

Pràctiques Integrades

1er de Matemàtiques

Pràctica 5

curs 2002–03

5 Funcions: definir, avaluar i fer-ne gràfics

L'objectiu bàsic d'aquesta pràctica és el d'aprendre primer de tot a definir funcions $f(x)$. Després també veurem com avaluar funcions, resoldre equacions on hi intervenen funcions, i com fer-ne gràfics.

```
> restart;
```

5.1 Definir i esborrar una funció en Maple

Per a distingir entre una funció i una expressió, Maple utilitza una notació especial quan es defineix una funció. Per exemple, considerem la funció $f(x) = \cos(\pi x) + 3$. En Maple s'introdueix com:

```
> f:=x->cos(Pi*x)+3;
```

És important que preneu nota de la sintaxi que utilitzem. És **absolutament necessari** introduir la fletxa “->” construïda amb el signe “menys” i el símbol “més gran que”. **Maple no definirà una funció** si introduïu `f(x) := cos(Pi*x)+3;`.

A continuació podeu veure la diferència entre una expressió i una funció en Maple. Fixeu-vos amb la diferència de la sintaxi i en com dóna el resultat Maple per a cada un dels dos casos.

```
> y:=(x + 2)/(x^3 + 5*x + 2);
```

```
> f:=x->(x + 2)/(x^3 + 5*x + 2);
```

Les funcions necessiten sempre una fletxa quan s'han d'introduir; en el resultat que dóna Maple també hi ha d'haver una fletxa. Verifiqueu sempre que en el resultat hi ha la fletxa per a confirmar que heu definit una funció.

Exercici 5.1

Definiu la funció $h(x) = x^3 \sin(2x + 1)$.

Evidentment, no cal que les funcions depenguin d'un sol argument. Podem considerar per exemple

Exemple 5.1

```
> f := (x,y) -> x^2 - x*y + ln(x^2 + y^2);
```

Aquí obtenim una funció f que admet dues variables (x, y) .

Quan ja heu definit una funció, Maple recorda aquesta funció durant tota la sessió de treball. Si voleu substituir la funció per una nova definició, simplement reescriuiu la definició. Per exemple, si voleu substituir la funció anterior $f(x, y)$ per $\ln(\cos(5x))$, escriviu:

```
> f := x -> ln(cos(5*x));
```

Podeu confirmar el valor actual de la funció $f(x)$:

```
> f(x);
```

És important que noteu que mentre f es una funció, el valor de $f(x)$ és una expressió i es pot tractar com a tal. És a dir, podem aplicar-li qualsevol de les comandes que hem vist per expressions. Per exemple, avaluant,

```
> subs(x=0, f(x));
```

```
> subs(x=2*t+1, f(x));
```

Ara bé, aquesta no és la millor manera d'avaluar una funció com veurem a la propera secció.

Si voleu esborrar la funció f sense definir-la de nou utilitzem el mateix procediment que el que vam veure a la pràctica 1 per esborrar variables, és a dir, escriviu:

```
> f := 'f';
```

Sempre és una bona idea esborrar les funcions que tingueu quan comenceu un problema nou. De forma alternativa també podeu utilitzar la comanda `restart` per a netejar tot el que hi hagi en la memòria de la sessió.

5.2 Avaluar una funció

Quan heu definit una funció, podeu avaluar-la per a diferents valors o per a expressions literals utilitzant la notació funcional. És a dir, com veurem en el següent exemple podem substituir x per l'expressió que vulguem. Abans de definir la funció però netegem el valor de f .

Exemple 5.2

```
> f := 'f';
```

```
> f := x -> 3*x + x^2;
```

```
> f(-1);
```

```
> f(2+sqrt(5));
```

```
> evalf(f(2+sqrt(5)));
```

```
> f(x+4);
```

```
> simplify(%);
```

```
> (f(x+h)-f(x))/h;
```

```
> simplify(%);
```

Si intervenen més d'una funció, la composició de funcions és fàcil de fer. Simplement, consisteix en aplicar la definició de composició de funcions.

```
> g:=x->cos(x)+1;
> f(g(Pi/3));
> g(f(Pi/3));
> j:=x->g(f(x));
> j(x);
> j(Pi/3);
```

Exercici 5.2

Definiu les funcions $s(t) = \frac{3+t^2}{\sqrt{3t+1}}$ i $k(x) = (x+1)^2$ i feu que Maple calculi $s(2)$, $s(t-3)$, $s(t) - s(3)$ i $s \circ k(3)$ simplificant els resultats. No oblideu la notació de la fletxa!

5.3 Resoldre equacions en les que intervenen funcions

Un cop definida una funció, també podem resoldre equacions amb aquesta funció de manera exacta o aproximada utilitzant les comandes vistes a la Pràctica 4.

```
> g:='g';
> g:=t->t^3-6*t^2+6*t+8;
> solve(g(t)=0,t);
> fsolve(g(t)=0,t);
```

Com que g ha estat definida com una funció i no una expressió, el nom de la variable no és important. Això no passava quan utilitzàvem expressions en la pràctica anterior.

```
> fsolve(g(x)=0,x);
```

5.4 Gràfics de funcions

La comanda `plot` funciona igualment per a funcions f . Sempre podem utilitzar la comanda `plot` amb l'expressió obtinguda avaluant a la variable x , $f(x)$. Vegem-ho en el següent exemple.

Exemple 5.3

```
> h:='h'; y:='y'; x:='x';
> h:=x->x*exp(-x);
> plot(h(x),x=-1..4,y=-2..1);
```

Es poden dibuixar gràfics de diferents funcions simultàniament de la mateixa manera que es fa per a les expressions.

Considerem la funció $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$. A continuació fem el gràfic d'aquesta funció i dels seus desplaçaments horitzontals $f(x + 1)$, $f(x - 3)$ i $f(x - 6)$. Podeu identificar cada un d'aquests gràfics?

```
> f:=x->2/(x^2+1);
> f(x+1);
> f(x-3);
> f(x-6);
> plot([f(x),f(x+1),f(x-3),f(x-6)],x=-5..10,y=-1..3);
```

La comanda `plot` admet també que l'entrada sigui una funció directament f . Aleshores no s'han d'especificar les variables x i y en el rang.

```
> plot(f,-5..10,-1..3);
```

Exercici 5.3

Definiu la funció $f(x) = 2x - |x^2 - 5|$ i tot seguit responeu a les qüestions següents:

- Quin és el valor de $f(6.5)$
- Simplifiqueu el valor de $f(z - 4)$, on z és una variable.
- Feu el gràfic de $f(x)$.
- Determineu els valors de x per als que $f(x) = 0$.

Exercici 5.4

Definiu les funcions $g(x) = 5e^{x/2}$ i $h(x) = x + 10$ i feu el següent:

- Dibuixeu un gràfic que mostri les dues funcions $g(x)$ i $h(x)$. Experimenteu amb diferents valors per al domini i per al recorregut.
- Feu una estimació del punt d'intersecció d'aquests dos gràfics utilitzant el botó esquerra del ratolí.
- Utilitzeu la comanda `fsolve()` per a resoldre l'equació $g(x) = h(x)$. Com es relaciona la solució d'aquesta equació amb el que heu obtingut en l'apartat (b)?

Exercici 5.5

Definiu la funció $k(x) = x + 3\sin(2x)$, després feu el següent:

- Dibuixeu el gràfic d'aquesta funció en el domini $[-1, 8]$.
- Modifiqueu el dibuix de l'apartat (a) per tal que inclogui la línia horitzontal $y = 4$. Utilitzeu aquest nou gràfic per a estimar el nombre i els valors aproximats dels x tals que $k(x) = 4$.
- Quina funció única hauríeu de dibuixar per a obtenir la mateixa informació que en l'apartat (b)?

d) Utilitzeu la comanda de Maple `fsolve()` per a aproximar totes les solucions de l'equació $k(x) = 4$.

5.5 Com convertir expressions en funcions

Fins ara hem vist com a partir d'una funció f definida en Maple, la podem convertir en una expressió mitjançant avaluació en una variable $f(x)$. Maple també conté la comanda que ens permet resoldre el problema invers, és a dir, donada una expressió ens pot ser molt útil convertir-la en una funció. Aquesta situació es resol amb la comanda `unapply()`. Observeu el seu funcionament en l'exemple següent.

Exemple 5.4

```
> f:='f';
> expr:=ln(3*x^3+sqrt(x-1));
> f:=unapply(expr,x);
> f(x);
> evalf(f(3));
```

Podeu veure que la comanda `unapply()` té dos arguments: el primer és l'expressió que volem convertir en funció i el segon és la variable que surt en l'expressió respecte de la que volem que depengui la funció resultant.

Exercici 5.6

Considereu l'expressió $x^2 - y^2 + \sin(xy)$. Mireu en l'ajuda sobre `unapply` la manera de convertir l'expressió anterior en una funció dependent de les dues variables x i y .

Exemple 5.5

Sigui $y = f(x)$ una funció tal que satisfà la relació $yx = -y^2 + 7x + 2y$. Volem definir la corresponent funció f dependent de x . Primer utilitzem la comanda `solve` per aïllar y en funció de x i després convertim l'expressió resultant (o expressions resultants) en funcions.

```
> expre:=y*x=-y^2+7*x+2*y;
> yexpre:=solve(expre,y);
> f1:=unapply(yexpre[1],x);
> f2:=unapply(yexpre[2],x);
> plot([f1,f2],-1..2);
```

Exemple 5.6

En algunes ocasions és millor conservar les expressions mitjançant funcions per evitar perdre la informació que conté l'expressió al manipular les variables. Per exemple, considerem la següent expressió i la seva corresponent funció,

```
> ex:=(ln(x+1)-x^2)/(x+1);  
> func:=unapply(ex,x);
```

Durant la sessió de Maple podem assignar un valor a la variable x . Aleshores observeu que passa amb l'expressió i la funció.

```
> x:=3;  
> ex;  
> func(x);
```

Ja no podem recuperar l'expressió inicial utilitzant `ex` (sense haver de 'buidar' la variable x) que ha passat a tenir un valor numèric però sí que podem recuperar-la mitjançant la funció que hem definit.

```
> func(t);
```

Exercici 5.7

Sigui $y = f(x)$ una funció que satisfà la igualtat $yx + y^2 - 6x + x^2 = 0$. Mitjançant la comanda `solve` doneu les expressions de y en funció de x i convertiu-les en funció. Feu-ne les corresponents representacions gràfiques.