

## Topologia II

### Llista de problemes número 8 (per al 2005-11-25)

Els exercicis 1 i 2 són copiats de la llista 7.

1. Sigui  $L$  una recta de  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu el grup fonamental de  $X := \mathbb{R}^3 \setminus L$ .  
Pista: utilitzeu el regla del producte.
2. Sigui  $C_2$  l'espai de parells de punts distints en  $\mathbb{R}^2$ . Altrement dit,  $C_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ , on  $\Delta$  és el diagonal. Calculeu el grup fonamental de  $C_2$ .  
Pista: el diagonal és un subespai vectorial de  $\mathbb{R}^4$  de dimensió 2. Ara utilitzeu l'idea de l'exercici anterior.
3. Sigui  $L_1$  i  $L_2$  dues rectes disjuntas de  $\mathbb{R}^3$ . Calculeu el grup fonamental de llur complement.
4. (*Fonaments teòrics per al croquet.*) Considereu el semi-espai superior  $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ , i sigui  $A \subset H$  l'arc  $\{(x, y, z) \in H \mid y^2 + z^2 = 1, x = 0\}$ .



Demostreu que  $\pi(H \setminus A) \simeq \mathbb{Z}$ .

5. Utilitzant Seifert-van Kampen i els exercicis anteriors, calculeu el grup fonamental de  $\mathbb{R}^3$  menys un cercle. (Un cercle no-nuat, és dir —concretament, diguem  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 1\}$ .)
6. Sigui  $T$  una arbre, i sigui  $e$  una aresta qualsevol de  $T$ . Proveu que el graf  $T \setminus e$  no és connex.
7. Un graf  $\Gamma$ , no necessàriament connex, tal que per a tot vertex  $x_0$  el grup fonamental  $\pi(\Gamma, x_0)$  és trivial, s'anomena una *floresta*. (És una unió d'arbres.)

Si  $\Gamma$  és un graf finit. Per definició,  $\Gamma$  és obtingut a partir d'un nombre finit de punts adjuntant-hi un nombre finit de 1-cel·les: existeix una seqüència

$$\Gamma_0 \hookrightarrow \Gamma_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Gamma_n = \Gamma$$

on  $\Gamma_0$  és un graf sense arestes, i on cada aplicació consisteix en adjuntar una aresta.

Proveu que si  $\Gamma$  és una floresta, llavors cada  $\Gamma_i$  és una floresta també.

8. En la demostració de la Proposició 5.2.1, s'utilitza de forma essencial el fet següent: *Tota arbre nontrivial possui un vèrtex incident a només una aresta* (i.e. de valència 1) — en la demostració, es diu que aquest fet és clar.

Doneu una demostració de l'assertió. (Una estratègia possible: considereu el enunciat més fort: *tota arbre nontrivial possui almenys dos vèrtexs de valència 1*, i mireu la seqüència de florestas de l'exercici anterior, observant què passa quand s'adjunta una aresta.)