

Més apunts de quàdriques: Polar, centre, varietat tangent (esborrany)

JOACHIM KOCK

Versió 12/01/2014

Continguts

1	Polar	1
2	Centre	3
3	Punts singulars	5
4	Recta tangent i varietat tangent	6
5	Cas de les quàdriques afins	9

1 Polar

1.1 Punt = columna; hiperplà = fila. Per a un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ escrivim els punts com a vectors columnes. Escrivim els hiperplans com a vectors files. Una fila $[a_0 : \cdots : a_n]$ representa la forma lineal

$$a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = \boxed{a} \boxed{x}$$

i més exactament podem dir que l'hiperplà en qüestió és $V(a) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid a.x = 0\}$.

1.2 Exemple. Si $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ és la carta afí $x_0 = 1$, llavors l'hiperplà a l'infinít corresponent ve donat per la “fila” $[1 : 0 : 0]$. L'origen de $\mathbb{A}^2$ és el punt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.3 Quàdriques. Una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ (o d'alguna carta afí $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$) és una matriu simètrica no-nula q llevat un factor constant no-nul. En el cas projectiu, el polinomi

homogeni de grau 2 que defineix és llavors

$$\boxed{x^\top} \quad \boxed{q} \quad \boxed{x}$$

El lloc dels zeros de q és

$$V(q) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x^\top q x = 0\}$$

Aquest és l'objecte geomètric que dibuixem, que tenim al cap quan parlem d'una quàdrica, i al qual es refereixen les nocions geomètriques...

1.4 Polar. Sigui q una quàdrica de $\mathbb{P}^n$, i sigui $x \in \mathbb{P}^n$ un punt. La *polar* de x respecte de q és per definició la fila

$$\text{Polar}_q(x) := \boxed{x^\top} \quad \boxed{q}$$

Voldríem dir que és un hiperplà, però no sempre ho és: pot ser la fila zero $[0 : \dots : 0]$ que *no* és un hiperplà. Això passa quan tenim

$$x \in \text{Ker}(q)$$

com a vector de $\mathbb{R}^{n+1}$, i considerant q una aplicació $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. En aquest cas diem que x és un *punt singular* de q (observeu que en aquest cas, necessàriament $x \in V(q)$). Per als punt *no-singulars*, sí que la polar és un hiperplà.

1.5 Exemple. Al pla afí, si $q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, el cercle centrat a l'origen $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

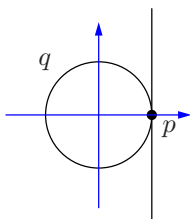
llavors es calcula immediatament que la polar de x és

$$\text{Polar}_q(x) = [1 : 0 : 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 : 0 : 0],$$

l'hiperplà a l'infinit. Si agafem un altre punt $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, llavors és calcula que

$$\text{Polar}_q(p) = [1 : -1 : 0],$$

que és la recta $x_1 = 1$. És la recta tangent de q en el punt p .



La noció de polar és fonamental per a tractar dels conceptes de punt singular, centre i tangent.

2 Centre

2.1 Punt central i centre. Les nocions de punt central i de centre són nocions afins: són relatives a un “hiperplà a l'infinit”:

Un *punt central* d'una quàdrica afí q és un punt z (no necessàriament de $V(q)$) tal que la reflexió central en z deixa q invariant. És a dir, si Q és la matriu de q , i si R és la matriu afí de la reflexió central en z , llavors

$$RQR = \lambda Q.$$

Anomenem el *centre* de q el conjunt de tots els punts centrals de q .

Observeu que demanem que la reflexió deixi el funcional q invariant; en alguns casos degenerats, això és una condició més fort que deixar el lloc $V(q)$ invariant. Per exemple, en el cas $V(q) = \emptyset$, tota reflexió (com tota afinitat) deixa $V(q)$ invariant!

2.2 Exemple. Considerem, com sempre, l'espai $\mathbb{A}^2$ com la carta afí de $\mathbb{P}^2$ donada per $x_0 = 1$. Per tant l'origen de $\mathbb{A}^2$ és el punt $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sigui q el cercle de l'exemple anterior.

Reflexió central a l'origen té matriu

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculem directament que

$$RQR = Q.$$

Per tant l'origen és un punt central de q . (És pura coincidència que en aquest cas la matriu de la reflexió coincideix amb la matriu de la quàdrica — això no és típic!)

MILLOR POSAR UN ALTRE EXEMPLE

2.3 Proposició. *Per a una quàdrica no defectiva q , un punt z és un punt central per a q si i només si la polar de z respecte a q és l'hiperplà a l'infinit (o tot l'espai, en el cas d'un punt singular).*

Demostració. Podem escullir coordenades afins de manera que z sigui l'origen. Llavors R és la matriu diagonal amb 1 en posició $_{00}$ i -1 en la resta de la diagonal. La condició que z sigui centre de q és

$$RQR = \lambda Q.$$

Si tenim

$$Q = \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array}$$

llavors si multipliquem, com que hem suposat $A \neq 0$, obtenim que això passa exactament quan $B = 0$.

D'altra banda, calculem què vol dir que $\text{Polar}_q(z)$ sigui l'hiperplà a l'infinit $[1 : 0 : \dots : 0]$ (o tot l'espai). Altre cop veiem que això passa exactament quan $B = 0$. $\square$

En la demostració hem trobat:

2.4 Corol·lari. *L'origen és punt central no-singular si i només si $B = 0$.*

Podem observar també:

2.5 Corol·lari. *Un punt singular és també un punt central.*

Hem dit que el centre d'una quàdrica afí és el conjunt de tots els punts centrals.

2.6 Proposició. *El centre d'una quàdrica* $\begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array}$ *és un subespai afí i té equació*

$$Az = -B^\top$$

Demostració. Hem de veure en quines condicions tenim

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & z^\top \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline C & B \\ \hline B^\top & A \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Això és equivalent a tenir

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & z^\top \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

(perquè en realitat no interessa si la primera coordenada (projectiva) és exactament 1). Això és equivalent a l'asserció. $\square$

2.7 Exemple. Es pot calcular que cada el·lipse (o una hipèrbola) té un únic punt com a centre. En canvi, una paràbola té centre buit.

Més generalment, amb referència a la classificació de les quàdriques afins, podem afirmar clarament que les quàdriques de tipus IV tenen centre buit (informalment parlant: “no tenen centre”), mentre que els altres tipus tenen centre no buit (informalment: “tenen centre”).

3 Punts singulars

(Ara tornem a preferir quàdriques projectives.)

Hem dit que un punt singular és un punt x tal que

$$x^\top q = [0 : \cdots : 0].$$

Geomètricament, $Polar_q(x) = \text{tot l'espai}$.

3.1 Lema. Si x és un punt singular de q , llavors $x \in V(q)$.

Demostració. Si tenim $x^\top q = [0 : \cdots : 0]$, llavors clarament tenim també $x^\top q x = 0$. $\square$

3.2 Lema. Una quàdrica projectiva és pròpia si i només si no té cap punt singular.

Demostració. És àlgebra lineal en $\mathbb{R}^{n+1}$: pròpia vol dir de rang maximal $n + 1$. Això és equivalent a la condició que $x^\top q = [0 : \cdots : 0]$ no té cap solució no trivial. $\square$

OBS: és important aquí que parlem de quàdrica projectiva: per a una quàdrica afí, un punt singular pot escapar a l'infinit! Això passa per exemple amb un parell de rectes paral·leles del pla, o amb un cilindre de l'espai.

Denotem per $\text{Sing}(q)$ el conjunt de tots els punts singulars. Com que està definit per una equació lineal, veiem que $\text{Sing}(q)$ és un subespai projectiu. De fet,

$$\text{Sing}(q) = \mathbb{P}(\text{Ker}(q)),$$

on a la dreta considerem q una aplicació lineal $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Ara tenim:

3.3 Proposició. Una quàdrica projectiva q de $\mathbb{P}^n$ té rang r si i només si $\dim \text{Sing}(q) = n - r$.

Demostració. Fem àlgebra lineal a $\mathbb{R}^{n+1}$: dir que q té rang r vol dir que $\dim \text{Ker}(q) = n + 1 - r$, com a subespai vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$. Però, $\dim_{\text{proj}} \text{Sing}(q) = \dim_{\text{proj}} \mathbb{P}(\text{Ker}(q)) = \dim_{\text{vect}} \text{Ker}(q) - 1 = n - r$. I conversament. $\square$

El lema anterior és un cas particular, perquè l'espai buit té dimensió -1 .

Un altre cas important és que una quàdrica de rang n (és a dir maximal-menys-1) té un únic punt singular.

4 Recta tangent i varietat tangent

4.1 Quàdriques de la recta projectiva. En general una quàdrica de la recta projectiva és la unió de dos punts: són les dues arrels d'un polinomi de grau 2. És el cas de rang 2.

També hi ha el cas on els dos punts coincideixen. És el cas de rang 1, o en altres paraules el cas de determinant 0.

Si q és una quàdrica de $\mathbb{P}^n$, i si L és una recta de $\mathbb{P}^n$ no continguda a $V(q)$, llavors la intersecció $V(q) \cap L$ és una quàdrica de la recta L . Escrivim abusivament $q \cap L$ per a la intersecció. Millor pensar la recta com una aplicació projectiva

$$\ell : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n,$$

per tant donada per una matriu $(n+1) \times 2$:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \ell \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

Llavors la intersecció, com a quàdrica de $\mathbb{P}^1$ ve donada per

$$\begin{bmatrix} \ell^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \ell \end{bmatrix}$$

que és una matriu 2×2 .

4.2 Recta tangent. Diem que L és tangent a q , quan $q \cap L$ és un punt doble (o si $L \subset V(q)$). Per tant això passa exactament quan el producte de matrius $\ell^\top q \ell$ té rang 1 (és a dir determinant 0).

4.3 Varietat tangent. Per definició, la *varietat tangent* d'una quàdrica q en un punt $x \in V(q)$ és la unió de totes les rectes tangent a x . La denotem $\mathbb{T}_q(x)$. Veurem aviat que és un subespai projectiu.

Siqui $x \in V(q)$. Analitzem quines rectes $\overline{xx'}$ són tangent de q a x . La recta la podem parametritzar com

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto s \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

És a dir que la matriu de l'aplicació projectiva ℓ é

$$\begin{bmatrix} x_0 & x'_0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & x'_n \end{bmatrix}$$

i per tant es tracta d'analitzar el producte de matrius

$$\begin{bmatrix} x^\top \\ x'^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

Ara com que $x \in V(q)$, aquesta matriu és de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

i per tant té rang 1 exactament quan $b = 0$. Ara b apareix en el producte com

$$b = \begin{bmatrix} x^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \end{bmatrix}$$

Per tant la recta és tangent a q exactament quan x' pertany a la polar $\text{Polar}_q(x)$. Conclusió:

4.4 Lema. *Si $x \in V(q)$ llavors la recta $\overline{xx'}$ és tangent a q en x si i només si tenim $x' \in \text{Polar}_q(x)$.*

El mateix argument demostra:

4.5 Proposició. *La varietat tangent de q a $x \in V(q)$ és el lloc del funcional polar de x .*

En particular és un hiperplà, excepte si x és un punt singular, en el qual cas la varietat tangent és tot l'espai:

4.6 Corol·lari. *Un punt $x \in V(q)$ és no-singular si i només si la varietat tangent $\mathbb{T}_q(x)$ és un hiperplà. Equivalentment, x és un punt singular de q si i només si la varietat tangent $\mathbb{T}_q(x)$ és tot l'espai.*

Observem per acabar que la intersecció d'una quàdrica i el seu hiperplà tangent H (en un punt no singular) és una quàdrica degenerada de H :

4.7 Proposició. *Sigui $x \in V(q)$. Llavors $q \cap \mathbb{T}_x(q)$ és degenerada (no pròpia).*

Demostració. El cas interessant és quan x és un punt no-singular de q . En aquest cas $\mathbb{T}_x(q)$ és un hiperplà $H \subset \mathbb{P}^n$ (que no conté tota $V(q)$). Ara, sempre que $x' \in H$, la recta $\ell = \overline{xx'}$ és tangent a q , és a dir $q \cap \ell$ és un punt doble. Però llavors clarament el mateix és el cas quan considerem ℓ com a recta de $H = \mathbb{P}^{n-1}$: és tangent de $q \cap H$. És a dir que tota recta de H (que passa per x) és tangent de $q \cap H$. Així $q \cap H$ és una quàdrica degenerada de $H = \mathbb{P}^{n-1}$.

(El cas menys interessant és quan x ja és un punt singular de q . Llavors q és no-pròpia, i llavors segur que $q \cap H$ ho és també.) $\square$

5 Cas de les quàdriques afins

La teoria es pot desenvolupar igual per a quàdriques afins. En aquest cas les rectes es poden representar com “punt més vector”. Veiem alguns càlculs en el cas afí:

5.1 Recta tangent. Diem que una recta L és una *recta tangent* a una quàdrica afí $Q = V(q)$ en el punt P si la restricció de q a L és un punt doble (o tota la recta, és a dir $L \subset V(q)$). És més fàcil veure si L ve donada per una parametrització com $t \mapsto P + t\vec{v}$ per algun vector $\vec{v} \neq \vec{0}$. Llavors és només una qüestió de substituir $P + t\vec{v}$ dins de l'equació de Q : això ja és l'equació de $Q|L$ donada com equació en t . Qualsevol vector direcció d'una recta tangent de Q a P s'anomena *vector tangent* de Q a P .

5.2 Exemple. A $\mathbb{R}^2$, sigui Q el cercle, $x^2 + y^2 - 1$. En el punt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la recta $P + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una recta tangent, i per tant $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector tangent a P : substituïm en l'equació: $1^2 + t^2 - 1$. Clarament $t = 0$ és arrel doble.

El següent càlcul mostra que no hi ha altres rectes tangents a P : una recta que passa per P és de la forma

$$P + t\vec{v}$$

amb $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Si la substituïm en l'equació de Q obtenim

$$(1 + tv_1)^2 + (tv_2)^2 - 1.$$

Per que aquesta equació tingui arrel doble a $t = 0$, hem de matar el terme lineal que és $2tv_1$. Per tant, hem de tenir $v_1 = 0$. Per tant, el vector direcció de la recta ha de ser $\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$, que és exactament la direcció que ja hem tractat.

DIBUIX

Una cònica pròpia (és a dir, de rang projectiu 3) té exactament una recta tangent en cada punt. Per a la cònica de rang projectiu 2 (parell de rectes), el punt d'intersecció P de les dues rectes té la propietat que tota recta que passa per P és tangent. Intuïtivament ja és un punt doble, i per tant serà un punt doble en tota recta que passa pel punt. Veurem que això passa exactament als punts singulars (és a dir els punts P tals que la polar de P és idèntic zero).

Per a les quàdriques de dimensió 2 (les quàdriques de $\mathbb{R}^3$), tot punt té una infinitat de rectes tangents, i juntes aquestes rectes formen el *pla* tangent (que definim en breu).

5.3 Exemple. A $\mathbb{R}^3$ sigui Q la quàdrica donada per $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1$. (És un hiperboloide d'un full.) Considerem el punt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Afirmem que les dues rectes

$$P + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

són tangents. En el primer cas l'equació és $t^2 - t^2 - 1 + 1$. Això és sempre 0, doncs aquesta recta està continguda en Q . En el segon cas, $-t^2 - 1 + 1$. Per tant, l'equació és $t^2 = 0$, i clarament $t = 0$ és una arrel doble. Busquem totes les rectes tangents possibles

$$P + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Analitzem per a quins valors de v_1, v_2, v_3 la recta és tangent. L'equació és

$$(tv_1)^2 - (tv_2)^2 - (1 - tv_3)^2 + 1$$

Té zero doble a $t = 0$ si i només si no hi ha terme lineal. Per tant, hem de matar $-2tv_3$. Per tant, tota recta tangent és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Clarament totes aquestes rectes pertanyen al pla $x_3 = 1$. Aquest pla serà el *pla tangent* de Q a P .