Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 11

curs 2002–03

11 Geometria del pla

En aquesta pràctica analitzarem algunes de les comandes que es troben en el paquet **geometry**. Aquest paquet permet definir i treballar amb objectes geomètrics del pla euclidià. Començarem doncs carregant aquest paquet,

```
> with(geometry):
```

11.1 Punts i rectes.

L'objecte geomètric més senzill que podem definir i utilitzar amb el paquet **geometry** és un punt. Per a definir un punt utilitzem la funció `point(p,x,y)`, on `p` és el nom del punt, `x` és la primera coordenada i `y` la segona.

Exemple 11.1

Si volem definir els punts `A=(1,1)`, `B=(1,2)` i `C=(-1,1)` escriurem les següents comandes.

```
> point(A,1,1);point(B,2,2);point(C,-1,1);
```

El segon objecte que podem definir és una recta, mitjançant la funció `line`. Hi ha dues maneres d'introduir una recta: o bé mitjançant dos punts per on passi, o bé mitjançant una equació.

Exemple 11.2

Podem definir la recta `l1` com la que passa pels punts `A` i `B` que hem definit abans de la següent manera.

```
> line(l1,[A,B]);
```

També podem definir la recta `l2` a partir d'una equació, per exemple $x + y = 12$.

```
> line(l2,x+y=12,[x,y]);
```

El tercer dels arguments de la comanda `line` anterior fa referència al nom que tenen les coordenades dels eixos amb els que treballem. Això no està prefixat i els podem canviar quan volguem. A l'exemple 11.1

anterior automàticament s'ha assignat el nom `x` a l'eix horitzontal i `y` al vertical.

Si volem, podem assignar globalment el nom que volem per a les coordenades redefinint les variables `_EnvHorizontalName` i `_EnvVerticalName`.

Un cop hem definit i posat nom a aquests objectes, podem demanar les propietats que té un d'ells a partir de les funcions:

- `coordinates(p)`; que retorna les coordenades d'un punt `p` com una llista.
- `form(l)`; que retorna la forma de l'objecte geomètric, (i.e., `line2d` si `l` és una recta).
- `Equation(l)`; que retorna l'equació que defineix la recta `l`.
- `detail(l)`; que torna una descripció detallada de la recta `l`.

Exemple 11.3

Redefinim els eixos com `u` i `v` i demanem les propietats de la recta `l1`:

```
> _EnvHorizontalName := u:  _EnvVerticalName := v:
> form(l1);
> Equation(l1);
> detail(l1);
```

Quan tenim definides vàries rectes i punts podem demanar informació de la posició relativa que tenen i fer càlculs mitjançant:

- `AreParallel(l1,l2)`; que retorna `True` si les rectes són paral·leles i `False` si no ho són.
- `ArePerpendicular(l1, l2)`; que retorna `True` si les rectes són perpendiculars i `False` si no ho són.
- `AreConcurrent(l1,l2,l3)`; que retorna `True` si les tres rectes tenen un punt en comú.
- `FindAngle(l1,l2)`; que retorna l'angle que formen dues rectes.
- `intersection(p,l1,l2)`; que guarda a la variable `p` la intersecció entre les dues rectes.
- `ParallelLine(l,p,l1)`; que guarda a la variable `l` la recta que passa per `p` i és paral·lela a `l1`.
- `PerpendicularLine(l,p,l1)`; que guarda a la variable `l` la recta que passa per `p` i és perpendicular a `l1`.
- `projection(q, p, l)`; que guarda a la variable `q` el punt que resulta de fer una projecció perpendicular de `p` a la recta `l`.
- `distance(p,l)`; que calcula la distància entre un punt `p` i una recta `l` o bé entre 2 punts.

Exemple 11.4

```
> AreParallel(l1,l2);
> ArePerpendicular(l1,l2);
> FindAngle(l1,l2);
> intersection(E,l1,l2);
> detail(E);
> intersection(l,l1,l1);
> detail(l);
```

Exercici 11.1

Considereu els punts $A = (2, -3)$, $B = (1, 8)$ i $C = (5, -1)$.

(a) Determineu l'equació de la recta que passa per C i és perpendicular a la recta que passa per A i B.

(b) Quin és el punt d'intersecció d'aquestes dues rectes?

(c) Comproveu si el punt D = $(-4, 3)$ és d'alguna de les dues rectes anteriors.

(d) Calculeu la distància que hi ha entre els punts A, B, C i D.

(e) Quina distància hi ha des del punt C a la recta que passa per A i B?

Finalment, tots els objectes es poden representar gràficament utilitzant la comanda `draw`. Mireu el seu funcionament a l'ajuda de Maple.

Exercici 11.2

Dibuixeu els punts i les rectes de l'exercici anterior.

11.2 Còniques.

A part de punts i rectes, també podem treballar amb objectes més complicats geomètricament com són les còniques. La comanda del paquet **geometry** que permet definir una cònica és `conic()`, que es pot utilitzar de tres formes diferents:

- `conic(p, [A,B,C,E,F], n)`; on la llista `[A,B,C,E,F]` són cinc punts pels quals volem que passi la cònica.

- `conic(p, [dir,foc, exc], n)`; on `dir` ha de ser una objecte `line` que serà la recta directriu de la cònica, `foc` és un objecte `point` que representa un focus de la cònica i `exc` és un valor numèric que representa l'excentricitat.

- `conic(p, eqn, n)`; on `eqn` és una equació quadràtica en dues variables.

En els tres cassos l'argument `p` és el nom amb el que ens referirem a l'objecte que estem definint i l'argument `n` és opcional i és el que determina el nom de les variables respecte les que volem treballar (com en els punts i rectes).
Nota: Una cònica es pot definir com el lloc geomètric dels punts P tals que el quocient de la distància de P a una recta fixada (la directriu de la cònica) amb la distància de P a un punt donat (el focus) és una constant (l'excentricitat). Amb aquest punt de vista les el·lipses són les còniques amb excentricitat menor que 1, les paràboles les d'excentricitat 1 i les hipèrboles les d'excentricitat més gran que 1. Les circumferències corresponen al cas degenerat d'excentricitat 0 amb directriu a *l'infinit.*

Exemple 11.5
```
> eq:=13*x^2 + 150*x- 171 -10*x*y -102*y +
> 13*y^2 = 0; conic(c,eq,[x,y]);
> detail(c);
> draw([c,op(foci(c))(color=blue),center(c)(color=green),
> line(eix,foci(c))(color=yellow),
> PerpendicularLine(eix2,center(c),eix)(color=orange)]);
```

Quan tenim una **el·lipse** podem demanar les següents dades:

- Els dos focus: `foci( )`.
- El centre: `center( )`.
- Les longituds dels eixos major i menor: `MajorAxis( )`, `MinorAxis( )`.
- L'equació: `Equation( )`.

Exemple 11.6
```
> foci(c);
> detail(foci(c));
> simplify(coordinates(foci(c)[1]));
> coordinates(center(c));
> MajorAxis(c);
```

Quan tenim una **hipèrbola** podem demanar les següents dades:

- Els dos focus: `foci( )`.
- El centre: `center( )`.

- Les asímptotes: `asymptotes( )`.
- Els vèrtexs: `vertices( )`.
- L'equació: `Equation( )`.

Exercici 11.3

Comproveu que l'equació $17\,x^2 + 18\,x\,y - 7\,y^2 - 12\,x + 36\,y - 12 = 0$ defineix una hipèrbola i determineu les equacions de les seves asímptotes.

Quan tenim una **paràbola** podem demanar les següents dades:

- El focus: `focus( )`.
- La directriu: `directrix( )`.
- El vèrtex: `vertex( )`.
- L'equació: `Equation( )`.

Exercici 11.4

Comproveu que l'equació $9\,x^2 + 6\,x\,y + y^2 - 4\,x + 12\,y - 4 = 0$ determina una paràbola i calculeu l'equació de la seva directriu.

11.3 Llista d'exercicis.

Exercici 11.5

Determineu el radi d'una circumferència que és tangent a la recta $x + y = 2$ en el punt $(1,\,1)$ i tal que el seu centre està sobre la recta $2\,x - 3\,y = 1$. Feu un dibuix on estiguin representats els elements d'aquest problema.

Exercici 11.6

Definiu la cònica donada per l'equació $x^2 - y^2 = 0$ i dibuixeu-la.

Exercici 11.7

Feu una funció `dibuix` que, a partir d'un objecte cònica `c`, doni com a resultat un dibuix de la cònica amb els seus elements significatius, diferenciant els cassos possibles (focus, centre i eixos per a una el·lipse,...)

Exercici 11.8

Apliqueu la funció `dibuix` que heu disenyat en l'exercici anterior a les còniques següents:

$$9\,x^2 + 12\,x\,y + 4\,y^2 - 34\,x + 38\,y + 22 = 0$$

$$-3\,x^2 - 8\,x\,y + 3\,y^2 - 28\,x + 6\,y + 23 = 0$$

$$\frac{29\,x^2}{3} - 2\,x\,y + 7\,y^2 - \frac{172\,x}{3} - 72\,y + \frac{734}{3} = 0$$

11.4 Altres objectes geomètrics

Els objectes amb els que pot tractar el paquet **geometry** no estan limitats als punts, rectes o còniques. Si busqueu en l'ajuda de Maple la informació que dóna sobre aquest paquet veureu totes les funcions que té associades.

En particular també és possible treballar amb triangles de forma que es pot resoldre el següent exercici:

Exercici 11.9

Donat el triangle determinat pels vèrtexs $A = (1, 3)$, $B = (-2, 5)$ i $C = (0, 1)$. Determineu i dibuixeu les bisectrius de cada un dels seus angles, les mitjanes i les altures que surten de cada vèrtex i les mediatrius de cada un dels costats. Observeu que cada una d'aquestes famílies de rectes determina un únic punt d'intersecció. Sabeu veure alguna relació d'aliniament entre alguns d'aquests punts?