

Topologia II

Llista de problemes número 9 (per al dimarts 2005-11-29)

1. Sigui $H = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}$, el mig-pla superior obert, i considereu l'aplicació

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Mostreu que és una projecció recobridora. Encontreu una acció de \mathbb{Z} tal que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = H/\mathbb{Z}$.

2. Mostreu que la funció exponencial $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \exp(z)$ és una projecció recobridora.
3. Mostreu que si $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ són projeccions recobridores llavors $g \circ f$ també ho és.
4. Mostreu que si en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow p' & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

p i p' son ambdues projeccions recobridores, i si tots els espais són connexos, aleshores q també és una projecció recobridora.

5. Considereu un diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ X' & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Mostreu que si p és una projecció recobridora, llavors p' també ho és.

6. Demostreu que si un G -recobriment té una secció, llavors és el recobriment trivial.
7. Sigui $G' \leq G$ un subgrup. Suposem que tenim una acció pròpiament discontinua de G sobre un espai Y , amb projecció recobridora $p : Y \rightarrow Y/G$ (un G -recobriment). Llavors tenim també una acció de G' sobre Y , i per tant altra projecció recobridora $p' : Y \rightarrow Y/G'$, i una aplicació induïda $q : Y/G' \rightarrow Y/G$:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ p' \swarrow & & \searrow p \\ Y/G' & \xrightarrow{q} & Y/G. \end{array}$$

Demostreu que q és una projecció recobridora.

8. Considereu el grup G de homeomorfismes de \mathbb{R}^2 generat per

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y) \quad \text{i} \quad (x, y) \mapsto (-x, y + 1).$$

Demostreu que l'acció de G sobre \mathbb{R}^2 és propiament discontinua i que el quocient és l'ampolla de Klein.

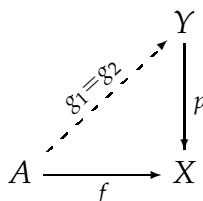
9. Considereu el grup G' de homeomorfismes de \mathbb{R}^2 generat per

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y) \quad \text{i} \quad (x, y) \mapsto (x, y + 2).$$

Demostreu que l'acció de G' sobre \mathbb{R}^2 és propiament discontinua i que el quocient és el tor.

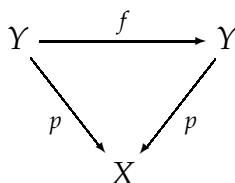
10. Continuant la notació dels exercicis anteriors, observeu que G' és un subgrup de G . Descreveu la projecció recobridora $X/G' \rightarrow X/G$ (cf. Exercici 7) del tor sobre l'ampolla de Klein.

11. *Elevació de aplicacions arbitràries.* Sigui $p : Y \rightarrow X$ una projecció recobridora, sigui $f : A \rightarrow X$ una aplicació contínua amb A arc-connex. Supposeu que g_1 i g_2 són dues elevacions de f per a Y i que existeix un punt $a \in A$ tal que $g_1(a) = g_2(a)$. Demostreu que $g_1 = g_2$.



Pista: per a verificar que g_1 i g_2 tenen la mateixa valor en un punt $z \in A$, agafeu un camí de a a z i utilitzeu la unicitat de l'elevacions de camins.

Transformacions de cobertes. Sigui $p : Y \rightarrow X$ una projecció recobridora. Una *transformació de cobertes* (deck transformation) és un homeomorfisme $f : Y \rightarrow Y$ compatible amb p , en el sentit que comuta el diagrama



Denotem per $\text{Aut}(Y/X)$ el grup de totes les transformacions de cobertes.

12. Mostreu que si $p : Y \rightarrow X$ és un recobriment trivial de n fulls, i si X és connex, llavors $\text{Aut}(Y/X) \simeq \mathfrak{S}_n$ (el grup simètric en n lletres).

13. Donat un G -recobriment $Y \rightarrow Y/G = X$, demostreu que el homomorfisme de grups natural $G \rightarrow \text{Aut}(Y/X)$ és injectiu.

14. Continuant la notació del exercici anterior, mostreu que si Y és connex, llavors $G \rightarrow \text{Aut}(Y/X)$ és un isomorfisme.

(Pista: utilitzeu Exercici 11.)