Pràctiques Integrades
1er de Matemàtiques

Pràctica 24

curs 2002–03

24 Formes de Jordan

Com ja haureu vist, un endomorfisme d'un espai vectorial (matriu quadrada) no sempre diagonalitza. Per a aquests casos és possible intentar obtenir altres *formes canòniques*. En l'exemple següent veureu una matriu 3×3 que té un únic valor propi i que, a més, l'espai de vectors propis només té dimensió 1.

Exercici 24.1

Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu el polinomi característic de A, comproveu que A té un únic valor propi λ (triple) i que l'espai de vectors propis de A té dimensió 1.

b) Sigui $\vec{v}_3$ un vector propi no nul de A. Determineu un vector $\vec{v}_2$ tal que $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})\vec{v}_2 = \vec{v}_3$ i un vector $\vec{v}_1$ tal que $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

c) Comproveu que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ són independents.

d) Calculeu la matriu $P^{-1} \cdot A \cdot P$ si P és la matriu que té per columnes les components del vectors $\vec{v}_i$.

La matriu que heu obtingut en l'últim apartat de l'exercici anterior és el que normalment s'anomena un *bloc de Jordan* (un mateix valor en tots els elements de la diagonal i 1 just en els llocs que estan per sobre, o per sota, d'aquesta diagonal). En general, es poden buscar formes canòniques de la forma $\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & J_2 & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$, on cada un dels J_i és un bloc de Jordan.

De la mateixa forma que per als valors i vectors propis, dins del paquet **LinearAlgebra** hi ha comandes específiques per a determinar la forma de Jordan d'un endomorfisme i per a obtenir el canvi de base que permet obtenir aquesta forma a partir de qualsevol altra forma equivalent. La comanda que fa les dues feines és `JordanForm`. Per a obtenir la forma de Jordan equivalent a una matriu A donada només cal fer `JordanForm(A);`, si es vol la matriu de canvi es pot modificar la comanda anterior i posar `JordanForm(A, output='Q');` i si es volen les dues coses `JordanForm(A, output=['J','Q']);`. Veieu a continuació uns exemples.

Exemple 24.1

```
> A:=<<2, 2, 0, 0>|<1/2, 3/2, -1/2, 1/2>|<0, 0, 2, 0>|<-1/2, -3/2, 1/2, 3/2>>;
> JordanForm(A);
> B:= JordanForm(A,output='Q');
> C:= JordanForm(A,output=['J','Q']);
> simplify(B^(-1).A.B);
> simplify(C[2]^(-1).A.C[2]);
```

Amb la comanda anterior es pot fer l'exercici següent:
Exercici 24.2

Considereu la matriu A donada per

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & -8 & 6 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -6 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 9 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

i la matriu B

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -7 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Existeix alguna matriu invertible P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$? (Determineu les formes de Jordan de A i B).

24.1 Potències de matrius.

Recordeu que per a calcular la potència n-èssima d'una matriu M diagonalitzable, es pot calcular la seva forma diagonal D, obtenir

$$M = CDC^{-1},$$

de tal manera que

$$M^n = CD^nC^{-1},$$

i aplicar finalment que elevar una matriu diagonal D amb coeficients a la diagonal $d_1, \ldots, d_m$ a una potència n és considerar la matriu diagonal que té per coeficients a la diagonal $(d_1)^n, \ldots, (d_m)^n$.

Exercici 24.3

Doneu l'expressió general de M^n per a $M = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -9 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercici 24.4

Feu un procediment que tingui com argument una matriu M, que retorni un missatge d'error si la matriu no és diagonalitzable i que retorni l'expressió general per a M^n en cas contrari. Comproveu el funcionament del procediment amb la matriu de l'exercici anterior.

Exercici 24.5

a) Com calcularieu M^n si M no diagonalitza?

b) Per exemple, com obtindrieu la fórmula general

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} ?$$