Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 13

curs 2002–03

13 Límits de successions.

En aquesta pràctica veurem com definir, estudiar i calcular el límits de successions de números naturals amb Maple.

13.1 Experimentació amb els valors d'una successió.

Una succesió no és res més que una funció que permet obtenir un valor associat a cada nombre natural. Maple permet definir funcions (i per tant successions), avaluar-les i fins i tot representar-ne gràficament els valors.

Exercici 13.1

Definiu una funció (`n->expr`) o un procediment `proc` que permeti calcular (i ens retorni) els valor de la successió a_n per a qualsevol número natural n donat. Feu una llista amb els 20 primers termes i un gràfic d'aquests valors per a les següents successions:

- $a_n = \dfrac{2\,n-5}{n^2+1}$.
- $a_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.
- $a_n = n^2 \ln(n)$.
- La successió que compleix $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = -{a_n}^2 + 4\,a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = -{a_n}^2 + 4\,a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 2.8$ i $a_{n+1} = -{a_n}^2 + 4\,a_n - 2$.
- La successió que compleix $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$.
- La successió que compleix $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 - 1}{2\,a_n - 3}$.

Exercici 13.2

Calculeu per a diferents valors dels paràmetres a i b els valors dels 20 primers termes de les successions donades per:

- $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.
- $x_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

Quin serà el límit d'aquestes successions en funció de a i b?

Com ja haureu vist, una de les formes típiques de definir una successió sense donar explícitament quin és el valor de cada un dels termes en funció del seu índex és la de donar un primer terme (a_1) i després expressar com cada un dels altres termes a_{n+1} és funció de l'anterior $a_{n+1} = \mathrm{f}(a_n)$. És ben conegut que en molts casos el límit d'una successió d'aquest tipus és un valor l que satisfà la relació $l = \mathrm{f}(l)$. Amb Maple es pot il·lustrar aquest fet amb una certa facilitat com veureu en els següents exercicis.

Exercici 13.3

Feu una funció o procediment `proc` amb nom `recurr(n,ini,f)` que tingui com arguments un índex `n`, un valor inicial `ini`, i el nom d'una funció `f` (que haurà d'haver estat definida prèviament) que dóni com a resultat el valor del terme a_n de la successió definida per la recorrència $a_{n+1} = \mathrm{f}(a_n)$ amb valor inicial $a_1 =$ `ini`.

Exercici 13.4

Utilitzeu la funció `recurr` que acabeu de definir per a investigar el límit de la successió definida per les condicions $1 < a_1$ i $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ en funció del valor inicial a_1.

Exercici 13.5

Feu un gràfic per a la successió d'abans amb un dibuix del gràfic de $\mathrm{f}(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$, el de $y = x$ i els punts de la forma $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_2]$, $[a_2, a_3]$, $[a_3, a_3]$,..., $[a_i, a_{i+1}]$, $[a_{i+1}, a_{i+1}]$... units per línies (de fet, podeu fer una funció o un procediment que realitzi totes aquestes operacions en general).

13.2 Càlcul de límits amb la comanda `limit`.

La comanda de Maple que calcula el límit d'una expressió és `limit`. Si teniu una successió definida per $a_n = \mathrm{f}(n)$ podeu saber el seu límit posant `limit(f(n),n=infinity);` . Per exemple,

Exemple 13.1

```
> limit(n/(n+1),n=infinity);
> limit(n!/n^n,n=infinity);
> limit(2^(n^2)/n!,n=infinity);
> limit((1+1/n)^n,n=infinity);
> limit((-1)^n* sqrt(n)* sin(n^n)/(n+1),n=infinity);
> limit(cos(2*n*Pi),n=infinity);
```

Noteu que en aquest últim exemple Maple ha donat com a resultat el rang de valors `-1..1` i no ha reconegut que els cosinus d'angles que són múltiples enters de $2\,\pi$ sempre valen 1 i que, per tant, la successió $\{\cos(2\,n\,\pi)\}$ és constant amb valor 1. Això és conseqüència del fet que, si no li indiquem res, la variable `n` pren per defecte valors reals i, per tant, no podem assegurar que la successió sigui constant i igual a 1.

13.2.1 Declaració de tipus.

Maple permet declarar que una variable ha de ser d'un cert tipus. Per a declarar que la variable `n` només pren valors enters positius es pot utilitzar la comanda `assume` de la següent manera.

```
> assume(n,posint);
> limit(cos(2*n*Pi),n=infinity);
```

Si consulteu l'ajuda de la comanda `assume` i de la comanda `type` podreu veure diferents formes de restringir els valors d'una variable i quins són els diferents tipus possibles.

13.3 Exercicis

Exercici 13.6

Utilitzeu `limit` per a conéixer els límits de les successions:

- $x_n = \dfrac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{(\alpha+1)}}$ per a diferents valors (positius) del paràmetre α.
- $x_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n)}$.
- $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2\,n}$.
- $x_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{(n\ln(n))}$.
- $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1)^{\sqrt{n}}$.