

Classificació afí de quàdriques reals (via geometria projectiva) (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 05/05/2013

Continguts

1	Repàs	1
2	Classificació de les quàdriques projectives reals	4
3	Classificació de les quàdriques afins	5

La classificació afí de les quàdriques es pot trobar per exemple en el capítol 8 del llibre de Reventós, *Afinitats, moviments i quàdriques* (UAB 2008). Alguns trets de la classificació s'expliquen millor amb una mica de geometria projectiva, com per exemple o fa en Reventós en *Geometria projectiva* (UAB 2000), i com ho intenten fer més resumidament aquests apunts.

La notació dels tipus I, II, III, IV està en acord amb la notació d'en Reventós 2008. Les notacions dels rangs i índexs són diferents:

Concepte	Notació	Notació Reventós 2008
rang	r	$\tilde{\rho}$
índex	i	$\tilde{i}$
rang de la intersecció amb ∞	r_∞	ρ
índex de la intersecció amb ∞	i_∞	i

Les notacions r, i, r_∞, i_∞ coincideixen amb Reventós 2000 on en canvi les notacions dels tipus és diferent...

1 Repàs

1.1 Espai projectiu. L'espai projectiu $\mathbb{P}^n$ és per definició

$$\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}}{\sim}$$

on identifiquem dos vectors de coordenades si difereixen per un factor constant no nul. En coordenades projectives:

$$[x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n], \quad \lambda \neq 0.$$

Una projectivitat és una aplicació $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ donada per multiplicació per una matriu invertible $(n+1) \times (n+1)$, llevat un factor constant.

1.2 Espai afí. Donat un hiperplà $H \subset \mathbb{P}^n$, el complement $\mathbb{P}^n \setminus H$ té naturalment estructura d'espai afí. (Diem llavors que H és l'hiperplà a l'infinit.) Ens interessa particularment l'hiperplà $x_0 = 0$. El complement consisteix en tots els punts amb $x_0 \neq 0$. Com que podem multiplicar per un escalar no-nul sense canviar el punt podem suposar que $x_0 = 1$. Aquest espai afí

$$\mathbb{A}^n = \{(1, x_1, \dots, x_n)\}$$

és el nostre model habitual per a espai afí quan tractem d'afinitats en coordenades cartesianes.

Les projectivitats que deixen invariant l'hiperplà a l'infinit $x_0 = 0$ (i per tant deixa invariant $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$) són exactament les afinitats de $\mathbb{A}^n$. Un càlcul directe mostre que són exactament les matrius invertibles $(n+1) \times (n+1)$ de la forma

1	0
v	M

que anomenem de *matriu afins*.

1.3 Quàdriques projectives. Una *quàdrica projectiva* de $\mathbb{P}^n$ és un polinomi homogeni $q(x_0, \dots, x_n)$ de grau 2, llevat un factor constant no-nul. El lloc de zeros de q és

$$V(q) = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid q(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

(Observeu que tant les coordenades com el polinomi estan determinats només llevat un escalar no-nul, però això és suficient per a dir si $q(x_0, \dots, x_n)$ és zero o no.)

Observació clau: *el polinomi q es pot representar per una matriu simètrica*. Per exem-

ple, si $n = 2$, podem escriure el polinomi

$$q(x_0, x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2$$

de la forma

$$q(x_0, x_1, x_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{02} & a_{12} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x_0 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$$

(Les subdivisions aquí és només per facilitar el passatge al cas afí, que tractem a seguir.)

1.4 Quàdriques afins. Una *quàdrica afí* de $\mathbb{A}^n$ és un polinomi no-nul $q(x_1, \dots, x_n)$ de grau ≤ 2 , llevat un factor constant no-nul. Es pot representar per una matriu simètrica. Per exemple, si $n = 2$, podem escriure el polinomi

$$q(x_1, x_2) = \underbrace{a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2}_{\text{part quadràtica}} + \underbrace{2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2}_{\text{part lineal}} + \underbrace{a_{00}}_{\text{part constant}}$$

de la forma

$$q(x_1, x_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{02} & a_{12} & a_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \end{array}$$

Veiem que una quàdrica afí és el mateix que una quàdrica projectiva: una matriu $(n+1) \times (n+1)$ llevat un escalar no-nul. És només la interpretació que és diferent.

Donada una quàdrica de $\mathbb{P}^n$, la quàdrica afí associada (a l'escull d'hiperplà a l'infinnit $x_0 = 0$) és la part afí: l'obtenim fent la substitució $x_0 = 1$. A l'inrevés, donada una quàdrica afí com a polinomi en $x_1, \dots, x_n$ obtenim la quàdrica projectiva en homogeneïtzant: a tot terme afegim factors x_0 fins a obtenir un polinomi homogeni de grau 2. A nivell de les matrius no hi ha res a fer: és la mateixa matriu que representa els dos tipus de quàdrica.

1.5 Equivalència. Diem que dues quàdriques, representades per matrius simètriques Q i Q' , són *projectivament equivalents* si existeix una matriu U invertible i $\lambda \neq 0$ tals que

$$\lambda \cdot Q' = U^\top \cdot Q \cdot U. \quad (1)$$

És a dir que existeix una projectivitat que lleva una quàdrica en l'altra.

Diem que Q i Q' (ara considerades quàdriques afins) són *afinment equivalents* si la matriu U a més és afí. És a dir que existeix una afinitat que lleva una quàdrica en l'altra. (Recordeu que podem veure una afinitat com una projectivitat que deixa invariant l'hiperplà a l'infinít $x_0 = 0$, i per tant deixa invariant $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$.)

2 Classificació de les quàdriques projectives reals

Ja hem classificat les quàdriques projectives, fent servir el teorema d'inèrcia de Sylvester:

Les quàdriques reals projectives es classifiquen per rang r i per $\min(s, r - s)$. Aquí s és l'índex, és a dir el nombre de valors propis positius. (L'índex s no és un invariant projectiu perquè canvia si multipliquem tota la matriu per -1 . La quantitat $i := \min\{s, r - s\}$ sí que és invariant per multiplicació per -1 .)

Classificació de les quàdriques de $\mathbb{P}^1$

r	$\min(s, r - s)$	Equació	Nom
2	0	$x_0^2 + x_1^2$	Buit (dos punts imaginaris)
2	1	$x_0^2 - x_1^2$	Parell de punts
1	0	x_0^2	Punt doble

Classificació de les còniques projectives

r	$\min(s, r - s)$	Equació	Nom
3	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	Buit (cònica pròpia imaginària)
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$	Cònica pròpia
2	0	$x_0^2 + x_1^2$	Punt (dues rectes imaginàries)
2	1	$x_0^2 - x_1^2$	Parell de rectes
1	0	x_0^2	Recta doble

Classificació de les quàdriques de $\mathbb{P}^3$

r	$\min(s, r - s)$	Equació	Nom
4	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	Buit (el·lipsoide imaginari)
4	1	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	El·lipsoide
4	2	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	Hiperboloide
3	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	Punt (con imaginari)
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$	Con
2	0	$x_0^2 + x_1^2$	Recta (dos plans imaginaris)
2	1	$x_0^2 - x_1^2$	Parell de plans
1	0	x_0^2	Pla doble

3 Classificació de les quàdriques afins

3.1 Envers una classificació de les quàdriques afins. Ara tornem al cas de la classificació de les quàdriques afins. Aquí la situació és més complicada, degut al fet que no podem transpo-conjugar amb qualsevol matriu, sinó només amb matrius afins. Això significa que no podem sempre obtenir la forma diagonal: hi haurà uns casos més.

Geomètricament, dins dels casos de la classificació projectiva, hem de distingir quàdriques per la seva relació amb l'hiperplà a l'infinit. Per exemple, paràbola i hipèrbola, que projectivament són equivalents, es distingeixen en la situació afí pel fet que la hipèrbola té dos punts a l'infinit mentre que la paràbola en té només un punt (doble).

Algebraicament, el que passa és que hem de analitzar el que passa en especial amb la coordenada x_0 , és a dir la primeria columna i la primera fila de la matriu.

Analitzem la situació: tenim una matriu simètrica

$$Q = \begin{bmatrix} C & B \\ B^\top & A \end{bmatrix}$$

i la volem transformar en transpo-conjugant amb matrius afins així:

$$\begin{bmatrix} 1 & v^\top \\ 0 & M^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & B \\ B^\top & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & M \end{bmatrix}$$

És fàcil veure que la part quadràtica A la podem transformar sense restriccions: de fet es fa amb matrius on $v = 0$, i això és el cas del teorema de Sylvester. Per tant hem trobat que Q és equivalent a una matriu de la forma

$$Q \sim \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & S \\ \hline \end{array}$$

on S és de la forma del teorema de Sylvester.

Geomètricament:

Les matrius A i S són les matrius de la intersecció de la quàdrica projectiva amb l'hiperplà a l'infinit.

En efecte, com que la equació de l'hiperplà a l'infinit és $x_0 = 0$, obtenir l'equació (en forma matricial) d'aquesta intersecció és només omitir la primera columna i la primera fila. La intersecció és de nou una quàdrica, ara de $\mathbb{P}^{n-1}$, excepte en el cas on la quàdrica original tenia $A = 0$: aquest cas és el cas on la quàdrica original contenia el pla a l'infinit. (Això és possible només per a quàdriques de rang 2 o 1.)

Recordeu que $r = \text{rang } Q$, i que tenim també l'índex $i = \min(s, r - s)$. Denotem per r_∞ el rang de la quàdrica a l'infinit. És precisament el rang de A (o de S). Denotem per i_∞ l'índex de A , és a dir $i_\infty = \min(s_\infty, r_\infty - s_\infty)$.

Ara hem arribat a tenir la matriu diagonal S en lloc de A . Ara podem fer servir cada entrada no nula de S com a pivot per a eliminar les entrades corresponents a B . Per exemple, si la primera entrada de S és 1, podem restar b_1 cops la segona fila de la primera fila. Aquesta operació consisteix en multiplicar per l'esquerra per una matriu elemental $E^\top$, on E es vé fàcilment ésser una matriu afí. Ara el producte

$$E^\top \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & S \\ \hline \end{array} E$$

elimina les dues entrades b_1 (simètricament). De la mateixa forma eliminem les r_∞ primeres entrades de B , on r_∞ és el rang de S , és a dir el nombre d'entrades no nul·les.

Si totes les entrades de B són zero, llavors ja tenim una forma diagonal, i hi ha dos subcasos, segon si la entrada C és zero o no.

Si hi ha alguna entrada de B (després de r_∞) no zero, podem suposar que $b_{r_\infty+1}$ és la primera. La podem fer servir com a pivot per eliminar (amb operacions de files i les mateixes operacions de columnes) les altres entrades no nules de B . Finalment, podem fer servir $b_{r_\infty+1}$ com a pivot per eliminar també C . (Atenció: la operació de files ha d'eliminar només la meitat de C , perquè la operació de columnes corresponent elimina després l'altra meitat.) En conclusió, si sobreviu alguna entrada de B , llavors és només una, i C mor també en aquest cas.

3.2 Classificació. En conclusió hi ha tres casos:

Tipus I: $B = 0$ i $C = 0$. Aquest cas es caracteritza pel fet que $r_\infty = r$ (i tenim també $i_\infty = i$).

Tipus II: $B = 0$ i $C \neq 0$. Aquest cas és caracteritza pel fet que $r_\infty = r - 1$. Aquí hi ha dues possibilitats per a i_∞ : o bé l'entrada $A = 1$ era del mateix signe que el signe més freqüent, o bé era del signe oposat. En el primer cas tenim doncs $i_\infty = i$, i en el segon cas tenim $i_\infty = i - 1$. El segon cas es diu "Tipus III" ca'n Reventós (2008).

Tipus IV: $b \neq 0$ ($b = b_{r_\infty+1}$ única entrada no zero fora de S). Aquest cas és caracteritza pel fet que $r_\infty = r - 2$. En efecte, com que hi ha dues entrades no-zeros fora de la matriu de la part quadràtica (la matriu de la intersecció amb l'infinit), clarament aquesta té rang dos a menys. Es pot verificar també que en aquest cas $i_\infty = i - 1$. Això és perquè la matriu menor $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ de les b és congruent a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (llevat un escalar), i per tant perdem un valor propi de cada signe quan passem de la matriu gran Q a la matriu petita A .

3.3 Teorema de classificació. *Tota quàdrica q és equivalent a exactament una de les quàdriques següents (que anomenem de forma canònica):*

$$\begin{aligned} I : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 \\ II + III : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 \\ IV : & \quad \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^r x_j^2 + 2x_{r+1} \end{aligned}$$

3.4 Invariants. Tenim les invariants projectius r i i . Similarment tenim r_∞ i i_∞ de la part quadràtica (o la part a l'infinit).

3.5 Proposició. Dues quàdriques reals són afíment equivalents si i només si tenen la mateixa quaterna d'invariants $(r, i, r_\infty, i_\infty)$.

Observem que dels quatre tipus, només són possibles els invariants $(r, i, r_\infty, i_\infty)$ de les formes següents:

I	(r, i, r, i)
II	$(r, i, r - 1, i)$
III	$(r, i, r - 1, i - 1)$
IV	$(r, i, r - 2, i - 1)$

Observem també que el tipus I no apareix per a quàdriques pròpies.

Classificació de les quàdriques reals de la recta afí

r	i	r_∞	i_∞	Tipus	Equació	Nom
2	0	1	0	II	$1 + x_1^2$	Buit (dos punts imaginaris)
2	1	1	0	III	$1 - x_1^2$	Parell de punts
2	1	0	0	IV	$2x_1$	Punt (altre punt a l'infinit)
1	0	1	0	I	x_1^2	Punt doble
1	0	0	0	II	1	Buit (punt doble a l'infinit)

Classificació de les còniques reals afins

r	i	r_∞	i_∞	Tipus	Equació	Nom
3	0	2	0	II	$1 + x_1^2 + x_2^2$	Buit (el·lipse imaginària)
3	1	2	1	II	$1 + x_1^2 - x_2^2$	Hipèrbola
3	1	2	0	III	$1 - x_1^2 - x_2^2$	El·lipse
3	1	1	0	IV	$x_1^2 + 2x_2$	Paràbola
2	0	2	0	I	$x_1^2 + x_2^2$	Punt (dues rectes imaginàries)
2	0	1	0	II	$1 + x_1^2$	Buit (rectes paral·leles imaginàries)
2	1	2	1	I	$x_1^2 - x_2^2$	Parell de rectes
2	1	1	0	III	$1 - x_1^2$	Parell de rectes paral·leles
2	1	0	0	IV	$2x_1$	Recta (altra recta a l'infinit)
1	0	1	0	I	x_1^2	Recta doble
1	0	0	0	II	1	Buit (recta dobla a l'infinit)

Classificació de les quàdriques reals de l'espai afí

r	i	r_∞	i_∞	Tipus	Equació	Nom
4	0	3	0	II	$1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	Buit (el·lipsoide imaginari)
4	1	3	1	II	$1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	Hiperboloide de dos fulls
4	1	3	0	III	$1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	El·lipsoide
4	1	2	0	IV	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$	Paraboloide el·líptic
4	2	3	1	III	$1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	Hiperboloide d'un full
4	2	2	1	IV	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$	Paraboloide hiperbòlic
3	0	3	0	I	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	Punt (con imaginari)
3	0	2	0	II	$1 + x_1^2 + x_2^2$	Buit (cilindre el·líptic imaginari)
3	1	3	1	I	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	Con
3	1	2	1	II	$1 + x_1^2 - x_2^2$	Cilindre hiperbòlic
3	1	2	0	III	$1 - x_1^2 - x_2^2$	Cilindre el·líptic
3	1	1	0	IV	$x_1^2 + 2x_2$	Cilindre parabòlic
2	0	2	0	I	$x_1^2 + x_2^2$	Recta (dos plans imaginaris)
2	0	1	0	II	$1 + x_1^2$	Buit (plans paral·lels imaginaris)
2	1	2	1	I	$x_1^2 - x_2^2$	Parell de plans
2	1	1	0	III	$1 - x_1^2$	Plans paral·lels
2	1	0	0	IV	$2x_1$	Pla (altre pla a l'infinit)
1	0	1	0	I	x_1^2	Pla doble
1	0	0	0	II	1	Buit (pla doble a l'infinit)