobat solucions.
D'una forma semblant podem comprovar si hi ha solucions **cap a l'esquerra**. Aquí busquem si hi ha solucions a l'interval $[-50, -1]$.

```
> fsolve(eqn,x=-50..-1);
```

Cap ni una tampoc!

Ara finalment tenim una llista completa de les solucions aproximades de la nostra equació original $x^3 + 1 - e^x = 0$. Són: $-.8251554597$, 0, 1.545007279 i 4.567036837.

Exemple 4.13

Utilitzem `fsolve( )` per a calcular les solucions aproximades de l'equació: $\dfrac{x^2}{20} - 10\,x = 15\,\cos(x + 15)$.

Com ja hem vist en l'últim exemple utilitzarem un gràfic per ajudar-nos a determinar el nombre i la situació aproximada de les solucions. La nostra feina es simplifica si comencem convertint l'equació que tenim en una d'equivalent que té com a part dreta un 0. Així buscarem les solucions de l'equació equivalent: $\dfrac{x^2}{20} - 10\,x - 15\,\cos(x + 15) = 0$.

Si ara dibuixem el gràfic de la part esquerra d'aquesta equació obtindrem un altre cop solucions en cada un dels talls amb l'eix de les x.

```
> eqn:=x^2/20-10*x-15*cos(x+15)=0;
```

```
> plot(lhs(eqn),x=-10..10);
```

A partir del gràfic sembla que hi ha una solució a l'interval [1, 2]. Així doncs ara dirigirem Maple cap a trobar una solució en aquest interval.

```
> fsolve(eqn,x=1..2);
```

Hem trobat totes les solucions d'aquesta equació? De fet hi ha una altra solució! Per a trobar-la comenceu estirant l'interval sobre el que heu fet el gràfic. Aleshores utilitzeu `fsolve( )` per a obtenir una aproximació numèrica d'aquesta segona solució.

Exercici 4.2

Determineu totes les solucions de l'equació $x^5 - 4\,x^3 + 3\,x^2 + 7\,x - 1 = 0$. Comenceu mirant un gràfic significatiu.

Exercici 4.3

Determineu totes les solucions de l'equació $x^2 - 2 = \ln(x + 5)$. Utilitzeu el gràfic **d'una** expressió per a localitzar les solucions. Comproveu cada una de les solucions substituint-la en l'equació original.

Exercici 4.4

Els gràfics de $y = 10 - x^2$ i de $y = 4\sin(2\,x) + 5$ s'intersequen dues vegades sobre l'interval $[-5,\,5]$.
a) Feu el gràfic de les dues equacions juntes i estimeu amb el ratolí els punts d'intersecció.
b) Escriviu una equació que es pugui resoldre per a determinar les coordenades x dels puns d'intersecció.
c) Utilitzeu `fsolve( )` per a resoldre aquesta equació.
d) Utilitzeu els resultats de la part c) per a estimar les coordenades y dels punts d'intersecció.
e) Sembla que les corbes es poden intersectar en un tercer punt a prop de $(1,\,9)$. Utilitzeu `fsolve( )` i/o un gràfic significatiu per a demostrar que no hi ha cap punt d'intersecció en aquest lloc.

4.4 Resoldre equacions formals

En moltes ocasions Maple també pot resoldre equacions de manera formal per a qualsevol de les variables que hi aparegui. Suposeu que volem obtenir la solució per a la variable g de l'equació: $4 - v = 2\,T - k\,g$. És a dir, volem aïllar g en funció de les demés variables. La comanda `solve( )` funciona bé en aquest cas.

```
> solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Aquí hi ha una manera més maca per a mostrar el mateix resultat per pantalla:

```
> g=solve(4-v=2*T-k*g,g);
```

Exercici 4.5

Editeu l'última comanda per a trobar solucions per a les altres lletres T, k i v.

Exercici 4.6

Resoleu l'equació $x^2 + y^2 = 9$ per a la variable y. Assigneu el conjunt de solucions a una variable que es digui S. Quina relació hi ha entre les solucions `S[1]` i `S[2]`?

4.5 Resoldre sistemes d'equacions lineals utilitzant la comanda `solve( )`

Recordeu que cal reinicialitzar les variables abans de continuar. Carreguem també el paquet **plots**:

```
> restart:
> with(plots):
```

La comanda `solve( )` també es pot utilitzar per a resoldre un sistema de m equacions lineals amb n incògnites. En direm un **sistema lineal** m **per** n perquè sigui més curt.

Exemple 4.14

Començarem per resoldre el sistema 2 per 2: $\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$

```
> solve({3*x+2*y=3,x-y=-4});
```

Un gràfic de les dues funcions subjacents mostrarà que la solució correspon al punt d'intersecció en $(-1, 3)$. Però primer necessitem obtenir la forma explícita de cada una de les dues funcions lineals abans de poder fer-ne el dibuix. Per tant resolem cada una de les equacions respecte y.

```
> y1:=solve(3*x+2*y=3,y);
> y2:=solve(x-y=-4,y);
```

Ara construim un gràfic format de dues parts: la "`part1`" conté els gràfics de les dues equacions i la "`part2`" dibuixa el punt que és la solució que hem trobat. Aquest punt ha de ser el punt d'intersecció de les dues línies. Ho és efectivament?

```
> part1:=plot([y1,y2],x=-5..5):
> part2:=plot([[-1,3]],style=point,color=blue,symbol=circle):
> display([part1,part2]);
```

Exemple 4.15

En aquest exemple solucionarem un sistema **3 per 3** amb incògnites x, y i z.

Resolem el sistema 3 per 3: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3\,x + y = 3 \\ x - 2\,y - z = 0 \end{cases}$

```
> solve({x+y+z=1, 3*x+y=3, x-2*y-z=0});
```

Exercici 4.7

Determineu la solució del sistema: $\begin{cases} 4\,x + 3\,y = 12 \\ 5\,x - 7\,y = 35 \end{cases}$

Comproveu la solució substituint els valors que s'obtenen en les dues equacions del sistema.

Sistemes lineals amb un nombre de solucions infinit

Quan un sistema té més **incògnites** que **equacions** sovint trobem no una sinó un nombre infinit de solucions. Tot seguit en veurem un exemple.

Exemple 4.16

Resolem el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3\,x+y=3 \end{cases}$

```
> solns:=solve({x+y+z=1, 3*x+y=3});
```

Noteu que aquest cop no obtenim un únic conjunt de valors numèrics per a x, y i z. En lloc d'això Maple ens diu com han d'estar relacionats els diferents valors de x, y i z per a construir una solució típica.

En particular l'expressió $y = y$ en la resposta anterior indica que la incògnita y pot ser **qualsevol** número. Ens referirem a aquesta incògnita com la *variable lliure* de la solució. Per a obtenir qualsevol **solució particular** (entre les infinites solucions que hi ha) trieu un valor per a la y i utilitzeu-lo per a calcular els valors corresponents de la x i de la z. Per exemple si $y = -9$.

```
> subs(y=-9,solns);
```

Així una solució particular és: $x = 4$, $y = -9$ i $z = 6$.

Preneu-vos un minut de temps i verifiqueu a mà que aquests tres nombres satisfan realment les equacions originals: $x + y + z = 1$ i $3\,x + y = 3$.

Ara mirem la solució generada quan prenem $y = -3$.

```
> subs(y=-3,solns);
```

Així doncs dues de les infinites solucions que obtenim per a les incògnites (x, y, z) són $(4, -9, 6)$ i $(2, -3, 2)$.

Exercici 4.8

Resoleu el sistema: $\{x + 2\,y + z = 2,\ 3\,x + y = 1\}$ i doneu com a mínim tres solucions particulars.