Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 16

curs 2002–03

16 Espais vectorials i bases

En una pràctica anterior ja heu utilitzat algunes de les funcions que conté el paquet **LinearAlgebra**. Avui estudiarem aquelles que ens permeten analitzar la dimensió d'un subespai vectorial i obtenir-ne una base de vectors.

Ja sabeu com definir matrius i vectors i també les operacions bàsiques de sumes i productes que es poden realitzar amb ells. Començarem veient algunes funcions més referents a la manipulació de matrius i vectors. Recordeu com definíem matrius i vectors amb el següent exemple.

Exemple 16.1

```
> M:=<<1,-2>|<0,1>>;
> v:=<2,3>;
> w:=<<2>|<3>>;
> M.v;
> w.M;
```

Amb les comandes `Matrix` i `Vector` també podem definir matrius i vectors. Aquestes comandes ens permeten definir matrius i vectors utilitzant una funció pels seus coeficients.

Exemple 16.2

```
> M:=Matrix([[1,-2],[0,1]]);
> v:=Vector([2,3]);
> w:=Vector[row]([2,3]);
> f:=(i,j)->x^i*y^j;
> Nf:=Matrix(2,f);
> N:=subs(x=3,y=2,Nf);
```

Hi ha d'altres operacions elementals que es poden realitzar amb matrius, per exemple transposar. Transposar una matriu consisteix en intercanviar les files per les columnes. Maple té una comanda per realitzar aquesta operació, `Transpose`. També podem calcular-ne el determinant (`Determinant`) i si aquest és diferent de zero, aleshores obtenir la matriu inversa, `MatrixInverse`. En aquest cas també podem escriure `1/A`.

Exemple 16.3

```
> Transpose(M);
> d:=Determinant(M);
> I:=MatrixInverse(M);
> I.M; M.I;
```

També podem recuperar el nombre de files i columnes d'una matriu amb les comandes `RowDimension` i `ColumnDimension`.

Exercici 16.1

Realitzeu un procediment que calculi el determinant d'una matriu $n \times n$ que conté x's a la diagonal i y's fora de la diagonal.

16.1 El rang d'una matriu

En una pràctica anterior vam veure com resoldre sistemes d'equacions lineals.

Exercici 16.2

Digueu si els vectors següents són linealment independents o no, $(1, -3, 2)$, $(2, 1, -5)$ i $(2, -13, 13)$.

Recordeu que el rang d'una matriu és el nombre màxim de files linealment independents. És el mateix que el màxim número de columnes linealment independents. I també es pot definir com l'ordre màxim d'una submatriu quadrada invertible. `Rank(A)` és la comanda que ens retorna el rang de la matriu A.

Exemple 16.4

```
> M:=<<1,-2>|<0,1>>; N:=<<1,-2>|<2,-4>>;
> Rank(M);
> Rank(N);
```

Exercici 16.3

Determineu el rang de la següent matriu

$$\begin{pmatrix} 4-x & 2 & -2+\frac{2}{3}x & 8-x & -4 \\ \frac{13}{2} & -1 & x-3 & 10 & -9/2 \\ 4x-4 & 6 & 2-\frac{4}{3}x & 3x-8 & 4 \\ 6x-4 & 3 & 2-2x & 3x-8 & 4+x \end{pmatrix}$$

en funció del paràmetre x.

Si E és un subespai vectorial generat per vectors $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, la dimensió del subespai vectorial E és el rang de la matriu que conté els vectors generadors a les files (o a les columnes). D'aquesta manera utilitzant la comanda `Rank` podem calcular la dimensió d'un subespai vectorial donada una família de vectors generadors.

Exercici 16.4

Calculeu la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $v_1 = (1, 3, -4, 5)$, $v_2 = (0, 6, 5, -1)$ i $v_3 = (1, -9, -14, 7)$.

16.2 Bases d'espais vectorials

Donada una matriu, Maple no només en sap calcular el rang sinó que a més també ens calcula una base del subespai generat tant pels vectors files com columnes. Les comandes que proporcionen aquesta informació són `RowSpace` i `ColumnSpace`. Observeu el seu funcionament en el següent exemple.

Exemple 16.5

```
> M:=<<1,-2,5,6>|<0,1,7,3>|<1,-4,-9,0>>;
> ColumnSpace(M);
> RowSpace(N);
```

Exercici 16.5

Calculeu una base del subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $v_1 = (1, 3, -4, 5)$, $v_2 = (0, 6, 5, -1)$ i $v_3 = (1, -9, -14, 7)$.

Si E i F són subespais vectorial de $\mathbb{R}^n$ generats per $\{v_1, \dots, v_e\}$ i $\{w_1, \dots, w_f\}$ respectivament, aleshores recordeu que el subespai vectorial suma està generat per $\{v_1, \dots, v_e, w_1, \dots, w_f\}$.

D'altra banda, la intersecció dels subespais E i F està format per vectors de E que també es poden expressar en funció dels generadors de F. És a dir, existeixen $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ tals que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_e v_e = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_f w_f$$
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_e v_e - \mu_1 w_1 - \cdots - \mu_f w_f = 0$$

Per tant, si M és la matriu formada pels vectors generadors de E i F, aleshores una base del subespai intersecció es pot obtenir analitzant les solucions del sistema d'equacions homogeni $M \cdot x = 0$. Donada una matriu M, Maple també ens permet obtenir una base pel subespai vectorial de solucions del corresponent sistema homogeni mitjançant la comanda `NullSpace`.

Exemple 16.6

```
> M:=<<1,-2,5,6>|<0,1,7,3>|<1,-4,-9,0>>;
> NullSpace(M);
```

Exercici 16.6

Sigui E el subespai vectorial de l'exercici anterior i F el subespai generat per $w_1 = (1, -6, -18, 12)$ i $w_2 = (3, 0, 0, 1)$. Calculeu la dimensió i bases per E, F, $E + F$ i $E \cap F$. Verifiqueu la fòrmula de Grassmann.

Exercici 16.7

Sigui $E =< (4 - \lambda), 2, 1), (2 - \lambda, 4, 2) >$ i $F =< (2 - \lambda, 4, 8) >$. Determineu les dimensions de E, F, $E + F$ i $E \cap F$ segons el paràmetre λ.

Teniu en compte que el paquet **LinearAlgebra** conté les funcions `IntersectionBasis` i `SumBasis` que fan, exactament, el que indica el seu nom i es poden utilitzar en aquest tipus de càlculs.

També és ben conegut que qualsevol subespai de $\mathbb{R}^n$ coincideix amb l'espai de solucions d'un determinat sistema homogeni. En l'exemple següent podeu veure com obtenir aquest sistema a partir d'un conjunt de generadors del subespai.

Exemple 16.7

Considerem el subespai de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors $(1, 2, 2, -1, 0)$, $(0, 1, -1, 2, 3)$ i $(2, -1, -4, 5, 1)$. Definim la matriu `M` com la que té per columnes les components dels tres vectors donats

```
> M:=<<1,2,2,-1,0>|<0,1,-1,2,3>|<2,-1,-4,5,1>>;
```

afegim una columna al final que representa les components d'un vector qualsevol de $\mathbb{R}^5$

```
> Ma:= <M|<x1,x2,x3,x4,x5>>;
```

realitzem les operacions de reducció per files fins a arribar a una forma reduïda. Les equacions en `x1, x2, x3, x4, x5` corresponents a files nules donen un les equacions d'un sistema homogeni que té com espai de solucions l'espai generat pels vectors que hem considerat al principi. Donarà un resultat equivalent al sistema $13x_4 - 3x_1 - 9x_2 + 17x_3 = 0$, $13x_5 - 23x_2 + 14x_1 + 16x_3 = 0$.

16.3 Operacions elementals i matrius elementals

És un fet ben conegut que les matrius invertibles es poden escriure sempre com a producte de matrius *elementals*. Recordeu que aquestes matrius elementals s'obtenen realitzant sobre la matriu identitat una qualsevol de les operacions elementals de reducció (multiplicar una fila per un escalar no nul, intercanviar dues files entre si o sumar a una fila un múltiple de qualsevol de les altres), i que el producte (per l'esquerra) d'una matriu qualsevol amb una d'aquestes matrius elementals té el mateix efecte que realitzar l'operació elemental de reducció corresponent sobre la matriu donada.

Exemple 16.8

El procediment següent defineix una funció `MatElem` que té com arguments un nombre natural `n` i una seqüència, que segueix el conveni de les operacions elementals de la comanda `RowOperation`, per a produir com a resultat la matriu elemental d'ordre `n` corresponent a l'operació elemental codificada en els altres arguments.

```
> MatElem:= proc()
> RowOperation(IdentityMatrix(args[1]),args[2..nargs]);
> end proc;
```

Noteu que dins la definició de `MatElem` no ha fet falta especificar ni el nom, ni el nombre dels arguments. En comptes d'això hem utilitzat les variables `args` i `nargs` que donen, cada cop que s'executa el procediment i només mentre s'està executant, una llista amb tots els arguments i el nombre total d'aquests arguments.

Exercici 16.8

i) Utilitzeu la comanda `MatElem` de l'exemple anterior per a generar les matrius elementals d'ordre 4 que corresponen a les operacions: intercanviar la primera i la tercera files, sumar a la segona fila 3 vegades la quarta, multiplicar per 5 la primera fila.

ii) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ i realitzeu sobre ella les operacions elementals donades en l'apartat anterior, multiplicant per les matrius elementals corresponents.

Aquest apartat començava dient que les matrius invertibles es poden escriure com a producte de matrius elementals. Recordeu que aquestes matrius elementals són justament les que corresponen a la cadena d'operacions elementals de reducció que es necessiten per a transformar una matriu invertible qualsevol en la matriu identitat. L'objectiu de l'exercici següent és fabricar un procediment que permeti visualitzar aquest fet d'una manera el més còmoda possible.

Exercici 16.9

Fabriqueu un procediment `Reducc` que admeti com arguments una matriu i una seqüència d'expressions, del tipus de les que es posen en `RowOperation`, que realitzi l'operació elemental de reducció, codificada en aquestes expressions, sobre la matriu introduïda i, a més, guardi en una variable global (per exemple `OpR`) una llista amb les matrius elementals de les operacions que es vagin fent utilitzant aquest procediment.

Exercici 16.10

Considereu la matriu invertible $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (el seu determinant està calculat amb Maple i dóna 2). Reduïu M utilitzant `Reducc` i comproveu que el producte de les matrius elementals que queden en la llista `OpR` és la matriu inversa de M fent el producte de totes elles amb M. Després comproveu que la inversa de cada una de les matrius que surt en la llista `OpR` torna a ser una matriu elemental. Finalment comproveu que el producte de les inverses de les matrius que surten en `OpR` coincideix amb M.

16.4 PAQ reducció

Donada una matriu real A, existeixen matrius P, Q tals que PAQ és de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Les matrius P i Q permeten resoldre, d'una manera o altre, gairebé qualsevol dels problemes d'àlgebra lineal que es puguin plantejar en els que intervingui la matriu A.

Per a obtenir les matrius P i Q es procedeix de la següent manera. Si $A \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$. Prenem la matriu quadrada

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & A \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

i mitjançant operacions elementals de files i columnes la transformem en una matriu on A té zeros i uns a la diagonal i zeros fora, és a dir

$$\left(\begin{array}{c|c} P & \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

(amb r igual al rang de A). Les caixes que contenien I_p i I_q es transformen en matrius P i Q respectivament que satisfan la relació

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exercici 16.11

Determineu la PAQ-reducció de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Feu un procediment que donada una matriu A en calculi la seva PAQ-reducció donant com a resultat les dues matrius P i Q tals que PAQ és de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ amb r igual al rang de A. (No és tan fàcil com podria semblar en un principi).