

## Topologia II

### Llista de problemes número 3 (per al 2005-10-14)

Els exercicis 1, 2, 3, 4 són copiats de la llista 2.

Els exercicis 5, 6 són copiats de la llista 1.

1. Demostreu que  $E^2$  és contràctil. (I.e., l'aplicació identitat  $E^2 \rightarrow E^2$  és homòtopa a una aplicació constant).
2. Sigui  $f : S^1 \rightarrow X$  una aplicació homòtopa a una aplicació constant. Demostreu que existeix una aplicació contínua  $g : E^2 \rightarrow X$  extenent  $f$ . És a dir que  $g|_{S^1} = f$ :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \subset & E^2 \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

Pista: Defineu  $E^2 \rightarrow I \times S^1$  utilitzant el valor absolut, el argument i l'homotopia donada.

3. Recíprocament, sigui  $f : S^1 \rightarrow X$  una aplicació contínua amb una extensió  $g : E^2 \rightarrow X$  com en el exercici anterior. Demostreu que  $f$  és homòtopa a una aplicació constant.

Pista: Utilitzeu el exercici 8 de la llista 2 i Exercici 1.

4. Generalitzant el exercici anterior, demostreu que toda aplicació contínua que factoritza a través d'un espai contràctil és homòtopa a una aplicació constant.

*Dos exercicis donant un punt de vista més categòric.*

5. Sigui  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor entre dues categories. Demostreu que si  $\varphi : X \rightarrow Y$  és una fletxa invertible en  $\mathcal{C}$  aleshores  $F(\varphi) : FX \rightarrow FY$  és invertible en  $\mathcal{D}$ . (Aquest fet general immediatament implica Corol·lari 1.2.2.)
6. Sigui  $\mathcal{C}$  una categoria qualsevol. Una fletxa  $r : X \rightarrow A$  es diu una *retracció* si existeix una fletxa  $i : A \rightarrow X$  tal que  $r \circ i = \text{id}_A$ .

A més, un objecte  $A$  es diu *retracte* de un objecte  $X$  si existeix una retracció  $r : X \rightarrow A$ .

Demostreu que tot functor preserva retraccions. (Així generalitza Corol·lari 1.2.3.)