Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 8

curs 2002–03

8 Programació recursiva. La successió de Fibonacci

8.1 Programació recursiva

Un procediment es diu recursiu si es crida a ell mateix d'una manera directa o indirecta. En aquesta mena de programació heu d'anar molt en compte ja que podrieu crear un programa que es cridés a ell mateix indefinidament per això heu de tenir clares dues coses: l'algorisme recursiu i les condicions que fan que la recursió s'acabi.

L'exemple més clàssic és el de crear un procediment que calculi el factorial d'un número natural, $n!$. Ja sabeu que Maple té una comanda que el calcula directament però tot i això crearem la nostra comanda propia `Factorial( )`.

El factorial d'un número enter positiu es defineix com

1. $0! = 1$.

2. $n! = n \cdot (n-1)!$ si $n > 0$.

Observeu que aquesta és una fórmula recursiva amb una condició inicial.

Exercici 8.1

Construiu un procediment `Factorial` que calculi el factorial segons la fórmula anterior. A més, feu que aparegui un error per pantalla quan $n < 0$. Per escriure missatges per pantalla podeu fer servir les comandes `printf` o `print`, amb l'ajuda de Maple observeu les seves diferències.

Amb la comanda `trace` observeu que passa quan calculeu el factorial de -1, 0 i 4. En l'últim cas veureu com el procediment es crida diferents vegades.

8.2 La successió de Fibonacci

La successió dels nombres de Fibonacci f_n és la que s'obté a partir de les condicions $f_1 = f_2 = 1$ i $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per a n més gran o igual a 3.

Exercici 8.2

Definiu una funció `fibon(n)` que doni com a resultat el `n`-èssim nombre de Fibonacci. Comproveu que funciona correctament calculant `fibon(-1)`, `fibon(0)`, `fibon(1)`, `fibon(2)`, `fibon(3)` i `fibon(4)`.

Fibonacci va descobrir aquesta successió de números l'any 1202 quan se li va proposar el següent problema que consistia en analitzar la velocitat amb que es reproduien els conills en condicions ideals. Més concretament, el problema era el següent. Suposem que en un camp tancat i introduim una parella de conills (mascle i femella) acabats de neixer. Els conills s'aparellen per primer cop al cap d'un mes d'haver nascut i neix una nova parella al final del següent mes. A partir de llavors les parelles s'aparellen i crien cada mes. Suposem que els nostres conills no es moren i que a cada cria obtenim una nova parella (un mascle i una femella). La pregunta que se li va fer a Fibonacci és: quantes parelles tindrem al final del primer any? Anem a comptar.

Al final del primer mes només tinc una parella que s'han aparellat.

Al final del segon mes la femella produeix una nova parella així doncs en tenim dues.

Al final del tercer mes, tenim les dues parelles anteriors més una nova parella que ha produit la femella original (la nova femella encara és al seu primer més i no ha criat), així en portem tres.

Al final del quart mes tenim les tres parelles anteriors més dues noves parelles que han nascut de les femelles del segon més (les femelles nascudes al mes anterior encara no han criat).

I així, successivament. Podeu observar la relació d'aquest problema amb la successió de números que hem definit a l'exercici 8.2?

Exercici 8.3

Quina és la resposta al problema de Fibonacci?

Exercici 8.4

Feu un gràfic dels nombres `fibon(n)` per a `n=3..20`. És a dir, representeu els punts de la forma `[n,fibon(n)]`.

Exercici 8.5

Feu un gràfic de la funció `ln(fibon(n))` pels mateixos valors de l'exercici anterior. Què observeu? A partir d'aquesta gràfica, què podeu deduir del tipus de creixement dels valors de l'exercici anterior?

Exercici 8.6

Que podem deduir del gràfic del quocient `fibon(n+1)/fibon(n)` per a `n=1..50`? Aquests nombres representen la proporció entre dos números consecutius a la successió de Fibonacci. Feu una llista amb aquests valors. Què observeu?

A l'exercici anterior haureu observat que la proporció entre dos números consecutius a la successió de Fibonacci estabilitza cap a un número. Aquest número s'anomena el número auri o la raó aurea. Si teniu curiositat podeu buscar informació sobre aquest número i veureu que apareix a molts fenòmens naturals.

Exercici 8.7

Analitzant les gràfiques vistes fins ara, que podríem deduir dels valors de la successió `fibon(n)`?

Exercici 8.8

La sucessió de Fibonacci ha estat definida de forma recursiva però també té una fórmula pel terme general que ens calcula el terme n-éssim directament. Utilitzeu la funció `rsolve` (mireu l'ajuda de Maple per veure com funciona) per a trobar el terme general de la successió de Fibonacci.

Observeu que passa quan es substitueixen diferents valors de n a l'expressió que retorna la comanda `rsolve` i en calculeu una aproximació numèrica.

Calculeu una aproximació numèrica de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i compareu-la amb el valor obtingut a l'exercici 8.2.

Exercici 8.9

Què tenen a veure aquests valors amb el quocient de les longituds dels costats del DNI o d'una tarja de crèdit?