

Apunts de geometria euclidiana (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 15/12/2011

Continguts

1	Introducció a la geometria euclidiana	1
2	Repàs d'espais vectorials euclidians	4
3	Geometria euclidiana	10
4	Aplicacions ortogonals (d'un espai vectorial euclidià)	14
5	Moviments	21
6	Moviments del pla	25
7	Moviments de l'espai	30

1 Introducció a la geometria euclidiana

En aquesta lliçó comencem el segon tema de l'assignatura, el dels espais euclidians. És un tema nou, valen ara noves intuïcions. Per destacar aquest fet, dediquem tota aquesta lliçó a una introducció a la geometria euclidiana, subratllant les diferències de la geometria afí.

Exemple: al pla afí, dos triangles qualssevol són similars (en el sentit que hi ha una afinitat invertible que porta un en l'altre). Així, nocions de distància o angle no són conceptes invariants, no pertanyen a la geometria afí, i de fet en un espai afí abstracte ni tan sols té sentit parlar-ne.

1.1 Exemple. A $\mathbb{R}^3$, com definir la longitud (o el mòdul, o la norma) d'un vector? La fórmula

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

mostra que la podem definir usant el producte escalar.

Quan dos vectors són ortogonals? Resposta: el seu producte escalar és zero.

Més generalment, l'angle de dos vectors ve donat per la fórmula

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

Així, el concepte clau és PRODUCTE ESCALAR.

1.2 Noció geomètrica de distància. Si pensem els vectors com punts, llavors la discussió ens permet de definir distància entre l'origen i qualsevol altre punt. Però, volem una noció de distància entre qualssevol dos punts – i millor si no depèn d'una referència. La manera invariant d'associar un espai vectorial a un espai afí (no buit) $\mathbb{A}$ és $T(\mathbb{A})$. Així imposen l'estructura euclidiana a $T(\mathbb{A})$, no pas directament a $\mathbb{A}$.

Podem evitar la dependència de coordenades si desenvolupem la noció de producte escalar en espais vectorials abstractes (no pas només els $\mathbb{R}^n$).

De qualsevol manera, els vectors passen ara a ser més important que en la geometria afí. I conseqüentment, les coordenades cartesianes seran més importants que les coordenades afins (baricèntriques).

1.3 Espais vectorials amb producte escalar. En la propera lliçó farem un repàs dels espais vectorials euclidians. Aquí, molt breument (cinc minuts): un *producte escalar* en un espai vectorial (real) és una forma bilineal simètrica no degenerada positiva definida (les quals nocions definim ara) — propietats que assegurin que es comporta com el producte escalar habitual de $\mathbb{R}^n$.

BILINEALITAT:

$$\langle \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = \lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$$

i similarment en l'altra variable.

DEFINICIÓ DE NORMA:

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

DEFINICIÓ DE ORTOGONALITAT diem que $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són ortogonals quan

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

Més generalment podem introduir una noció d'angle com

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

Cauchy-Bunyakovski-Schwarz assegura que és un nombre entre -1 i 1 .

1.4 Espais afins euclidians. Per definició és un espai afí (no buit) $\mathbb{E}$ amb una estructura euclidiana en $T(\mathbb{E})$.

Ara suposem que $\mathbb{E}$ és un espai afí euclidià, és a dir un espai afí amb un producte escalar a $T(\mathbb{E})$.

DEFINICIÓ DE DISTÀNCIA: Definim la distància entre dos punts de $\mathbb{E}$ com

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Satisfà els axiomes d'una norma.

Per il·lustrar la força d'aquesta axiomàtica de distància, demostrem fàcilment el teorema de Pitàgores:

1.5 Teorema. *Si ABC és un triangle, rectangle en B , llavors*

$$d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2.$$

Demostració. La demostració utilitza exactament les quatre definicions de damunt:

$$\begin{aligned} d(A, C) &= \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\ &= d(A, B)^2 + d(B, C)^2. \end{aligned}$$

□

Altres coses que farem amb les nocions de distància i d'angle són calcular la noció de distància entre dues varietats lineals i perpendicular comuna.

1.6 Discussió de la diferència entre espai afí i espai euclidià. La distinció entre espai afí i espai euclidià és anàleg a la diferència entre espai vectorial i espai vectorial amb producte escalar:

espais euclidians	esp. vectorials amb $\langle -, - \rangle$
espais afins	espais vectorials

Atenció: tot espai afí es pot dotar d'una estructura d'espai vectorial, simplement escullint un origen. Però si no és natural no val res. Anàlogament, tot espai vectorial admet un producte escalar, però si no és natural, no val res...

1.7 Moviments. Les propietats que involucren distàncies o angles no es preserven per afinitats en general. Les afinitats que preserven distàncies i angles s'anomenen isometries, o bé moviments. Passen a ser les aplicacions rellevants.

Exemples: al pla tenim translacions, rotacions, reflexions (i combinacions de tals).

DIBUIXOS

algunes propietats de cadascuna

Exemples d'afinitats que no són moviments són les homotècies

A l'espai tenim per exemple rotacions, translacions, reflexions, i combinacions d'elles. Exemples, algunes propietats.

Atenció: “moviment” no significa “procés” o “trajecte”. És només l'estat inicial i l'estat final.

Discutim la diferència entre moviment propi i improp: Si un trajecte intermediari és possible entre l'estat inicial i l'estat final, és a dir una deformació entre el moviment identitat i el moviment en qüestió, diem que és un moviment propi. . .

Reflexió és l'exemple típic d'impropi. . .

Algebraicament, propi té $\det Df = 1$, improp té $\det Df = -1$.

2 Repàs d'espais vectorials euclidians

2.1 Exemple. L'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ té una estructura important que és el producte escalar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Volem imitar aquesta estructura en un espai vectorial abstracte, que notablement serà $T(\mathbb{A})$, l'espai de les translacions d'algun espai afí.

2.2 Formes bilineals i productes escalars. ([CL], XI.1; [R], A.2.1)

Forma *bilineal* (en un espai vectorial V) vol dir

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle \\ \langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

i hauríem de posar també linearitat en la segona variable, però això segueix de la simetria: *Simètrica* vol dir

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle.$$

No degenerada vol dir que per a cada $\vec{w}$ fixat, tenim $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Positiva definida vol dir $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ i igualtat ssi $\vec{v} = \vec{0}$.

Un *producte escalar* és una forma bilineal simètrica no-degenerada positiva definida.

2.3 Espai vectorial euclidià. ([CL], XI.2; [R], A.3.) És un espai vectorial dotat d'una forma bilineal simètrica no-degenerada positiva definida.

Exemple: $\mathbb{R}^n$

2.4 Coordinatització. Si $(E, \langle, \rangle)$ és un espai vectorial euclidià de dimensió n , llavors podem treure una base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ i escriure tot en coordenades. És a dir, establim una bijecció lineal amb $\mathbb{R}^n$. Ara definim una matriu

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} := \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle$$

Ara és una verificació directa que

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v}^\top A \vec{w}$$

on al costat dret els vectors són els vectors de coordenades.

Ara és directe verificar que el fet que $\langle, \rangle$ sigui simètric correspon exactament a A ser una matriu simètrica, i el fet que $\langle, \rangle$ sigui no-degenerada correspon exactament a la condició $\det A \neq 0$ (és a dir, A és una matriu no-singular). Finalment, la condició de ser $\langle, \rangle$ positiva definida també es pot expressar en termes de A : si per a $r = 1, \dots, n$ posem A_r la primera menor $r \times r$ de A (és a dir, que consisteix de les primeres r files i columnes), llavors tots els menors A_r són no-singulars. En particular, $A_n = A$ és no-singular, el que implica la no-degeneració de $\langle, \rangle$. Així establim que la condició *positiva definida* implica *no-degenerada*.

2.5 Norma. ([CL], XI.3.)

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Propietats de la norma:

$$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

$$\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

L'última és la desigualtat triangular, que tractem més acuradament.

2.6 Ortogonalitat. Diem que dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són *ortogonals* quan $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

El lema següent és una trivialitat, però és important:

2.7 Lema.

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Demostració. No és res més que aplicar la definició de la norma i fer servir bilinealitat:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

□

Té dos corol·laris importants:

2.8 Teorema. (Pitàgores.) *Se $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són ortogonals, llavors*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

□

2.9 Proposició. *Si una norma ve d'un producte escalar, llavors el producte escalar es pot reconstruir a partir de la norma:*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2}{2} \quad (1) \quad \boxed{\text{prik-fra-norm}}$$

□

La desigualtat triangular és un aspecte fonamental dels espais mètrics; té un contingut molt geomètric. La desigualtat triangular es dedueix de la desigualtat de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz, que també és útil en varis contextos.

2.10 Desigualtat de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz. (Versió “quadrat”.) ([CL], XI.3.1; [R], A.3.6.)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2.$$

Demostració. Podem suposar que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Posem

$$\vec{w} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} \quad \text{i} \quad \vec{h} := \vec{u} - \vec{w}.$$

(Geomètricament $\vec{w}$ és la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.) Per construcció, $\vec{w}$ i $\vec{h}$ són ortogonals (es verifica directament). Podem aplicar Pitàgores:

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{h}\|^2.$$

Omitint $\|\vec{h}\|^2$, obtenim

$$\|\vec{u}\|^2 \geq \|\vec{w}\|^2 = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right)^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

i per tant

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.$$

□

2.11 Desigualtat triangular. ([R], A.3.8.)

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

Demostració. Calculem, fent servir primer Pitàgores generalitzat, després el CBS anterior,

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \\ &= (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2 \end{aligned}$$

Com que tots aquest nombres són no-negatius, arribem a la conclusió prenent l'arrel. □

Necessitem d'unes versions “estRICTES” de les desigualtats de CBS i del triangle, determinant en quines condicions tenim igualtat.

2.12 Desigualtat de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz estricta. (Versió “quadrat”.)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

amb igualtat si i només si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment dependents.

Demostració. La desigualtat ja la tenim provada. En la prova veiem que la igualtat succeeix ssi $\|\vec{h}\|^2 = 0$, és a dir quan $\vec{h} = \vec{0}$, és a dir quan $\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$. En aquest cas $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents. A l'inrevés, si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, llavors necessàriament $\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$. $\square$

2.13 Desigualtat de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz estricta. (Versió més refinada respecte a la part estricta.)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

amb igualtat si i només si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment dependents i $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \geq 0$.

Demostració. La desigualtat és clara. Suposem que tenim igualtat. Llavors clarament, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0$. Si prenem el quadrat d'ambdós costats obtenim la igualtat estricta de la versió anterior del CBS, i concloem que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents. Suposem ara que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents i que tenim $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0$. Llavors la versió dels quadrats ens diu que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. Com que a més tenim $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0$ podem prendre arrel per a obtenir $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. $\square$

Conseqüència important:

2.14 Desigualtat triangular estricta.

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

amb igualtat si i només si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment dependents i $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \geq 0$.

FIGURES

Demostració. La part estricta segueix directament de la part estricta del CBS anterior. $\square$

La part *estricta* és important perquè mostra que podem detectar colinearitat amb la norma. Serà un punt clau en establir (en la lliçó 5) que tota isometria és afí.

2.15 Noció d'angle.

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) := \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

2.16 Vectors unitaris, ortogonalitat, base ortonormal. ([CL], XI.2; [R], A.3.8.)

Definició de vector *unitari* $\|\vec{u}\| = 1$

Definició d'*ortogonal*: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

Definició de base ortonormal: $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ és un *conjunt ortonormal* si $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$, i $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ i $i \neq j$.

2.17 Lema. ([R], A.3.9.) *Un conjunt ortonormal és linealment independent.*

Demostració. Suposem $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$. Volem veure que $\lambda_i = 0$. Ara per a qualsevol j fixat:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \vec{0}, \vec{v}_j \rangle &= \langle \sum \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \\ &= \lambda_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle \end{aligned}$$

i per tant, com que $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle \neq 0$, concloem que $\lambda_j = 0$. □

Observeu que per que un conjunt sigui ortonormal és suficient que els seus elements siguin dos a dos ortonormals. Això és en contrast interessant amb la noció d'independència lineal: per que un conjunt sigui linealment independent *no* és suficient que els elements siguin dos a dos independents!

2.18 El procés de Gram-Schmidt. ([CL], XI.2.1; [R], A.3.10.)

2.19 Subespai ortogonal. ([CL], XI.5; [R], A.5.) Per a $W \leq E$ posem

$$W^\perp := \{ \vec{u} \in E \mid \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W \}$$

És un subespai vectorial. Tenim $W \oplus W^\perp = E$. En particular, $\dim E = \dim W + \dim W^\perp$. (La prova fa servir Gram-Schmidt.)

$$W \leq V \Rightarrow V^\perp \leq W^\perp.$$

Descomposició ortogonal d'un espai.

2.20 Proposició. (Cf. [B], 8.1.5; [CL], XII.1.1; [R], A.6.4.) *Per a una aplicació $\phi : V \rightarrow W$ entre espais vectorials euclidians els següents són equivalents.*

1. ϕ és una aplicació lineal i preserva la norma.
2. ϕ preserva el producte escalar.

Demostració. Suposem que ϕ preserva el producte escalar. Llavors és evident que preserva també la norma. Per veure linearitat, hem de mostrar $\phi(\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\vec{v}) + \phi(\vec{w})$, i també $\phi(\lambda \vec{v}) = \lambda \phi(\vec{v})$. Fem el primer cas: mostrem que $\phi(\vec{v} + \vec{w}) - \phi(\vec{v}) - \phi(\vec{w}) = \vec{0}$, i la idea és calcular la norma (o més exactament el seu producte escalar amb ell mateix) i veure que és zero, Expansió total, llavors tots els termes són de tipus $\langle \phi(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \rangle$ i podem remoure ϕ , i després fer des-expansió. Dóna zero. Similarment amb multiplicació amb escalars.

Si ϕ és lineal i preserva la norma, llavors pel fet que el producte escalar es pot recuperar de la norma (1) mostra que ha de preservar el producte escalar també. □

Una aplicació que satisfà les condicions de la proposició es diu *isometria lineal*.

El prefix “iso” en matemàtica hauria d’indicar sempre alguna cosa reversible. Segons la definició (que és estàndard) un isometria no és necessàriament invertible. Però el lema següent mostra que és sempre injectiva, i per tant induïx una isometria invertible sobre la seva imatge. En breu considerem només isometries d’un espai a ell mateix, i llavors sí una isometria és automàticament invertible, i no hi ha conflicte de terminologia.

2.21 Lema. *Un isometria entre espais vectorials euclidians és injectiva.*

Demostració. Preserva vectors ortogonals, i no envia ningú vector a zero. Així la imatge d’una base ortonormal de nou té la propietat d’un conjunt ortonormal (però és clar que no tenim garantia que genera l’espai). $\square$

3 Geometria euclidiana

3.1 Espais afins euclidians. Per definició un *espai afí euclidià* és un espai afí $\mathbb{E}$ amb una estructura euclidiana a $T(\mathbb{E})$.

3.2 Mètrica euclidiana.

$$d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$$

En particular tenim, evidentment:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow d(P, Q) = d(R, S).$$

3.3 Compatibilitat amb la noció rudimentària de distància afí.

$$Q = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad t \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\|\overrightarrow{P_0Q}\| = t \|\overrightarrow{P_0P_1}\|$$

3.4 Desigualtat triangular estricta.

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$$

amb igualtat si i només si $Q \in [P, R]$.

FIGURES

La part estricta té una conseqüència important:

3.5 Proposició. *Si una aplicació $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ entre espais afins euclidians preserva la mètrica (i.e. és isometria), llavors és una aplicació afí.*

Demostració. Preserva punts colineats: perquè colineat es pot expressar en termes de la desigualtat triangular estricta. Hem de veure que preserva també la raó simple, que ja hem fet. $\square$

De contrari, clarament, una aplicació afí que preserva el producte escalar, també preserva la norma. En conclusió:

3.6 Teorema. *Una aplicació $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ entre espais afins euclidians preserva la mètrica si i només si preserva l'estructura afí i euclidiana.* $\square$

Com que l'estructura mètrica inherentment concerneix els vectors — l'espai de les translacions — és natural que ara les coordenades cartesianes passen a ser més importants que les coordenades afins (baricèntriques).

Distància i perpendicular comuna

3.7 Distància entre dues subvarietats. Siguin $\mathbb{L}_0$ i $\mathbb{L}_1$ dues subvarietats lineals d'un espai euclidià. Definim la *distància* entre elles com

$$d(\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1) := \min_{X_0 \in \mathbb{L}_0, X_1 \in \mathbb{L}_1} d(X_0, X_1),$$

la mínima de totes les distàncies possibles entre un punt de $\mathbb{L}_0$ i un punt de $\mathbb{L}_1$.

Veiem ara que aquest mínim realment existeix i determinem els punts on és realitzat.

Escrivim les subvarietats en termes de direccions:

$$\mathbb{L}_0 = P_0 + W_0 \qquad \mathbb{L}_1 = P_1 + W_1,$$

i posem $W := W_0 + W_1$, la suma de les dues direccions. Descomponem l'espai ambient com $T(\mathbb{E}) = W \oplus W^\perp$, i descomponem

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{w} + \vec{n} \quad \text{amb } \vec{w} \in W, \vec{n} \in W^\perp.$$

3.8 Proposició. *Tenim $d(\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1) = \|\vec{n}\|$.*

Demostració. Calculem el mínim $\min_{X_0 \in \mathbb{L}_0, X_1 \in \mathbb{L}_1} d(X_0, X_1)$. Si escrivim $X_0 = P_0 + \vec{w}_0$ i $X_1 = P_1 + \vec{w}_1$, tenim

$$\begin{aligned} d(X_0, X_1) &= d(P_0 + \vec{w}_0, P_1 + \vec{w}_1) \\ &= \|\overrightarrow{P_0 P_1} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0\| \\ &= \|\vec{w} + \vec{n} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0\| \\ &= \|(\vec{w} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0) + \vec{n}\|. \end{aligned}$$

Com que $(\vec{w} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0) \in W$ i $\vec{n} \in W^\perp$, per Pitàgores tenim

$$= \sqrt{\|\vec{w} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0\|^2 + \|\vec{n}\|^2}$$

Entre tots els possibles $\vec{w}_0$ i $\vec{w}_1$, clarament el mínim de l'expressió $\sqrt{\|\vec{w} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0\|^2 + \|\vec{n}\|^2}$ s'obté quan $\vec{w} + \vec{w}_1 - \vec{w}_0$ és nul, és a dir quan $\vec{w}_1 - \vec{w}_0 = \vec{w}$. Això és possible perquè amb $\vec{w}_0 \in W_0$ i $\vec{w}_1 \in W_1$ es pot obtenir qualsevol $\vec{w} \in W = W_0 + W_1$. En aquest cas el resultat és

$$= \sqrt{\|\vec{n}\|^2} = \|\vec{n}\|,$$

com afirmat. □

L'argument diu també entre quins punts s'obté el mínim: s'obté a

$$X_0 = P_0 + \vec{w}_0 \quad X_1 = P_1 + \vec{w}_1$$

amb

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \vec{w}_0 + \vec{n} - \vec{w}_1, \quad \vec{w}_0 \in W_0, \vec{w}_1 \in W_1, \vec{n} \in (W_0 + W_1)^\perp.$$

3.9 Càlculs. La norma del vector $\vec{n}$ de la construcció és pot calcular així: sigui $\vec{u}$ un vector normal a $W_0 + W_1$ i a més unitari. Llavors

$$d(\mathbb{L}_0, \mathbb{L}_1) = |\langle \overrightarrow{P_0 P_1}, \vec{u} \rangle|.$$

3.10 Cas particular: distància d'un punt a un hiperplà. Passem a tractar del cas particular de distància d'un punt a un hiperplà. Primer analitzem una mica la noció d'hiperplà.

Sigui $H \subset \mathbb{E}$ un hiperplà. Sigui P un punt de H , i W la direcció de H , de manera que podem escriure $H = P + W$. Sigui $\vec{u}$ un vector normal unitari de W . Llavors podem escriure també

$$\begin{aligned} H &= \{P + \vec{w} \mid \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0\} \\ &= \{X \mid \langle \overrightarrow{P X}, \vec{u} \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

La condició sobre X la podem interpretar com una aplicació afí $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$: Definim

$$\begin{aligned} f : \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \langle \overrightarrow{PX}, \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

Afirmem que f és una aplicació afí i que $f^{-1}(0) = H$. És una verificació directe: verifiquem que preserva combinacions afins, de tipus $P + \sum \lambda_i \vec{v}_i$:

$$\begin{aligned} F(P + \sum \lambda_i \vec{v}_i) &= \overrightarrow{\langle P(P + \sum \lambda_i \vec{v}_i), \vec{u} \rangle} \\ &= \langle \sum \lambda_i \vec{v}_i, \vec{u} \rangle \\ &= \sum \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle \\ &= \sum \lambda_i f(P + \vec{v}_i). \end{aligned}$$

És clar que $f^{-1}(0) = H$.

Ara podem calcular fàcilment la distància d'un punt X a H :

$$d(X, H) = |f(X)|.$$

En efecte, ja sabem que $d(X, H) = |\langle \overrightarrow{PX}, \vec{u} \rangle|$.

3.11 Exemple. Observeu que la funcional afí que defineix un hiperplà no és única: si la multipliquem per un escalar $\neq 0$ defineix el mateix hiperplà. Per tant no tota funcional afí definidora serveix com la que vam definir en l'apartat anterior.

Per exemple, a vegades ja tenim H definit, en alguna referència, mitjançant una equació

$$H = \{X \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0\}.$$

Aquí, si posem $f(X) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$ tenim un exemple d'una funcional afí que defineix H . En aquest cas el vector $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ és ortogonal a H , i podem normalitzar-lo dividint entre $r := \|\vec{a}\|$:

$$\vec{u} := \vec{a}/r.$$

Observeu que $Df(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle$.

La distància que volem calcular és

$$|\langle \overrightarrow{PX}, \vec{u} \rangle| = \frac{|\langle \overrightarrow{PX}, \vec{a} \rangle|}{r} = \frac{Df(\overrightarrow{PX})}{r} = \frac{|f(X) - f(P)|}{r} = |f(X)/r|.$$

En altres paraules, si fem servir f/r al lloc del f original, la distància de X a H és exactament el valor de f/r en X .

3.12 Cas particular: distància entre dues rectes a l'espai. ...

Triangles

[<http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle>]

3.13 Altures i ortocentre. Les tres altures d'un triangle són concurrents. Aquest punt es diu *ortocentre* del triangle.

3.14 Mediatris i circumcentre. Les tres mediatris d'un triangle són concurrents. Aquest punt és diu *circumcentre* del triangle. És el centre de l'únic cercle que passa pels vèrtexs del triangle.

3.15 Bisectrius i incentre. Les tres bisectrius d'un triangle són concurrents. Aquest punt és diu *incentre* del triangle. És el centre de l'únic cercle inscrit al triangle, és a dir que és tangent als tres costats.

3.16 Recta de Euler?

4 Aplicacions ortogonals (d'un espai vectorial euclidià)

Sigui $\phi : V \rightarrow V$ una isometria, és a dir una aplicació lineal euclidiana. És a dir, per a tot parell de vectors $\vec{v}, \vec{w}$ tenim

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \phi \vec{v}, \phi \vec{w} \rangle.$$

4.1 Lema. ([CL], XII.1.4) ϕ és isometria $\Leftrightarrow$ en qualsevol base ortonormal, la matriu A de ϕ té la propietat

$$A^\top A = I.$$

Demostració. Sabem que les columnes de A són les imatges dels elements de la base. Similarment, les files de $A^\top$ són les imatges dels elements de la base. Ara si calculem el

producte matricial $A^\top A$, la seva ij entrada és exactament

$$\langle \phi(\vec{e}_i), \phi(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

els quals nombres són exactament les entrades de la matriu identitat. $\square$

Matrius que satisfan aquesta condició es diuen *ortogonals*. Isometries d'un espai vectorial euclidià també es diuen *aplicacions ortogonals*.

La paraula “ortogonal” és tan bé establerta que sembla impossible canviar-la — però lògicament, hauria clarament de dir-se “ortonormal” perquè preserva no només la perpendicularitat com també unitaritat.

4.2 Lema. *Una aplicació ortogonal és sempre invertible.*

Segueix que les aplicacions ortogonals de E formen un grup, que es denota $O(E)$. El grup de les matrius ortogonals de dimensió n es denota també $O(n)$, i aquest grup es diu el *grup ortogonal*.

4.3 Lema. (*[CL], XII.1.2; [R], A.6.3.*)

Per a una aplicació ortogonal, els valors propis són sempre ± 1 . A més, vectors propis associats a valors propis diferents són ortogonals.

Observeu també que $\det A = \pm 1$.

Reflexions

Sigui E un espai vectorial euclidià. Si tenim una descomposició $E = V \oplus W$, llavors podem definir la reflexió per V en la direcció W :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ \vec{x} = \vec{v} + \vec{w} &\longmapsto \vec{v} - \vec{w} \end{aligned}$$

DIBUIX

Aquesta aplicació és lineal, però no isometria en general:

4.4 Lema. *La reflexió per V en la direcció W és isometria ssi $V \perp W$.*

Càlcul directe amb el producte escalar.

Així, per qualsevol subespai vectorial $M \leq E$, podem definir la reflexió per M com

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ \vec{m} + \vec{w} &\longmapsto \vec{m} - \vec{w} \quad \text{on } w \in M^\perp \end{aligned}$$

És una isometria.

4.5 Reflexió en un hiperplà. Fórmula explícita si $M = H$ és un hiperplà: sigui $\vec{n}$ un vector normal a H . Llavors

$$\begin{aligned} \rho_H : E &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n} \end{aligned}$$

(El factor $\frac{\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}$ és el “coeficient de $\vec{x}$ respecte a $\vec{n}$ ”)

4.6 Lema. *Bisector de dos vectors. Siguin $\vec{x}, \vec{y}$ dos vectors amb $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$. Llavors existeix un hiperplà H tal que $\rho_H(\vec{x}) = \vec{y}$. Si $\vec{x} \neq \vec{y}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$, llavors H és únic.*

Demostració. $H = (\vec{x} - \vec{y})^\perp$. □

4.7 Teorema. (Cartan-Dieudonné) [B] 8.2.12. *Tot $f \in O(n)$ es pot escriure com producte de com a molt n reflexions en hiperplans.*

Demostració. Si $n = 0$, és clar que tenim només la identitat, que és un producte de 0 reflexions. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ és un punt fix per a f , llavors $H := \vec{x}^\perp$ és un hiperplà invariant. Per inducció $f|_H$ es pot escriure com producte de reflexions. Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ no és un punt fix sigui $H := (\vec{x} - f(\vec{x}))^\perp$. Llavors $f = f \circ \rho_H \circ \rho_H$, i $f \circ \rho_H$ té $\vec{x}$ com a punt fix. □

4.8 Corol·lari. *Si $\dim E = 1$, tenim només dues isometries possibles: la identitat, i la reflexió en $\vec{0}$.*

4.9 Corol·lari. *Al pla, tota isometria lineal és o bé una reflexió en una recta, o bé una composició de dues tals reflexions (aquest cas inclou la identitat).*

Descripció de $O(n)$ en general

([CL], XII.3; [R], A.7.8.)

4.10 Teorema. *Si $A \in O(n)$. Llavors tenim una descomposició*

$$E = E_1 \oplus E_{-1} \oplus F$$

on E_1 és l'espai propi de valor propi 1, on E_{-1} és l'espai propi de valor propi -1 , i on F descompon en espais invariants

$$F = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

on cada W_i té dimensió 2, i la restricció de A a W_i és una rotació.

El polinomi característic de la matriu, com que té coeficients reals, descompon en factors de tipus $(t - 1)$ (per a E_1), $(t + 1)$ (per a E_{-1}) i $(t - \omega_i)(t - \bar{\omega}_i)$ (per a cada W_i). La restricció de f a cada W_i té determinant 1, i com que no té vectors propis, ha de ser una rotació.

El altres paraules, existeix una base ortonormal tal que respecte a aquesta base, la matriu de f té la forma

$$\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \boxed{-I} & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Veurem que les A_i són de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4.11 Dimensió 2. ([CL], XI.4; [R], A.8.1.)

4.12 Dimensió 3. ([CL], XII.6; [R], A.8.2.) Existeix doncs una base ortonormal tal que la matriu de f és de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Descripció de $O(2)$

([CL], XII.4.)

En aquest apartat analitzem les aplicacions ortogonals d'un espai vectorial euclidià E de dimensió 2. Si fixem una base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, llavors sabem que les aplicacions ortogonals són donades per matrius A amb $A^\top A = I$, i que tals matrius tenen necessàriament determinant ± 1 . De fet

$$\det : O(2) \longrightarrow \pm 1$$

és homomorfisme de grups. El nucli, és a dir, l'anti-imatge de 1, es denota $SO(2)$: és el subgrup de les matrius ortogonals 2×2 amb determinant 1. Les analitzem primerament.

4.13 $SO(2)$. Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, llavors com que $\det A = 1$, trobem fàcilment $a = d$ i $c = -b$. Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

amb $a^2 + b^2 = 1$.

4.14 Lema. $SO(2)$ és abelià.

Demostració. Càlcul directe. □

Sigui $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ un vector unitari qualsevol, i posem $\vec{v}' = f(\vec{v}) =: \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$. Llavors un càlcul directe mostra que

$$\langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 = a.$$

i també

$$v_1 v v'_2 - v'_1 v_2 = \pm b.$$

Per tant, a no depèn de la base ortogonal. I b tampoc, llevat un signe.

4.15 Lema. Donats dos vectors unitaris $\vec{u}$ i $\vec{u}'$ de E , existeix un únic $f \in SO(2)$ tal que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$.

En particular, si f té un vector fix $\vec{u} \neq \vec{0}$, llavors $f = \text{Id}$.

[Conclusió: el “cercle”, és a dir el conjunt de vectors unitaris de E és un torsor per $SO(2)$.]

Això implica que podem *definir* angles entre dos vectors (unitaris) com l'únic $f \in SO(2)$ que lleva u en l'altre. Es pot construir tota la teoria d'angles a partir de $SO(2)$, definint

$$\cos(\theta) = a \quad \sin(\theta) = b$$

Observeu que sinus està ben definit només llevat un signe. Per fixar aquest signe s'ha de introduir una orientació.

Ara podem deduir fórmules clàssiques de les funcions trigonomètriques: l'angle $\alpha + \beta$ correspon a fer un gir d'angle α i després d'angle β . Així

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

d'on les fórmules familiars

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned} \tag{2}$$

4.16 Reflexions. Estudiem ara les $f \in O(2)$ amb $\det f = -1$. Tenim en particular la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qualsevol altra s'obté d'aquesta multiplicant amb una (única) matriu de $SO(2)$. Així serà de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

amb $a^2 + b^2 = 1$. (Observem que $A^2 = I$. Per tant és una reflexió.)

La paraula "simetria" és també comú: no és aconsellable perquè en matemàtica contemporània simetria és un concepte més general: per exemple diem que un conjunt de tres elements té una simetria d'ordre tres, per tant no és una reflexió. De fet, rotacions són vistes també com simetries.

Els espais propis són

$$E_1 = \text{span} \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \text{span} \begin{pmatrix} -b \\ 1+a \end{pmatrix}$$

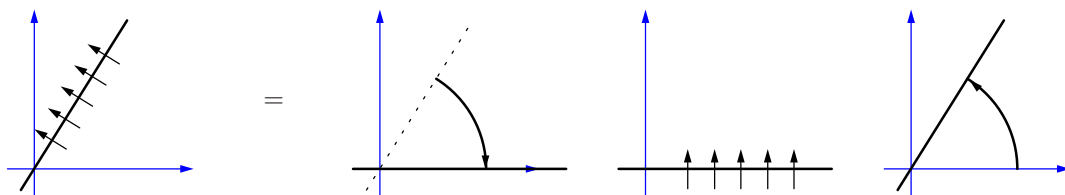
(Observem que aquests dos subespais són ortogonals, per tant és una reflexió ortogonal.)

Més interessantment, podem obtenir totes les reflexions *conjugant-les* amb rotacions: la reflexió amb eix d'angle θ s'obté com

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

fent servir les fórmules trigonomètriques (2).

Vol dir: reflexió en l'eix d'angle θ s'obté: primer fent un gir de $-\theta$, després reflexió en l'eix d'angle 0 (l'abscissa), i finalment un gir d'angle θ . És a dir: reculem l'eix a la posició "estàndard" on ara fem una reflexió, i finalment retornem l'eix a la posició original.



4.17 Equivalència. Diem que dues isometries ϕ, ψ d'un espai vectorial euclidià E són *equivalents* si existeixen una isometria σ tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ E & \xrightarrow{\psi} & E \end{array}$$

commuta. (És la definició evident, només fem servir el terme “equivalència” al lloc de similaritud. La raó és que “similaritud” ja té una significat al context de geometria euclidiana: clàssicament són afinitats (o aplicacions lineals) que preserven angles, però no necessàriament distàncies. Com per exemple homotècies.)

4.18 Lema. *Qualsevol isometria $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és equivalent a la seva inversa.*

Demostració. Si ϕ és una reflexió, llavors és igual a la seva inversa, i per tant equivalent. Si $\phi \in SO(2)$, llavors en alguna base ortonormal és de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

i llavors un càlcul directe mostra que conjuguar amb $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dóna la inversa de ϕ , a

$$\text{saber } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \quad \square$$

4.19 Lema. *Dues reflexions qualssevol a $\mathbb{R}^2$ són equivalents.*

Demostració. L'argument de damunt ja mostra que són totes equivalents a la reflexió en l'abscissa. $\square$

4.20 Lema. *Dues rotacions a $\mathbb{R}^2$ són equivalents si i només si són d'angles oposats.*

Demostració. Ja sabem que conjuguar una rotació per una reflexió dona la rotació amb angles oposats. Per commutativitat, conjuguar per una rotació no fa res. No hi ha altres opcions. $\square$

4.21 Teorema. ([R], A.9.3.) *Dues aplicacions ortogonals són equivalents si i només si tenen el mateix polinomi característic.*

5 Moviments

sec:isom

5.1 Moviments. Un *moviment* és una afinitat $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ d'un espai afí euclidià $\mathbb{E}$ que preserva la mètrica euclidiana:

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

orto-dif

5.2 Lema. *Una afinitat és un moviment si i només si la seva diferencial és una aplicació ortogonal.*

5.3 Lema. *La composició de dos moviments és un moviment. L'aplicació identitat és un moviment. Tot moviment és invertible; la inversa d'un moviment és un moviment. Així, els moviments de $\mathbb{E}$ formen un grup.*

Demostració. L'única cosa no evident és potser que tot moviment és invertible. Però sabem que una afinitat és invertible si i només si la seva diferencial és invertible, i sabem que una aplicació lineal ortogonal és invertible. $\square$

5.4 Reflexions. ... quan diem “reflexió”, sempre volem dir “reflexió ortogonal”...

5.5 Moviments propis v. impropis. La noció de moviment habitual involucra el temps: per exemple si parlem d'un moviment d'un cotxe de Sant Boi a Martorell pensem de tot un procés en el temps, on la posició inicial del cotxe és a Sant Boi i la posició final a Martorell, i que al temps intermediari el cotxe se situa en alguna posició intermediària. La idea intuïtiva d'isometria ens diu, potser, que el cotxe té les mateixes mides, no només a Sant Boi i a Martorell, si no també en qualsevol instant del trajecte entre aquestes dues posicions.

És important observar que quan parlem de moviment en termes geomètrics, al contrari, parlem només de posició inicial i terminal, no hi ha necessàriament procés intermediari. Considereu per exemple una reflexió: entre un triangle al pla i la seva reflexió en una

recta no hi ha un trajecte de triangles al pla: si intentem fer un trajecte descobrim que al passar pel mirall, el triangle ha de col·lapsar, i en particular no és més isomètric al triangle original.

Aquesta distinció és important: podem dividir els moviments en dos grups: els moviments *propis* i els *impropis*. Els primers són els que es poden realitzar en un trajecte. Els altres són els que d'alguna manera involucren una reflexió. Formalment, aquesta classificació és claríssima: els primers són els moviments f tals que Df té determinant 1, i els segons són els moviments f tals que Df té determinant -1 .

La composició de dos moviments propis és propi. La composició de propi amb impropí és impropí, com tampoc no és difícil comprendre. Més subtil és el fet que la composició de dos moviments impropis és un moviment propi! Així si passem per un mirall, i després per altre mirall, hauria de existir un trajecte que eviti qualsevol mirall! Pot ser que no sigui evident, però ja vam veure els principis d'aquest fenomen a la lliçó de les aplicacions ortogonals.

5.6 Moviments en coordenades. Escollim una referència ortonormal de $\mathbb{E}$. Vol dir un punt O i una base ortonormal $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ de $T(\mathbb{E})$. Llavors l'expressió de $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$$

on $A \in O(n)$ és la matriu de la diferencial de f , i b és el vector de coordenades de $f(O)$.

5.7 Translacions. Ja sabem que són els moviments amb diferencial trivial. Com que la identitat és ortogonal, són moviments propis. En coordenades són els que tenen $A = I$.

5.8 Lema. *Per un punt O fixat, tot moviment s'escriu de manera única com composició d'un moviment que fixi O , i una translació.*

Ja ho vam veure al cas afí. Que funciona també al cas euclidià és una conseqüència immediata del lema 5.2

5.9 Moviments de la recta

Component de lliscament — teorema estructural

To moviment és pot descomposar en un moviment amb punt fix i una translació. Això és clar de la descripció matricial en alguna base, i a més el punt fix és l'origen de la base, i

així la primera part de la descomposició és bàsicament la diferencial, és a dir una aplicació ortogonal.

Però aquesta descomposició es pot fer de moltes maneres diferents, dependent de l'escull de base. Per exemple, al pla, una rotació seguida per una translació és en realitat una altra rotació, com ho veurem tot seguit. Per tant podríem fer una descomposició millor, on la segona part és trivial. En general, si el moviment té un punt fix, és sempre un avantatge escullir un punt fix com a origen de la referència. Així, la part transladora es queda trivial, ho que facilita molt els càlculs.

En general es pot preguntar: quina és el mínim component translador d'un moviment? La resposta és *el vector de lliscament* que ara introduïm.

Sigui $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un moviment. Posem

$$E_1 := \text{Ker}(Df - \text{Id}) \subset T(\mathbb{E}).$$

És l'espai propi de Df de valor propi 1.

5.10 Observació. La igualtat

$$\text{Im}(Df - \text{Id}) = \text{Ker}(Df - \text{Id})^\perp$$

es pot demostrar directament per un càlcul fàcil: Vegeu Obs. 6.6.3 de [Reventós].

Sigui $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un moviment. Per un punt P arbitrari, posem $P' := f(P)$ i fem la descomposició

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{u} + \vec{v}$$

amb $\vec{u} \in E_1$ i $\vec{v} \in E_1^\perp = \text{Im}(Df - \text{Id})$.

5.11 Lema. *El vector $\vec{u}$ de la descomposició anterior no depèn de P . Lo denotem $\vec{u}_f$ i l'anomenem vector de lliscament de f .*

Demostració. Agafem un altre punt Q , i posem $Q' := f(Q)$. Calculem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QQ'} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} \\ &= \overrightarrow{QP} + \vec{u} + \vec{v} + Df(\overrightarrow{PQ}) \\ &= \vec{u} + \vec{v} + (Df(\overrightarrow{PQ}) - \overrightarrow{PQ}) \end{aligned}$$

però l'últim parèntesi pertany a $\text{Im}(Df - \text{Id}) = K^\perp$, doncs el component $\vec{u}$ és el mateix que abans. $\square$

5.12 Teorema. *Tot moviment $f : X \rightarrow X$ factoritza com*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{f} & \mathbb{A} \\ & \searrow g & \nearrow \vec{u}_f \\ & \mathbb{A} & \end{array}$$

on $\vec{u}_f \in \text{Ker}(Df - \text{Id})$ és el vector de lliscament, $g := (\vec{u}_f)^{-1} \circ f$. A més, $G := \text{Fix}(g)$ és no-buit i tenim $T(G) = \text{Ker}(Df - \text{Id})$. Finalment, aquesta factorització és única amb aquesta propietat.

Demostració. Com en la demostració anterior, agafem un P arbitrari i posem $P' := f(P)$. Escrivim

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{u} + \vec{v},$$

i com que $\vec{v} \in K^\perp = \text{Im}(Df - \text{Id})$ l'escrivim $\vec{v} = Df(\vec{w}) - \vec{w}$ per algun vector $\vec{w} \in T(X)$. Afirmem que $Q := P - \vec{w}$ és un punt fix per a g . És un càlcul directe: volem veure que $g(Q) = f(Q) - \vec{u} = Q' - \vec{u} = Q$. És a dir, volem veure que $\overrightarrow{QQ'} = \vec{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QQ'} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} \\ &= \overrightarrow{QP} + \vec{u} + \vec{v} + Df(\overrightarrow{PQ}) \\ &= \vec{u} + \vec{v} + (Df(\overrightarrow{PQ}) - \overrightarrow{PQ}) \\ &= \vec{u} + \vec{v} - (Df(\vec{w}) - \vec{w}) \\ &= \vec{u} + \vec{v} - \vec{v} \\ &= \vec{u} \end{aligned}$$

Igualment verifiquem que per tot $\vec{k} \in K$ el punt $Q + \vec{k}$ és un punt fix també:

$$\begin{aligned} g(Q + \vec{k}) &= g(Q) + Dg(\vec{k}) \\ &= Q + Df(\vec{k}) \\ &= Q + \vec{k}. \end{aligned}$$

(Falta veure que altres punts no són punts fixos. . .)

□

5.13 Casos extrems. Si f ja té un punt fix P , llavors $\vec{u}_f = \overrightarrow{PP'} = \vec{0}$. Per tant, $g = f$ i $\text{Fix}(f) = P + K$ (on $K = \text{Ker}(Df - \text{Id})$). De contrari, si f és un translació, llavors clarament $g = \text{Id}$.

Classificació dels moviments

Diem que dos moviments f i g d'un espai afí euclidià $\mathbb{E}$ són *equivalents* si existeixen un moviment σ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{f} & \mathbb{A} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{g} & \mathbb{A} \end{array}$$

commuta.

La paraula “equivalent” no és ideal. Potser millor *congruència*. La paraula “similitud” és infeliç perquè ja té una significat al context de geometria euclidiana des de Clifford: clàssicament són afinitats (o aplicacions lineal) que preserven angles, però preserven distàncies només llevat un factor constant. És a dir, isometries amb homotècies. Congruència és un terme gaire arcaic de “isometria” (Weyl?) Em sembla natural reutilitzar el terme per a “equivalència isomètrica entre isometries”... De l'altra banda, en àlgebra de matrius, congruència a vegades significa equivalència de matrius simètriques definint formes bilineals en bases diferents.

Si interpretem σ com un canvi de coordenades, llavors podem afirmar directament que f i g són equivalents si les equacions de f respecte a un base ortonormal coincideixin amb les equacions de g en algun altra base.

5.14 Lema. *Dues translacions $T_{\vec{v}}$ i $T_{\vec{w}}$ són equivalents si i només si $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \neq 0$.*

Demostració. Donats $T_{\vec{w}} \circ \sigma(P) = \sigma \circ T_{\vec{v}}(P)$, tenim $\sigma(P) + \vec{w} = \sigma(P + \vec{v}) = \sigma(P) + D\sigma(\vec{v})$. Per tant, $\vec{w} = D\sigma(\vec{v})$. Com que σ és una isometria, això vol dir en particular que $\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\|$, i ja sabem de la classificació d'afinitats, que no és possible que un sigui 0.

De l'altra banda, donats $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$, llavors existeix una isometria σ tal que $D\sigma(\vec{v}) = \vec{w}$. .. □

6 Moviments del pla

Informalment un moviment del pla es pot visualitzar com l'acte de moure una transparència sobre una taula: l'observació important és que la transparència es queda rígida: tots els punts es mouen igualment, o millor mantenen la configuració mutual. Exemples de tals moviments:

- 6.1 Exemple.**
1. Traslladar la transparència una mica en alguna direcció, diguem 30cm fins al nord.
 2. Girar la transparència una mica al voltant de algun punt que es queda immòbil, diguem, girar 45 graus en el sentit de les agulles del rellotge fixant la cantonada superior de l'esquerra de la transparència.

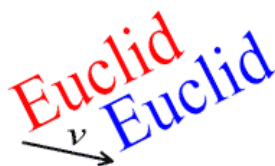
3. Tornar el full al revés — Observeu que això és un moviment impropri: no es pot fer sense tirar el full de la taula i fer servir la tercera dimensió. Observeu també que qualsevol figura dissenyada a la transparència la veiem ara al revés.

Aquests exemples són translació, rotació i reflexió. És clar que en podem combinar de totes maneres.

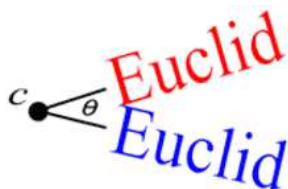
Moviments propis del pla

Són els f amb $\det Df = 1$.

6.2 Translacions. No tenen punt fix (excepte la translació trivial que és la identitat)



6.3 Rotacions. Tenen un punt fix (excepte la rotació trivial que és la identitat)



Observeu que una rotació de centre C i d'angle π també es pot veure com una reflexió per C . Es diu també reflexió central. En aquest apartat reservem el terme “reflexió” per a les reflexions en rectes.

6.4 Lema. *Una rotació seguida per una translació és una altra rotació.*

Demostració. Sigui $R_{P,\theta}$ la rotació amb centre P i angle θ . Sigui $\overrightarrow{PP'}$ una translació. Com que $D(\overrightarrow{PP'}) = \text{Id}$, la diferencial de la composició és igual a la diferencial de la rotació original. En particular, l'espai propi de valor propi 1 és l'espai zero. Això ja vol dir que la composició té un punt fix isolat (i per tant un únic punt fix), i per tant és una rotació. Podem trobar el seu centre: el seu centre Z ha de situar-se en el bisector de P i P' . També s'ha de situar en el bisector de Q i $Q' = f(Q)$ per algun altre punt, i per tant el centre ha de ser la intersecció d'aquestes dues rectes.

(També podem realitzar la composició com un par de reflexions: primer reflexió en el bisector de P i P' , després en la recta que passa per P' i Z . Veurem en un moment que la composició de dues reflexions és una rotació.) $\square$

6.5 Lema. *La composició de dues rotacions és una altra rotació, excepte en el cas on els dos angles són oposats. En aquest cas la composició és una translació.*

Així ja tenim tots els moviments propis.

Moviments impropis del pla

6.6 Reflexions. Una reflexió fixa tots els punts d'una recta. La diferencial té determinant -1 .



6.7 Composicions de reflexions. La composició de dues reflexions és un moviment propi (com que $(-1) \cdot (-1) = 1$). La composició de dues reflexions en rectes paral·leles és una translació en direcció ortogonal a les rectes (i queda la identitat si les dues rectes són idèntiques). La composició de dues reflexions en rectes no paral·leles dóna una rotació.

De fet, tota rotació es pot escriure així; això és una conseqüència del teorema de Cartan–Dieudonné. Si la rotació G_θ té angle θ i centre P , llavors per trobar dues rectes L_1 i L_2 tal que $G_\theta = R_{L_2} \circ R_{L_1}$ n'hi ha prou en agafar dues rectes que passen per P i tal que l'angle de L_1 a L_2 sigui $\theta/2$. En particular, qualsevol recta per P pot jugar el paper de L_1 o L_2 (i això determina l'altra recta únicament).

Demostració. Sigui $O = \ell_1 \cap \ell_2$ el punt d'intersecció de les dues rectes. Llavors hi ha dues possibles rotacions amb centre O que lleven ℓ_1 en ℓ_2 . Aquests angles són θ i $\pi + \theta$. Afirmen que la composició “reflexió en ℓ_1 seguida per reflexió en ℓ_2 ” és igual a rotació d'angle 2θ (doncs el factor 2 elimina l'ambigüitat). Sigui $P \neq O$ un punt de ℓ_1 . Llavors reflexió en ℓ_1 no té efecte, i després reflexió en ℓ_2 té el mateix efecte que una rotació d'angle 2θ . Per tant, els moviments coincideixen en els punts O i P , i com que els dos són moviments propis, coincideixen en tots els punts. $\square$

6.8 Composició d'una reflexió i una translació. Si fem primer una reflexió en una recta W i després una translació de vector $\vec{v}$, podem sempre fer la translació en dos passos,

fent la descomposició $\vec{v} = \vec{u} + \vec{n}$, amb $\vec{u} \in W$ i $\vec{n} \in W^\perp$. Veiem que composició amb una translació perpendicular a W dóna una altra reflexió amb recta fixa $W + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Així és suficient estudiar l'altre cas, el cas de translació en direcció de W :

6.9 Reflexions lliscants. Si combinem una reflexió amb una translació en la direcció de l'eix, obtenim un nou tipus de moviment que no havíem vist: es diu *reflexió lliscant* (“glide reflection” en anglès). Es caracteritza per ser un moviment impropri sense punts fixos.



6.10 Lema. Si R_L és la reflexió en la recta L i $G = G_{P,\theta}$ és una rotació d'angle θ en un punt $P \in L$, llavors $G \circ R_L \circ G^{-1} = R_M$, la reflexió en la recta M obtinguda com $M = G_{P,\theta}(L)$.

Demostració. És clar que GR_LG^{-1} és involutiva. Si $Y \in M$, llavors $Y = G(X)$ per a algun punt $X \in L$. Veiem que GR_LG^{-1} també fixa Y : de fet $GR_LG^{-1}(Y) = GR_L(X) = G(X) = Y$. Per tant fixa tota M i ha de ser la reflexió en M . $\square$

En la situació de la demostració, M és el bisector de X i $GG(X)$. Per tant, $R_M(X) = GG(X)$. Ara tenim

6.11 Lema. $R_M \circ R_L = G \circ G$.

Demostració. És clar que els dos moviments tenen el mateix valor en els punts P i X . Falta veure que tenen el mateix valor en $Y = G(X)$. Com que $\det(R_MR_L) = 1$ tenim que R_MR_L pertany a $SO(2)$. La verificació en el punt Y és una conseqüència del fet que $SO(2)$ és un grup abelià:

$$\begin{aligned} R_MR_L(Y) &= R_MR_LG(X) \\ &= GR_MR_Y(X) \\ &= GGG(X) \\ &= GG(Y) \end{aligned}$$

$\square$

6.12 Composició d'una reflexió i una rotació. Considerem la composició d'una rotació $G_{Z,\theta}$ (de centre Z i angle θ) i una reflexió R_L en una recta L . Si $Z \in L$ llavors $R_L \circ G_{Z,\theta}$ és de nou una reflexió. Si $Z \notin L$ llavors és una reflexió lliscant.

OBS: si la rotació és d'angle π , llavors dóna una reflexió (no-lliscant).

6.13 Conjugació de rotacions. Si G i G' són dues rotacions del mateix angle, però en punts diferents, llavors existeix una translació T tal que $T^{-1} \circ G \circ T = G'$. Si les dues translacions són d'angles oposats, llavors existex una reflexió R tal que $R \circ G \circ R = G'$. Si els angles són ni iguals ni oposats, llavors cap conjugació és possible. En conclusió, dues reflexions són equivalents (similars) si i només si tenes angles iguals o oposats.

6.14 Classificació.

$\text{Fix}(f)$	nom	$\det Df$
$\emptyset$	translació	+1
$\emptyset$	reflexió lliscant	-1
punt	rotació	+1
recta	reflexió	-1
tot	identitat	+1

En la taula hem de fer algunes excepcions: “translació” significa “translació no trivial”, i “rotació” significa “rotació no trivial”. Altra manera gràfica:

	$\det Df = 1$	$\det Df = -1$
$\text{Fix}(f) = \emptyset$	translació	reflexió lliscant
$\text{Fix}(f) = \text{punt}$	rotació	-
$\text{Fix}(f) = \text{recta}$	-	reflexió
$\text{Fix}(f) = \text{pla}$	identitat	-

Dins de les rotacions, equivalència es detecta per l'angle (excepte un signe). Dins de les translacions, equivalència es detecta pel mòdul del vector de lliscament. Totes les reflexions són equivalents. Le reflexions lliscants són equivalents si i només si tenen el mateix mòdul de vector de lliscament.

És interessant també veure quants rectes invariants té cadascú dels moviments: translació per $\vec{v}$ té infinites rectes invariants: totes les rectes paral·leles de direcció $\vec{v}$. Una rotació no té cap recte invariant — excepte si és d'angle π : en aquest cas té una infinitat de rectes invariants: totes les rectes que passen pel centre. Un a reflexió té infinites rectes invariant: totes les rectes perpendiculars a l'eix. (És clar, l'eix és una recta fixa i per tant invariant també!) Una reflexió lliscant té una única recta invariant, que és l'eix.

7 Moviments de l'espai

Podem escollir la referència de manera que la diferencial sigui

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Tractem primerament del cas dels moviments propis, és a dir, el determinant de Df és $+1$.

Moviments propis de l'espai

Si $\det Df = 1$, tenim

$$T(\mathbb{A}) = E_1 \oplus W$$

on $E_1 = \text{Ker}(Df - \text{Id})$ és l'autoespai d'autovalor 1, que és de dimensió 1, i $W = E_1^\perp$ és el complement ortogonal.

Hi ha dos subcasos: si existeix un punt fix P , llavors podem treure aquest punt com origen de la referència, Però llavors f és donat per la mateixa matriu que la seva diferencial, i clarament fixa no només l'origen com també l'eix $E_1 = \text{Ker}(Df - \text{Id})$ que és el subespai vectorial generat per $\vec{e}_1$.

Per tant, $\text{Fix}(f) = P + E_1$. En conclusió, f és la rotació d'eix $P + E_1$ i d'angle θ . (En el cas particular $\theta = \pi$, es tracta d'una reflexió en $P + E_1$ (és a dir una reflexió axial).

Si no hi ha punts fixos per f , podem factoritzar f com $\vec{u}_f \circ g$ on g té algun punt fix P , i com que $Dg = Df$, l'anàlisi del primer subcas és vàlid per a g . Per tant, $P + E_1$ és el conjunt de punts fixos per g . Recordeu que $\vec{u}_f \in E_1 = \text{Ker}(Df - \text{Id})$. Així f és la composició d'una rotació d'eix $P + E_1$ i d'angle θ amb una translació en direcció de l'eix. És diu *rotació lliscant*, o bé *moviment helicoidal* (en anglès, *screw motion*). Observeu, que la rotació es pot considerar com un cas particular del rotació lliscant, on el component lliscant és trivial.

7.1 Exemple. Siguin G una rotació al voltant d'una recta L , i sigui G' una rotació al voltant d'una altra recta L' i suposeu que les dues rectes són concorrents a un punt P . Llavors la composició és de nou una rotació, al voltant d'una recta que també conté P . En efecte, com que P és un punt fix per ambdues rotacions, també és un punt fix per al moviment compost. I clarament el moviment compost és propi. Per tant, l'anàlisi anterior ens diu que es tracta de nou d'una rotació.

Per calcular més específicament quina rotació és, profiteu del fet que tota rotació de l'espai es pot escriure com a composició de dues reflexions especulars, en plans que contenen l'eix, és a dir

$$G = R_{H_2} \circ R_{H_1}.$$

Al moment de determinar aquest dos plans, importa només l'angle entre ells. Per tant podem agafar per a H_2 el pla generat per L i L' . Similarment, podem escriure $G' = R_{H'_2} \circ R_{H'_1}$, i aquesta vegada podem agafar H'_1 aquest mateix pla. Ara la composició és

$$G' \circ G = R_{H'_2} \circ R_{\overline{LL'}} \circ R_{\overline{LL'}} \circ R_{H_1}.$$

I com que les dues reflexions al mig es cancel·len, tenim representat la rotació com a composició de dues reflexions ben concretes.

7.2 Exemple. Si posem dues rotacions al voltant de rectes paral·leles, llavors passa una cosa similar: com que la direcció dels dos eixos és la mateixa E_1 , això serà també l'espai propi de valor 1 de la composició. De fet, si agafem una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{e}_3$ sigui vector propi de valor propi igual a 1, llavors les dues rotacions són de la forma

$$G \times \text{Id} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

i ja sabem que la composició de dues rotacions del pla és de nou una rotació.

L'argument de les reflexions funciona aquí també: podem escriure la primera rotació com a composició de dues reflexions tal que la segona sigui en el pla que conté les dues rectes, i podem escriure la segona rotació com a composició de dues reflexions de manera que la primera sigui en aquest mateix pla. La resta de l'argument és el mateix que a l'exemple anterior. que

7.3 Exemple. La composició de dues rotacions en rectes que es creuen (és a dir, que ni són concorrents, ni coplanars) és una rotació lliscant...

Moviments impropis de l'espai

Ara tractem del cas d'un moviment improp.

$$Df = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En el cas particular $\theta = 0$, tenim

$$Df = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $f = \vec{u}_f \circ g$, segons el teorema estructural. Si el vector lliscant $\vec{u}_f$ és zero vol dir que $g = f$ que doncs té un punt fix P . En aquest cas tot el pla $P + E_1$ consisteix de punts fixos. Així f és reflexió en aquest pla (reflexió especular).

Si el vector lliscant és no trivial, vol dir que f és la composició d'una reflexió especular en $P + E_1$ i una translació en alguna direcció continguda en E_1 . Com que clarament no hi ha punts fixos fora del pla, i com que dins del pla es tracta de una translació del pla, no hi ha punts fixos.

Una manera de reconèixer el pla: ja sabem que la direcció és $\text{span } \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Com punt podem treure $Q - f(Q)$ per qualsevol Q .

Finalment, el cas general, $\theta \neq 0$. Llavors 1 no és autovalor, per tant hi ha un únic punt fix. El -1 en la primera posició de la matriu representa una reflexió especular per el pla $P + \text{span } \vec{e}_2, \vec{e}_3$, i la matriu 2×2 una rotació d'eix $P + \text{span } \vec{e}_1$ i d'angle θ . Aquest moviment es diu *reflexió rotatòria*. En el cas particular $\theta = \pi$, la rotació és un reflexió central, doncs en total, f és una reflexió central en P .

Conclusió:

	$\det Df = 1$	$\det Df = -1$
$\text{Fix}(f) = \emptyset$	translació / rotació lliscant	reflexió especular lliscant
$\text{Fix}(f) = \text{punt}$	-	reflexió rotatòria
$\text{Fix}(f) = \text{recta}$	rotació	-
$\text{Fix}(f) = \text{pla}$	-	reflexió especular
$\text{Fix}(f) = \text{tot}$	identitat	-

En els tres casos de “rotació”, hi ha un cas particular on $\theta = \pi$: en aquest cas, la rotació lliscant esdevé reflexió axial lliscant, la rotació pura esdevé reflexió axial, i la rotació amb reflexió especular esdevé reflexió central.

Referències

- [B] [B] M. BERGER. *Geometry (vols. 1–2)*. Springer, New York, 1987. (Translated from the French *Géométrie, vols. 1–5*, CEDIC, Paris, 1977.)

- [CL] [CL] M. CASTELLET & I. LLERENA. *Àlgebra lineal i geometria*. Manuals de la UAB no. 1, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1998. (Versió castellana per Ed. Reverté, 1991.)
- [R] [R] A. REVENTÓS. *Afinitats, moviments i quàdriques*. Manuals de la UAB no. 50, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2008.