Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 22

curs 2002–03

22 Aproximació de les arrels d'una equació

L'objectiu d'aquesta pràctica és fer un petit anàlisi amb Maple de dos mètodes iteratius que ens permeten trobar aproximacions numèriques de zeros de funcions. Veurem els seus avantatges i desavantatges. Abans però recordeu que a la pràctica 4 ja havíem analitzat la comanda `fsolve` que ens fa aquesta feina. El que farem avui és construir els nostres propis procediments.

22.1 Mètode de la bipartició

El primer mètode que analitzarem és conegut com el mètode de la bipartició. És una aplicació directa del teorema de Bolzano. Aquest teorema diu que si f és una funció contínua a l'interval $[a, b]$ tal que $f(a)$ i $f(b)$ són no nuls i prenen valors de signe oposat, aleshores existeix un punt dins de l'interval en el qual la funció pren el valor zero. El mètode de la bipartició utilitza aquest fet per a donar intervals cada cop més petits que contenen el zero de la funció.

Anem a implementar aquest mètode amb Maple per a trobar una aproximació numèrica de $\sqrt{2}$ pensada com a zero de la funció $f(x) = x^2 - 2$.

Primer de tot cal esbrinar quin és l'interval convenient per començar. Per això ens ajudarem amb una representació gràfica de la funció.

Exercici 22.1

Mitjançant una representació gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 2$ determineu un interval que contingui $\sqrt{2}$.

Noteu que per exemple podem prendre l'interval $[1, 2]$ i comproveu que $f(1)$ i $f(2)$ prenen valors de signe contrari (1 i 2 són cotes inferior i superior respectivament per un zero de la funció). Per tant, podem concloure que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Sigui m_1 el punt mig de l'interval, és a dir, $\dfrac{1+2}{2} = 1.5$.

Exercici 22.2

En quin dels dos intervals està continguda $\sqrt{2}$, $[1, m_1]$ o $[m_1, 2]$?

Ja haureu observat que $f(1)$ i $f(1.5)$ prenen valors de signe contrari. Per tant, l'interval $[1, 1.5]$ conté un zero de la funció. D'aquesta manera hem obtingut un interval més precís que l'inicial.

Noteu que el procés anterior el podeu anar iterant, és a dir, donat aquest nou interval que conté el zero, considereu el punt mig i preneu el subinterval on els extrems prenen valors de signe contrari.

Exercici 22.3

Repetiu el procés anterior tres cops.

Com ja haureu observat aquest mètode recursiu d'aproximació és molt senzill de programar.

Exercici 22.4

Realitzeu un procediment tal que donada una funció f, un número natural n i els extrems a i b d'un interval ens retorni un missatge dient si hi ha una arrel o no en l'interval $[a, b]$ i, si n' hi ha, que iteri el mètode de la bipartició n cops retornant les cotes inferior i superior de l'arrel de $f(x) = 0$ que s'obtenen.

Exercici 22.5

Modifiqueu el procediment anterior de manera que enlloc del paràmetre n, nombre d'iteracions, tingui com a paràmetre la precisió en decimals que volem obtenir. Una precisió de 10^{-n} vol dir que la diferència entre la cota superior i la inferior és menor que 10^{-n}.

Exercici 22.6

Utilitzeu els procediments anteriors per a calcular una aproximació numèrica amb una precisió de 15 decimals de la solució de $x - \sin(x) - 5 = 0$.

22.2 Mètode de Newton

El mètode de la bipartició abans esmentat és un mètode senzill i fiable però molt lent, és a dir, calen moltes iteracions per a poder obtenir una precisió elevada. El mètode de Newton que tot seguit anem a descriure és molt més ràpid però té altres inconvenients com veurem més endavant. Aquest mètode utilitza la idea de l'aproximació lineal de la funció mitjançant la recta tangent (és a dir, donat un punt inicial considera com a primera aproximació del zero de la funció el zero de la seva recta tangent en aquest punt). Començarem la iteració en un punt x_0 proper al zero de la funció. Considerarem un nou punt que és el zero de la recta tangent a f en el punt x_0. Recordeu que la recta tangent a la gràfica de f al punt x_0 correspon al polinomi de Taylor de grau 1, $r(x) = x_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Com a l'apartat anterior, treballarem amb la funció $f(x) = x^2 - 2$ i començarem les iteracions del mètode amb $x_0 = 1$. Abans però definirem un procediment (que ens simplificarà la feina més endavant) que ens retornarà la recta tangent en el següent grup de comandes de Maple.

```
> tangent:=proc(f,a)
> convert(taylor(f(x),x=a,2),polynom):
> return(unapply(%,x)):
> end proc;
> r:=tangent(f,1);
```

Exercici 22.7

En una mateixa gràfica dibuixeu la gràfica de f i la de la recta tangent de f al punt 1 en colors diferents. Quin és el punt d'intersecció de la recta tangent amb l'eix horitzontal? (noteu que aquest punt és el zero de la recta tangent).

El punt obtingut en l'exercici anterior l'anomenarem x_1. I ara repetiu l'exercici anterior amb el punt x_1 en lloc del x_0. Quin nou punt obteniu?

Noteu que després de fer tres iteracions, l'aproximació numèrica que obtenim ja és molt semblant a la que s'obté amb el Maple mitjançant la comanda `evalf(sqrt(2))`.

El problema d'aquest mètode és que en funció del punt inicial, la successió de punts obtinguda pot no convergir cap a un zero de la funció. Què passa si algun dels punts obtinguts és un extrem local (màxim o mínim)?

De fet, els punts que anem obtenint es poden descriure fàcilment de manera recursiva a partir de la fórmula de la recta tangent $r(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0$, és a dir, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Exercici 22.8

Programeu el mètode de Newton en un procediment tal com heu fet en el mètode de la bisecció. Els paràmetres del procediment són una funció f, un punt x_0 per iniciar les iteracions i el número d'iteracions. Feu que retorni una llista que contingui tots els punts obtinguts. Cal tenir en compte mentre s'executa el procediment que alguna de les rectes que apareixen pot no tenir zeros (si algun dels punts és un extrem local).

Direm que hem obtingut una precisió de n decimals si la diferència entre dues iteracions és menor de 10^{-n}.

Exercici 22.9

Modifiqueu el procediment anterior de forma que un dels paràmetres sigui la precisió desitjada enlloc del número d'iteracions. Com que aquest mètode no sempre convergeix, feu que com a molt realitzi 25 iteracions.

Exercici 22.10

Utilitzeu el mètode de Newton per a trobar un zero de la funció cosinus entre 0 i π.

Preneu com a valor inicial primer 0, 0.01 i 1 i analitzeu la situació gràficament dibuixant les corresponents rectes tangents.

Exercici 22.11

Utilitzeu els procediments que heu realitzat durant la pràctica per a trobar solucions de l'equació $x = \cos(x)$.

Exercici 22.12

Un altre tipus de comportament patològic es pot observar en la funció $g(x) = \frac{x}{|x|}\sqrt{|x|}$ (noteu que $\frac{x}{|x|}$ és la funció signe i val 1 si $x \geq 0$ i -1 si $x < 0$ i que el Maple conté aquesta funció amb el nom `signum`).

Feu una representació gràfica de la funció $g(x) = \frac{x}{|x|}\sqrt{|x|}$ i decidiu quants zeros té la funció. Representeu gràficament les dues primeres iteracions del mètode de Newton pel punt inicial que vulgueu. Què observeu? Intenteu aproximar el zero de la funció mitjançant el mètode de la bipartició.