Topologia II
Llista de problemes número 11 (per al 2006-01-13)

El exercici 7 és copiat de la llista 10.

Totes les aplicacions són suposades contínues.

1. (Variacions del Borsuk-Ulam.) Demostreu que els quatre enunciats següents son equivalents:
   (a) (2.2.10) Dues aplicacions senars $s_1, s_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ tenen sempre un zero comú. (És dir, $\exists x \in S^2 \mid s_1(x) = s_2(x) = 0$.)
   (b) (2.2.11) Tota aplicació senar $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ té un zero.
   (c) (7.1.1) No existeix cap aplicació senar $g : S^2 \to S^1$.
   (d) (2.2.12) Para tota aplicació $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ existeixen dos punts antipodals amb la mateixa imatge.

2. Siguin A_1, A_2, A_3 tres tancats de S^2 tals que $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Demostreu que algun dels tres conjunts A_1, A_2, A_3 conté un parell de punts antipodals.

   Pista: Definiu dues funcions f_1, f_2 com la distància a A_1, A_2:
   $$f_i(x) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A_i\}$$
   i poseu
   $$\begin{array}{rcl} g : S^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)). \end{array}$$
   Ara utilitzeu Borsuk-Ulam (d): garanteix l'existència de un punt $x \in S^2$ tal que $g(-x) = g(x)$, i aquest punt deu estar en un dels A_i. Considereu els tres casos.

3. Demonstreu que tota aplicació injectiva $f : S^2 \to S^2$ és bijectiva (i per tant, perqué S^2 és compacte i Haussdorff, f és un homeomorfisme).

4. Demostreu que tota aplicació $S^2 \to S^2$ no exhaustiva té algun punt fix. Doneu un exemple d'una aplicació $S^2 \to S^2$ sense cap punt fix.

5. (i) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}^3$ menys els eixos de coordenades.
   (ii) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}^3$ menys n rectes concorrents.

6. *Examen de juliol de 2003.* Siguin X, Y i Z espais arc-connexos i localment arc-connexos, $q : X \to Y$ i $t : Y \to Z$ aplicacions contínues, $p = r \circ q$. Demostreu que si p i r són aplicacions recobridores aleshores:
   (i) q és també una aplicació recobridora.
   (ii) Si Z té espai recobridor universal, també el tenen X i Y.

En els exercicis següents, contràriament al llibre, no suposem que el espai total d'un recobriment sigui connex. Doncs, per exemple, $X \sqcup X \to X$ és un recobriment (trivial) a dos fulls.

7. Sigui $Y \to X$ un recobriment, i sigui $U \subset X$ un obert connex. Construiu un recobriment natural $Y|_U \to U$, la restrició a U. Doneu un exemple explícit i natural on Y és connex, però on la restricció $Y|_U$ no ho sigui.

8. Generalitzant el exercici anterior, sigui $Y \to X$ un recobriment, i sigui $X' \to X$ una aplicació. Demostreu que el pullback $Y' := Y \times_X X'$ és un recobriment de X'.

9. *Col·latge de recobriments.* Sigui X un espai topològic connex, cobert per dos oberts connexos $X = U_1 \cup U_2$. Denotem $U_{12} := U_1 \cap U_2$, suposat connex també. Donats espais recobridors $p_1 : Y_1 \to U_1$ i $p_2 : Y_2 \to U_2$, i un isomorfisme de recobriments

$$\begin{tikzcd} Y_1|_{U_{12}} \arrow[rr, "\overset{\phi}{\simeq}"] \arrow[dr] & & Y_2|_{U_{12}} \arrow[dl] \\ & U_{12}. & \end{tikzcd}$$

Construïu un recobriment $p : Y \to X$ amb isomorfismes naturals de recobriments

$$\begin{tikzcd} Y|_{U_1} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dl] \\ & U_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y|_{U_2} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \\ & U_2 & \end{tikzcd}$$

Pista: Y deu ésser la quocient de $Y_1 \sqcup Y_2$ obtingut identificant $y \in Y_1$ amb $\phi(y) \in Y_2$ si $y \in p_1^{-1}(U_{12})$.

10. *Col·latge de G-recobriments.* Continuant l'exercici anterior, suposem que p_1 i p_2 són G-recobriments, i que $\phi Y_1|_{U_{12}} \xrightarrow{\simeq} Y_2|_{U_{12}}$ és un isomorfisme de G-recobriments. Demostreu que la col·latge $Y \to X$ és també un G-recobriment.

En el llibre suposem que els espais total des recobriments són connexos, i vam trobar una correspondència biunivoca entre els G-recobriments (connexos) $(Y, y) \to (X, x)$ (fins equivalència) i els subgrups normals $N \leq \pi(X, x)$ tals que $\pi(X, x)/N \simeq G$. Oblidant un moment N tenim una correspondència biunivoca entre G-recobriments connexos de X (fins equivalència) i homomorfismes de grups exhaustius $\pi(X, x) \to G$.

Amb una mica més de treball es pot obtener el resultat següent: *Hi ha una correspondència biunivoca entre G-recobriments $(Y, y) \to (X, x)$ no necessariament connexos (fins equivalència) i homomorfismes de grups $\pi(X, x) \to G$ (no necessariament exhaustius).*

Utilitzant aquest resultat, es pot donar una demostració alternativa i més conceptual del teorema de Seifert-van Kampen.

Suposem que $X = U_1 \cup U_2$, i que la intersecció $U_{12} := U_1 \cap U_2$ és connex. Sigui x un punt en U_{12}. Tenim un quadrat commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\pi(U_{12}, x) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \pi(U_1, x) \arrow[d, "j_1"] \\
\pi(U_2, x) \arrow[r, "j_2"'] & \pi(X, x)
\end{tikzcd}$$

El teorema de Seifert-van Kampen diu que el diagrama és un pushout.

11. Donats homomorfismes de grups

$$h_1 : \pi(U_1, x) \to G \qquad h_2 : \pi(U_2, x) \to G$$

tals que

$$h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2 \quad : \pi(U_{12}, x) \to G.$$

Utilitzant el resultat, h_1 i h_2 induexien G-recobriments $Y_1 \to U_1$ i $Y_2 \to U_2$, i el la compatibilitat de h_1 i h_2 sobre U_{12} implica que les restriccions $Y_1|_{U_{12}}$ i $Y_2|_{U_{12}}$ són isomorfes (como G-recobriments). Per tant, tenim la seva col·latge $Y \to X$, amb identificacions

$$Y|_{U_1} \simeq Y_1 \qquad Y|_{U_2} \simeq Y_2$$

de G-recobriments. El G-recobriments $Y \to X$ correspón a un homomorfisme de grups $h : \pi(X, x) \to G$, i les identificacions garanteixen que $h \circ j_1 = h_1$ i $h \circ j_2 = h_2$. Doncs, vam trobar que el quadrat és un pushout.

Aquesta demostració elegant del teorema de Seifert-van Kampen és deguda a Grothendieck. Es pot encontrar en el llibre de Fulton, *Algebraic Topology; A First Course*, Springer Verlag, 1995.