

Classificació afí de quàdriques reals (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 20/12/2011

Continguts

1	Quàdriques de $\mathbb{R}^n$	1
2	Classificació de formes quadràtiques	4
3	Classificació de quàdriques	8

1 Quàdriques de $\mathbb{R}^n$

1.1 Definició. Una quàdrica de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de grau 2. Més exactament excloem l'aplicació constant 0, i considerem q' i q'' la mateixa quàdrica si difereixen només d'un factor no nul, és a dir, si existeix $\lambda \neq 0$ tal que $q'(P) = \lambda q(P)$ per a tot punt $P \in \mathbb{R}^n$.

El lloc de zeros d'una quàdrica q és el conjunt

$$V(q) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid q(P) = 0\}.$$

Les quàdriques de $\mathbb{R}^2$ les anomenem de *còniques*.

1.2 Exemple. Un exemple d'una cònica és

$$q : \quad x^2 + y^2 - 1$$

El seu lloc de zeros és el cercle unitari de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Representació matricial. Una quàdrica de $\mathbb{R}^n$ és per tant un polinomi de grau 2 en les variables $x_1, \dots, x_n$. El podem escriure

$$\underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j}_{\text{part quadràtica}} + \underbrace{\sum_j b_j x_j}_{\text{part lineal}} + \underbrace{c}_{\text{part constant}}.$$

La primera suma és la *part quadràtica*. La segona suma és la *part lineal*, i l'últim terme és la part constant.

Podem juntar tot aquests coeficients en una matriu, i escriure el polinomi com el producte de matrius

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & x^\top \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline c & b \\ \hline b^\top & a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

on a és la matriu $n \times n$ dels coeficients de la part quadràtica, b és el vector fila dels coeficients de la part lineal, i c és el constant. (El fet que b apareix dos cops explica per què hem posat el factor 2 en el polinomi inicialment.) El símbol x representa el vector columna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1.4 Transformació de quàdriques. Volem estudiar les quàdriques des d'un punt de vista afí: vol dir que ens interessin les propietats d'elles que són invariants per afinitats.

El punt clau és el següent lema.

1.5 Lema. Si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una quàdrica de $\mathbb{R}^n$ i si $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació afí tal que no tota la imatge està dins de $V(q)$, llavors la composició $q \circ \phi$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n \\ & & \searrow q \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

és una quàdrica de $\mathbb{R}^k$.

La demostració és una verificació directe. Hem de veure que $q \circ \phi$ vé donada per un polinomi (no nul) de grau 2. Fem servir les representacions matricials de q i ϕ . Suposem que la matriu de q és la matriu simètrica Q , i que la matriu de ϕ és la matriu F . Llavors ϕ envia

$$x \mapsto Fx$$

A aquest punt apliquem q . Això vol dir fer el producte matricial

$$(Fx)^\top Q (Fx)$$

En conclusió, l'aplicació composada és

$$x \longmapsto x F^\top Q F x$$

Però com que $F^\top Q F$ és una matriu simètrica, l'aplicació composada és de grau 2. Falta només veure que no és constant nula: la condició que no tota la imatge de ϕ està dins de $V(q)$ assegura això: la condició diu que existeix algun punt $P \in \mathbb{R}^k$ tal que $\phi(P) \notin V(q)$; és a dir $q(\phi(P)) \neq 0$. Per tant $q \circ \phi$ és una quàdrica.

La conclusió és que precomposar una quàdrica (de matriu Q) per una aplicació afí de matriu F és “conjuguar” amb F : $F^\top Q F$. Bé, no és exactament una conjugació, perquè la paraula “conjugació” normalment es refereix al cas on en lloc de transposició fem servir la inversa. Com que la operació

$$Q \rightsquigarrow F^\top Q F$$

és molt important, la donem un nom: *transpo-conjugació*. (Sugestions per a una terminologia millor són benvides.)

1.6 Dos exemples: Un exemple important del lema és quan $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una parametrització d'una varietat lineal de $\mathbb{R}^n$, és a dir un subespai afí. En aquest cas, la composada es pot interpretar com a la restricció de la quàdrica a aquest subespai. O si pensem tot com a subconjunts de $\mathbb{R}^n$, estem parlant de la intersecció de (el lloc de zeros de) q amb (l'imatge de) el subespai afí.

Aquest exemple és interessant també per motius pràctics: suposem que tenim per exemple una cònica q i que volem saber quin és el seu lloc de zeros $V(q)$. Resoldre una equació de grau dos en dues variables no és fàcil. Però en una variable és fàcil! — és això de $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Així podem calcular fàcilment la intersecció de q amb qualsevol recta donada paramètricament per un paràmetre t : és simplement substituir la parametrització dins de l'equació; això dona una equació de grau 2 en t , la qual resolem fàcilment per a obtenir típicament dues solucions, i per tant dos punts de $V(q)$. Si repetim el càlcul amb una altra recta podem trobar més dos punts. Ràpidament tenim punts suficients per a tenir una idea de $V(q)$ — especialment si combinem les trobades amb el nostre coneixement de com són les còniques. És així que fa l'ordinador quan fa dibuixos, calculant rapidament centenars de punts.

L'altre exemple important és quan $\phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ és una afinitat invertible de $\mathbb{R}^n$. En aquest cas, estem parlant de transformar una quàdrica en una altra quàdrica del mateix

espai.

1.7 Equivalència. Diem que dues quàdriques són *equivalents* si existeix una afinitat que lleva una quàdrica en l'altra (per precomposició). En termes de matrius, podem dir que dues matrius simètriques Q i Q' (com a representants de quàdriques) són equivalents si existeix una matriu invertible U de la forma d'una afinitat i $\lambda \neq 0$ tals que

$$\lambda \cdot Q' = U^\top \cdot Q \cdot U. \quad (1)$$

(La necessitat de posar la λ vé del fet que dues matrius defineixen la mateixa quàdrica si difereixen per un factor $\lambda \neq 0$. En la fórmula, de fet $\lambda = \pm 1$ seria prou, perquè escalars positius es poden incorporar en U .)

El nostre objectiu final és classificar les quàdriques fins a equivalència. La classificació ens permetrà de decidir, donades dues quàdriques, si són equivalents o no, i en particular de trobar un representant canònic en cada classe d'equivalència. Això equival a escullir la base més adequada.

La classificació segueix un procediment purament algebraic. Després veurem interpretacions geomètriques. L'ingredient principal és el teorema d'inèrcia de Sylvester (1852), que resol completament el problema anàleg en àlgebra lineal, que ara passem a explicar.

2 Classificació de formes quadràtiques

2.1 Classificació de formes quadràtiques reals. Una forma quadràtica de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ és una aplicació de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\top A x \end{aligned}$$

on A és una matriu simètrica. Volem doncs classificar matrius simètriques, i declarem dues matrius A i A' *congruents* si existeix una matriu invertible P tal que

$$A' = P^\top A P$$

No hi ha ara cap condició sobre P , a més de ser invertible. (Comparat amb la noció d'equivalència per a quàdriques (1), observem també l'ausència de l'escalar λ .)

El primer pas és el teorema espectral:

2.2 Teorema. (Teorema espectral per a matrius simètriques (real).) *Un matriu simétrica (real) M és diagonalitzable per una matriu ortogonal. És a dir, existeix una matriu ortogonal P tal que $M = P^{-1}DP$, on D és una matriu diagonal. (Les entrades de D són els valors propis de M .)*

El teorema espectral parla de conjugació veritable, però que P sigui ortogonal vol dir exactament que $P^\top = P^{-1}$, per tant podem interpretar el teorema també en termes de transpo-conjugació. Implica que tota matriu simétrica és congruent (en el sentit acabat d'explicar) a una matriu diagonal.

Però, amb matrius no ortogonals podem transformar més. En particular, si les entrades de la diagonal de D són λ_i , amb els primeres s entrades positives, i les següents $r - s$ entrades negatives, i les restants igual a zero, llavors podem multiplicar dels dos costats amb la matriu

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & & \\ & 1/\sqrt{-\lambda} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

(on cada entrada representa una matriu diagonal) i obtenir

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

El nombre r es el *rang* de Q . El nombre s s'anomena la *signatura* de Q i es pot caracteritzar com el nombre de valors propis positius.

El teorema d'inèrcia de Sylvester diu que ara no podem reduir més, i que aquests dos nombres són invariants complets del problema de classificació de matrius simètriques:

2.3 Teorema. (Teorema d'inèrcia de Sylvester.) *Dues matrius simètriques són congruents si i només si tenen el mateix rang i la mateixa signatura.*

En altres paraules, qualsevol matriu simètrica és congruent a una matriu diagonal

$$\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

i aquesta matriu és única, si exigim que les entrades positives venen abans de les negatives a la diagonal, i els zero a la fi.

2.4 Consideracions computacionals. Invocar el teorema espectral per a garantir l'existència de la forma diagonal és convenient ja que coneixem aquest teorema. Però no és gaire econòmic, perquè per diagonalitzar ortogonalment una matriu hem de calcular valors propis i vector propis, la qual tasca té una certa complexitat algebraica – en particular involucra resoldre equacions en n variables.

En la pràctica podem estalviar feina, perquè tenim dret a utilitzar matrius no ortogonals, i és possible arribar a la forma diagonal sense calcular cap valor propi. El procediment és el següent. Cada entrada no nula a la diagonal la podem fer servir com a pivot per fer operacions de files i columnes i obtenir zero en les altres entrades de la seva columna i fila.

Suposem per exemple que la entrada m_{11} és no nula. Fem operacions de files per aconseguir zeros a les altres entrades de la columna. Fer totes aquestes operacions de files equival a multiplicar per l'esquerra per una matriu $E_1^\top$ que fora de la diagonal de uns té només entrades no nul·les a la primera columna. (Aquesta matriu no és ortogonal.) Ara és fàcil veure que en la matriu $E_1^\top \cdot M \cdot E_1$ la entrada m_{11} és la única de la primera columna i de la primera fila diferent de zero. Continuem així amb les altres entrades no nul·les de la diagonal.

Aquesta tècnica no és sempre suficient, perquè no serveix en la situació on la matriu conté un menor de tipus $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. En aquest cas tornem al punt de vista del teorema espectral, interpretant aquesta petita matriu com una transformació lineal de $\mathbb{R}^2$. Clarament aquesta transformació intercanvia els dos eixos; és a dir, és una reflexió ortogonal de la recta $x = y$ (seguida d'una homotècia de raó b). Aixó vol dir que per diagonalitzar cal conjuguar per una rotació de $\pi/4$, és a dir conjuguar o transpo-conjuguar amb

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Un càlcul directe mostra que

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Així podem aconseguir la forma diagonal.

(Per evitar funcions trigonomètriques es pot argumentar també observant que una reflexió ortogonal en la recta $x = y$ té vectors propis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tant podríem també fer transpo-conjugació per $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. El resultat seria $\begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$ al lloc de $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$.)

2.5 Exemple. Sigui

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Volem pivotar a la primera entrada. Això vol dir restar tres cops la primera fila de la segona, i restar dos cops la primera fila de la tercera. Això vol dir multiplicar de l'esquerra per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que per tant és la nostre $E_1^\top$ (amb notació com abans). Efectuem el producte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara no podem continuar pivotant a la diagonal. Però tenim un menor del tipus “reflexió”, que podem eliminar per transpo-conjugació per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i arribem a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 Classificació de quàdriques

3.1 Envers una classificació de quàdriques. Ara tornem al cas de la classificació de les quàdriques. Aquí la situació és més complicada, degut al fet que no podem transpo-conjugar amb qualsevol matriu, sinó només amb matrius afins. Això significa que no podem sempre obtenir la forma diagonal: hi haurà uns casos més.

Analitzem la situació: tenim una matriu simètrica

$$Q = \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array}$$

i la volem transformar en transpo-conjugant amb matrius afins així:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & v^\top \\ \hline 0 & M^\top \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline v & M \\ \hline \end{array}$$

És fàcil veure que la part quadràtica A la podem transformar sense restriccions: de fet es fa amb matrius on $v = 0$, i això és el cas del teorema de Sylvester. Per tant hem trobat que Q és equivalent a una matriu de la forma

$$Q \sim \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & S \\ \hline \end{array}$$

on S és de la forma del teorema de Sylvester.

Ara podem fer servir cada entrada no nula de S com a pivot per a eliminar les entrades corresponents a B . Per exemple, si la primera entrada de S és 1, podem restar b_1 cops la segona fila de la primera fila. Aquesta operació consisteix en multiplicar per l'esquerra

per una matriu elemental $E^\top$, on E es vé fàcilment ésser una matriu afí. Ara el producte

$$E^\top \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & S \\ \hline \end{array} E$$

elimina les dues entrades b_1 (simètricament). De la mateixa forma eliminem les r primeres entrades de B , on r és el rang de S , és a dir el nombre d'entrades no nul·les.

Si totes les entrades de B són zero, llavors ja tenim una forma diagonal, i hi ha dos subcasos, segon si la entrada C és zero o no.

Si hi ha alguna entrada de B (després de r) no zero, podem suposar que b_{r+1} és la primera. La podem fer servir com a pivot per eliminar (amb operacions de files i les mateixes operacions de columnes) les altres entrades no nul·les de B . Finalment, podem fer servir b_{r+1} com a pivot per eliminar també C . (Atenció: la operació de files ha d'eliminar només la meitat de C , perquè la operació de columnes corresponent elimina després l'altra meitat.) En conclusió, si sobreviu alguna entrada de B , llavors és només una, i C mor també en aquest cas.

3.2 Classificació. En conclusió hi ha tres casos:

Tipus I: $B = 0$ i $C = 0$.

Tipus II: $B = 0$ i $C \neq 0$.

Tipus IV: $b_{r+1} \neq 0$ (única entrada no zero fora de S).

Dins de cada tipus podem mirar els signes. En el teorema de Sylvester, n'hi ha prou amb comptar signes positius. En el nostre cas de quàdriques el nombre de signes positius no és un invariant, perquè tenim dret a multiplicar tota la matriu per -1 (vegeu Equació (1)). No obstant això, al Tipus II, sí que podem distingir, perquè tenim la entrada diagonal especial C , i podem fer la convenció de sempre agafar $C > 0$ (de fet la podem agafar $C = 1$). I ara comptar els signes de S . Això dóna dos subtipus que podem distingir geomètricament també: el cas on hi ha més signes de S iguals al signe de C i el cas on hi ha més signes oposats del signe de C . [Reventós] anomena aquests dos casos Tipus II i Tipus III.

3.3 Teorema de classificació. *Tota quàdrica q és equivalent a exactament una de les*

quàdriques següents (que anomenem de forma canònica):

$$\begin{aligned}
I : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 \\
II : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 1 \quad \text{amb } s > r - s \\
III : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 1 \quad \text{amb } s < r - s \\
IV : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 2x_{r+1}
\end{aligned}$$

3.4 Invariants. Als altres casos, si no podem distinguir $(+1)^3(-1)^7$ de $(+1)^7(-1)^3$ (per exemple), sí que podem distinguir això de $(+1)^4(-1)^6$, perquè els canvis de signes sempre afecten tots els signes. Per tant, la quantitat

$$i := \min\{s, r - s\}$$

sí que és invariant per multiplicació per -1 .

Ara tenim les invariants r i i de la part quadràtica. Similarment podem enregistrar ρ , el rang de la matriu tota (s'anomena el *rang projectiu*), i

$$j := \min\{\sigma, \rho - \sigma\}.$$

el mínim de signes igual si comptem també el signe de C .

3.5 Proposició. *Si q i q' són equivalents, llavors tenen la mateixa quaterna d'invariants (r, ρ, i, j) .*

Observem que dels quatre tipus són possibles només els invariants (r, i, ρ, j) de les formes següents:

I	(r, i, r, i)	$2i \leq r \leq n$
II	$(r, i, r + 1, i)$	$2i \leq r \leq n$
III	$(r, i, r + 1, i + 1)$	$2i < r \leq n$
IV	$(r, i, r + 2, i + 1)$	$2i \leq r < n$

Classificació de les quàdriques de la recta

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Parell de punts
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (dos punts imaginaris)
IV	0	0	2	1	x	Punt (altre punt a l'infinit)
I	1	0	1	0	x^2	Punt doble
II	0	0	1	0	1	Buit (punt doble a l'infinit)

Classificació de còniques

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
II	2	1	3	1	$x^2 - y^2 + 1$	Hipèrbola
III	2	0	3	1	$-x^2 - y^2 + 1$	El·lipse
II	2	0	3	0	$x^2 + y^2 + 1$	Buit (el·lipse imaginària)
IV	1	0	3	1	$x^2 + y$	Paràbola
I	2	1	2	1	$x^2 - y^2$	Parell de rectes
I	2	0	2	0	$x^2 + y^2$	Punt (dues rectes imaginàries)
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Parell de rectes paral·leles
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (rectes paral·leles imaginàries)
IV	0	0	2	1	x	Recta (altra recta a l'infinit)
I	1	0	1	0	x^2	Recta doble
II	0	0	1	0	1	Buit (recta dobla a l'infinit)

Classificació de les quàdriques de l'espai

	r	i	ρ	j	Equació	Nom
II	3	0	4	0	$x^2 + y^2 + z^2 + 1$	Buit (el·lipsoide imaginari)
III	3	0	4	1	$-x^2 - y^2 - z^2 + 1$	El·lipsoide
II	3	1	4	1	$x^2 + y^2 - z^2 + 1$	Hiperboloide de dos fulls
III	3	1	4	2	$x^2 - y^2 - z^2 + 1$	Hiperboloide d'un full
IV	2	0	4	1	$x^2 + y^2 + z$	Paraboloide el·líptic
IV	2	1	4	2	$x^2 - y^2 + z$	Paraboloide hiperbòlic
I	3	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2$	Punt (con imaginari)
I	3	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2$	Con
II	2	0	3	0	$x^2 + y^2 + 1$	Buit (cilindre el·líptic imaginari)
III	2	0	3	1	$-x^2 - y^2 + 1$	Cilindre el·líptic
II	2	1	3	1	$x^2 - y^2 + 1$	Cilindre hiperbòlic
IV	1	0	3	1	$x^2 + z$	Cilindre parabòlic
I	2	0	2	0	$x^2 + y^2$	Recta (dos plans imaginaris)
I	2	1	2	1	$x^2 - y^2$	Parell de plans
III	1	0	2	1	$-x^2 + 1$	Plans paral·lels
II	1	0	2	0	$x^2 + 1$	Buit (plans paral·lels imaginaris)
IV	0	0	2	1	x	Pla (altre pla a l'infinit)
I	1	0	1	0	x^2	Pla doble
II	0	0	1	0	1	Buit (pla doble a l'infinit)