

# Pràctiques Integrades

## 1er de Matemàtiques

Pràctica 17

curs 2002–03

### 17 Aproximació de funcions

#### 17.1 Polinomi interpolador

Recordem en primer lloc que Maple pot representar gràficament un núvol de punts  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  amb la funció `plot`.

##### Exercici 17.1

Definiu una llista `l` com els següents punts de  $\mathbb{R}^2$ :  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(7, 1)$ ,  $(8, 2)$ ,  $(9, 1)$  i  $(10, 2)$ . Dibuixeu en una gràfica el núvol de punts corresponent.

Donats  $n$  punts  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  amb  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$  existeix un polinomi  $p$  de grau menor o igual a  $n - 1$  complint que  $p(x_i) = y_i$  per a tot  $i = 1..n$ , que anomenem *polinomi interpolador*. La funció que calcula polinomis interpoladors està al paquet **CurveFitting** i s'anomena `PolynomialInterpolation`.

##### Exemple 17.1

Si volem calcular el polinomi que interpola els punts  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  i  $(2, 4)$ , que ha de ser de grau menor o igual a 2, ho podem fer amb Maple:

```
> with(CurveFitting);  
> ll:=[[0,0],[1,1],[2,4]]:  
PolynomialInterpolation(ll,x);
```

##### Exercici 17.2

Calculeu el polinomi interpolador  $p$  als punts de l'exercici anterior. Quan val el polinomi avaluat al punt 5? I al punt 9.5? Feu la representació gràfica dels punts i el polinomi interpolador.

## 17.2 Spline

Una altra opció per a trobar funcions que passin per punts fixats és “*agrupar*” els punts en subconjunts més petits i calcular el polinomi de grau més petit per a cada un dels subconjunts. Per exemple, podem considerar que la unió dels punts mitjançant segments es correspon a considerar els punts de dos en dos i considerar el polinomi de grau 1 (recta) que els uneix.

Dins el paquet **CurveFitting** tenim la funció **Spline** (la **S** en majúscules) per a definir aquestes noves aproximacions.

### Exemple 17.2

Si volem unir els punts (0, 0), (1, 1) i (2, 4) amb rectes escrivim:

```
> ll := [[0,0], [1,1], [2,4]] :
      Spline(ll,x,degree=1);
```

On l'opció `degree=1` és per a definir el grau dels polinomis que estem calculant.

### Exercici 17.3

Dibuixeu tres gràfiques amb els “*splines*” de graus 1, 2 i 3 de la llista de punts de l'exercici 17.1.

## 17.3 Exercicis

### Exercici 17.4

Feu una funció (o procediment) `dibuix` que fixada una llista de punts dibuixi de colors diferents el núvol de punts, els segments que uneixen els punts, el “*spline*” de grau 2, el “*spline*” de grau 3 i el polinomi interpolador en una sola gràfica.

### Exercici 17.5

Considereu la llista de punts:

```
ll1 := [[-9,1], [-8,1], [-7,1], [-6,1], [-5,2], [-4,3], [-3,5], [-2,8], [-1,12], [0,16],
        [1,12], [2,8], [3,5], [4,3], [5,2], [6,1], [7,1], [8,1], [9,1]].
```

Dibuixeu el núvol de punts en una gràfica. Apliqueu la funció `dibuix` de l'exercici anterior a aquest núvol de punts. Que observeu?

**Exercici 17.6**

Definiu una funció `aproxf` que depengui de 4 paràmetres `f`, `a`, `b`, `n` que dibuixi la funció `f` entre `a` i `b` i el polinomi de grau menor o igual a `n` que interpoli a `n+1` punts equiespaiats entre `a` i `b` (inclosos).

**Exercici 17.7**

Aplicueu la funció `aproxf` a la funció  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  entre  $-5$  i  $5$  i per als valors de `n` 1, 3, 6, 10 i 15. Què observeu?

**17.4 Polinomi de Taylor**

Un altre tipus d'aproximació polinòmica és la que s'anomena *aproximació de Taylor*. De fet l'aproximació de Taylor d'una funció és com un polinomi interpolador en el que és concentra tota la informació en un sol punt.

La comanda per a obtenir l'aproximació de Taylor de grau `n` d'una funció `f` al voltant del punt `c` és `taylor(f(x),x=c,n)` (noteu que la comanda `taylor` s'aplica a una expressió `f(x)` i no a la funció `f`).

**Exemple 17.3**

```
> taylor(cos(x),x=0,8);  
> taylor(ln(x),x=1,10);
```

Noteu que el resultat de `taylor` està format per una component polinòmica i una component de la forma  $O((x-c)^n)$ . La part polinòmica és el polinomi aproximador pròpiament dit, més endavant veurem com es pot interpretar la part  $O((x-c)^n)$ . Si es vol extreure el polinomi del resultat d'una comanda `taylor`, s'utilitza `convert(expr, polynom)`.

**Exemple 17.4**

El polinomi de Taylor de grau 5 al voltant del 0 per a la funció  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  s'obté amb

```
> expr:=taylor(1/(1-x),x=0,5);  
> poli:=convert(expr, polynom);
```

**Exercici 17.8**

Realitzeu un procediment que, donats  $f(x)$ ,  $c$  i  $n$ , doni com a resultat només el polinomi de Taylor de grau  $n$  de la funció  $f(x)$  al voltant de  $c$ . Modifiqueu el procediment anterior per tal que retorni en una llista els polinomis de grau 1 fins a  $n$ .

**Exercici 17.9**

Considereu la funció  $f(x) = e^x$  i el punt  $c = 0$ . Feu un gràfic en el que es vegin alhora el gràfic de  $f(x)$  i el del seu polinomi de Taylor per a  $n = 2$ . Què observeu?

Repetiu l'exercici per a  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  i per a  $f(x) = \arctan(x)$ .

Noteu doncs que es pot dir que el polinomi de Taylor de grau 1 ( $n = 2$ ) és la recta tangent al gràfic de  $f(x)$  en  $x = c$  (això s'expressa sovint dient que *l'ordre de contacte entre els dos gràfics és 2*).

En l'exercici següent podreu veure com el concepte d'ordre de contacte s'estén a graus superiors.

**Exercici 17.10**

Preneu  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  i  $p(x)$  el polinomi de Taylor amb  $n = 8$  de  $f(x)$  al voltant de 0. Calculeu els valors de  $\frac{f(x) - p(x)}{x^7}$  per a  $x = \pm \frac{1}{2^n}$  (amb  $n$  des de 1 fins a 20 i amb 25 decimals com a mínim). Quin sembla que serà el límit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^7}$ ?

Com es poden obtenir els coeficients del polinomi de Taylor d'una funció a partir d'aquesta funció? Per a veure quina és aquesta relació recordeu que la comanda que dona el coeficient d'una expressió polinòmica `expr` respecte una altra expressió `var` és `coeff(expr, var)` i que si es vol buscar el coeficient respecte `var^k` també es pot fer `coeff(expr, var, k)`. Per exemple:

**Exemple 17.5**

```
> taylor(exp(-x^2), x=0, 9);
> coeff(taylor(exp(-x^2), x=0, 9), x, 4);

> taylor(sin(x), x=Pi/2, 8);
> coeff(%, (x-Pi/2), 4);
```

**Exercici 17.11**

Donada  $f(x) = \arctan(x)$  determineu les expressions de les derivades successives  $f^{(n)}(x)$  i avalueu-les en  $x = 0$  per a  $n$  des de 1 fins a 10. Feu el mateix amb  $p(x)$ , el polinomi de Taylor de grau 10 de  $f(x)$  al voltant de 0.

**Exercici 17.12**

Compareu els valors que heu obtingut en l'exercici anterior amb els coeficients del polinomi de Taylor  $p(x)$ . (Feu el quocient entre uns i altres i si no veieu res mireu què passa si  $f(x) = e^x$ ).

Al principi de la pràctica diu que el polinomi de Taylor permet aproximar una funció per un polinomi. L'exercici següent mostra com funciona aquest tipus d'aproximació.

**Exercici 17.13**

Feu un procediment que faci un dibuix dels gràfics (en diferents colors) d'una funció donada i dels seus polinomis de Taylor, fins a un grau  $n$  especificat en els arguments, al voltant d'un punt també donat entre els arguments.

Apliqueu l'anterior a la funció  $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^4}$  al voltant del punt  $x = 2$  fins al grau 7.

**Exercici 17.14**

Les coses no van sempre tan bé com en tots els exemples anteriors. Proveu de determinar l'expressió de qualsevol polinomi de Taylor de  $f(x) = e^{(-1/x^2)}$  al voltant de 0.

Tot i que `taylor` no aconsegueix fer gaire cosa amb aquest problema, hauríeu de poder determinar quin és el polinomi de Taylor de qualsevol grau per a la funció anterior al voltant de 0. I encara que es tingui el polinomi de Taylor, noteu que el resultat que s'obté no és gaire interessant!