Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 10

curs 2002–03

10 Estudi d'una cònica

En aquesta pràctica veurem com, a partir d'una cònica determinada per la seva equació, per exemple:

$$x^2 + 2y^2 + \sqrt{8}xy + 4x - \sqrt{8}y + 6 = 0 \tag{1}$$

podem classificar-la, obtenint una cònica equivalent centrada a l'origen i amb un eix l'eix de les x.

10.1 Dibuix de la cònica

En primer lloc observeu que Maple permet dibuixar les solucions d'una equació amb dues variables. Per a això s'utilitza la funció `implicitplot` que està al paquet **plots** (busqueu en l'ajuda del programa quina és la sintaxi adequada d'aquesta comanda).

Exercici 10.1

Dibuixeu la cònica de $\mathbb{R}^2$ de l'equació (1).

10.2 Classificació de la cònica

Per a classificar la cònica, recordeu que primer hem de fer una rotació d'angle α, on α es dedueix de l'equació:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\text{coeficient de } xy}{\text{coef. de } y^2 - \text{coef. de } x^2} \tag{2}$$

Exercici 10.2

Escriviu el sinus i el cosinus d'α en funció de $\tan(2\alpha)$. (Primer de tot teniu en compte que $\tan(2\alpha) = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$ després apliqueu les fòrmules del sinus i el cosinus de l'angle doble i, per acabar, poseu tota la fòrmula en funció del sinus de α).

Per a escriure una rotació d'angle α cal fer la transformació:

$$\begin{array}{rcl} z &=& \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ t &=& \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{array} \quad \text{o bé} \quad \begin{array}{rcl} x &=& \cos(\alpha)z + \sin(\alpha)t \\ y &=& -\sin(\alpha)z + \cos(\alpha)t \end{array}$$

on z i t són el nom dels nous eixos on situem la cònica.

Exercici 10.3

Apliqueu una rotació d'angle α, amb l'α que surt de l'equació (2) a la cònica de l'equació (1) i feu un dibuix de la cònica en funció de les variables z i t.

D'aquesta manera, la cònica actual té l'eix (o els eixos) paral·lel a un dels eixos de coordenades, i no hi ha cap coeficient que multipliqui a zt.

Finalment caldrà traslladar la cònica fins a centrar-la a l'origen (normalment). Per tant, si u i v són les noves coordenades, haurem de fer:

$$\begin{array}{rcl} u &=& z + a \\ v &=& t + b \end{array}$$

on $a = \frac{\text{coef. } z}{2 \text{ coef. } z^2}$ i $b = \frac{\text{coef. } t}{2 \text{ coef. } t^2}$.

Exercici 10.4

Apliqueu la translació corresponent a la cònica de l'exercici anterior. Podeu classificar la cònica? Doneu els eixos, la directriu i els focus d'aquesta.

Exercici 10.5

Determineu el focus, l'eix i la directriu de la cònica de l'equació (1).

10.3 Més exercicis

Exercici 10.6

Classifiqueu la cònica donada per l'equació:

$$13x^2 + 150x - 171 - 10xy - 102y + 13y^2 = 0$$

Trobeu el/els focus, el/els eixos i el centre.

Exercici 10.7

Classifiqueu la cònica donada per l'equació:

$$3x^2 - 2y^2 - 4xy - 3x + 2y - 4 = 0$$

Trobeu el/els focus, el/els eixos i el centre.