

Apunts de geometria projectiva (esborrany)

com a eina per a estudiar còniques i quàdriques

JOACHIM KOCK

Versió 19/12/2013

Continguts

1	Introducció a la geometria projectiva	1
2	Espai projectiu	3
3	Geometria projectiva i geometria afí	7
4	Perspectives	9
5	Famílies d'objectes geomètriques	11

1 Introducció a la geometria projectiva

Aviat estudiarem còniques i quàdriques. Formen naturalment espais projectius més aviat que espais afins, i la seva classificació és més elegant en termes projectius. Per això necessitarem d'una mica de geometria projectiva, en realitat molt poc. Però val la pena aprofitar per a tractar els aspectes més bàsics de la geometria projectiva, perquè la geometria projectiva és una joia...

1.1 Mancances de la geometria afí. Una noció fonamental en la geometria afí és *paral·lelisme*. Aquesta noció és també responsable de moltes anomalies o excepcions. Per exemple:

Dues rectes al pla tenen exactament un punt en comú, *excepte* si són paral·leles.

O més generalment les complicacions de les fórmules de Grassmann:

Si dos subespais L i M afins tenen intersecció buida, llavors

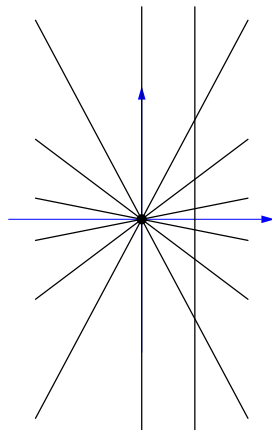
$$\dim(L + M) = \dim(L) + \dim(M) - \dim(T(L) \cap T(M)) + 1.$$

Hi ha també molts teoremes clàssics (com ara el de Ceva) que diuen

...llavors les tres rectes ...són concurrents o paral·leles.

1.2 Punts que escapen a “l’infinit”. En totes aquestes situacions veiem, intuitivament, que la configuració excepcional es pot veure com a límit d’una família de configuracions “normals”, i que al límit algun punt “escapa a l’infinit”.

Per exemple, en el pla afí $\mathbb{R}^2$ fixem la recta L com $x = 1$, i considerem la família de totes les rectes que passen per l’origen.



És clar que tota recta de la família intercepta L en algun punt, excepte la recta vertical. Si comencem amb la recta horitzontal $y = 0$ i poc a poc tornem la recta en el sentit contrari a les agulles d’un rellotge, llavors el punt d’intersecció puja per la recta L i tendeix a l’infinit. Si parametritzem la família per l’angle $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de l’eix x , llavors obtenim tots els punts de L com a punt d’intersecció: concretament, la recta M_θ intercepta L en el punt $(1, \tan \theta)$. Amb $\theta = \frac{\pi}{2}$ tenim la recta vertical que no intercepta L . En efecte, $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$, o més exactament no està definit. Veiem que el punt escapa a l’infinit de la mateixa manera que $\tan(\theta)$ tendeix a ∞ quan $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ dins de l’interval que considerem.

Ara bé, parlar d’angles no és un argument afí. Podem intentar descriure la família de manera afí. Per exemple podem considerar la família de rectes

$$y = tx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Totes aquestes rectes passen per l’origen, però no formen tota la família: falta un membre que és exactament la recta vertical, paral·lela a L .

1.3 La idea de la geometria projectiva (segons Kepler (1604), Desargues (1639), i finalment més sistemàticament, Poncelet (1822)). La idea de Desargues, motivada per exemple de la situació anterior, és afegir punts a l’infinit per a obtenir una geometria

més completa, on en particular dues rectes qualssevol (distintes) del pla tendrien un únic punt d'intersecció. Per aconseguir això afegim un nou punt a l'infinit per a cada direcció paral·lela. En particular, per a la direcció de L afegim un nou punt, que serveix com a punt d'intersecció entre L i qualsevol recta paral·lela a L . (Com a conseqüència d'aquesta idea, tenir tres rectes paral·leles és ara el mateix que tenir tres rectes “concurrents en un punt a l'infinit”).

Ara podem calcular la intersecció de dues rectes paral·leles. Sigui $L \parallel L'$. Això vol dir $T(L) = T(L')$. Posem $\bar{L} := L \cup \{\infty_{TL}\}$ i $\bar{L}' := L' \cup \{\infty_{TL}\}$. Ara

$$\begin{aligned}\bar{L} \cap \bar{L}' &= (L \cup \{\infty_{TL}\}) \cap (L' \cup \{\infty_{TL}\}) \\ &= (L \cap L') \cup (L \cap \{\infty_{TL}\}) \cup \{\infty_{TL}\} \cap L' \cup (\{\infty_{TL}\} \cap \{\infty_{TL}\}) \\ &= \{\infty_{TL}\}\end{aligned}$$

És un punt, com volíem!

(Es podria potser pensar que calia afegir dos punts a L : $+\infty$ i $-\infty$, un en cada extremitat de L . Això *no* és una bona idea: la recta vertical $M_{\frac{\pi}{2}}$ tindria llavors *dos* punts d'intersecció amb L : un a $+\infty$ i altre a $-\infty$, que serien els límits de $\tan(\theta)$ depenent de l'orientació del gir que realitza el límit! De fet és millor oblidar la idea d'angles i tangent completament. Molt millor és el model $y = tx$: tenim una bijecció entre els punts $(1, t)$ de L i els membres M_t d'aquesta família. Exactament com falta un membre en aquest model de la família, falta un punt a L . La projectivització de L serà llavors per definició la família de totes les rectes que passen per l'origen.)

Ara passem a definir les coses més formalment.

2 Espai projectiu

2.1 Definició d'espai projectiu. Sigui V un espai vectorial. Per definició, un *raig* és un subespai vectorial de dimensió 1. Definim l'*espai projectiu* $\mathbb{P}(V)$ associat a V com el conjunt de tots els raigs. Si $L \leq V$ és un raig de V , per denotar el corresponent element de $\mathbb{P}(V)$ escrivim $[L] \in \mathbb{P}(V)$, i diem que és un *punt* de $\mathbb{P}(V)$.

La *dimensió* de $\mathbb{P}(V)$ és per definició

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1.$$

(A vegades és pràctic parlar de *dimensió projectiva*, només per a no confondre-la amb la dimensió vectorial.)

Un subespai projectiu de $\mathbb{P}(V)$ és per definició $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ per algun subespai vectorial $W \leq V$. Això té sentit, perquè els punts de $\mathbb{P}(W)$ són els raigs de W , i com que $W \leq V$, els raigs de W són també raigs de V .

Una *recta projectiva* d'un espai projectiu $\mathbb{P}(V)$ és per definició un subespai projectiu de dimensió projectiva 1, i per tant la mateixa cosa que un subespai vectorial $W \leq V$ de dimensió vectorial 2. Més abstractament anomenem recta projectiva qualsevol espai projectiu de dimensió projectiva 1.

2.2 Exemple. En la discussió motivadora hem analitzat la família de totes les rectes de $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen. És exactament el conjunt dels raigs de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, i per tant és una recta projectiva. La discussió també mostra com interpretar aquest objecte com una recta (la recta afí L) amb un punt afegit a l'infinit.

2.3 Observació. En l'exemple, teníem la recta L , i amb el punt afegit va donar el que ara veiem que és una recta projectiva. És important observar que en la definició de la recta projectiva (conjunt de tots els raigs), no hi ha res d'especial a cap punt: totes les rectes de la família tenen el mateix paper. És només l'interpretació de la recta afí L ($x = 1$) que dóna un paper especial a alguns dels punts de la recta projectiva. Si agafem una altra recta afí, per exemple $y = 1$, i si repetim l'anàlisi feta a la discussió, veiem que ara és un altre punt de la recta projectiva (la família M) que té el paper de punt a l'infinit. Així veiem que la definició d'espai projectiu incorpora els punts a l'infinit de manera natural i democràtica.

2.4 Exemple. El terme “raig” ve de la mecànica quàntica. L'espai d'estats $\mathcal{H}$ d'un sistema quantic és naturalment un espai projectiu: si $\psi \in \mathcal{H}$ és un estat, llavors $z\psi$ defineix el mateix estat (per a tot escalar complex $z \neq 0$), i a més, $\psi = 0$ no és un estat vàlid. Per tant l'objecte relevant és en realitat l'espai projectiu associat. Els físics diuen que un *estat* és un *raig* de $\mathcal{H}$, és a dir un subespai vectorial de dimensió 1.

2.5 El pla projectiu. Sigui $V = \mathbb{R}^3$. Llavors l'espai projectiu $\mathbb{P}(V)$ (que és de dimensió projectiva 2) és diu el *pla projectiu*, i es denota $\mathbb{P}^2$. Així els punts de $\mathbb{P}^2$ són els raigs de $\mathbb{R}^3$, és a dir, les rectes que passen per l'origen.

Sempre que tenim dos raigs de $\mathbb{R}^3$, diguem $L_0 \neq L_1$, generen un subespai vectorial W de dimensió 2. En concret, si $\vec{v}_0$ és un vector generador de L_0 i $\vec{v}_1$ és un generador de L_1 , llavors com que són linealment independents, $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1\}$ és una base de W . Aquest subespai té un espai projectiu associat $\mathbb{P}(W)$ que és un subespai projectiu de $\mathbb{P}^2$, de dimensió 1, és a dir, una *recta projectiva* de $\mathbb{P}^2$: és la recta projectiva *generada* pels punts $[L_0]$ i $[L_1]$.

Els altres punts d'aquesta recta són per definició els punts associats als raigs $L \leq \mathbb{R}^3$ que són subespais vectorials de $W = \langle \vec{v}_0, \vec{v}_1 \rangle$. Cada combinació lineal *no zero* de $\vec{v}_0$ i $\vec{v}_1$ determina un raig de W , i per tant un punt de la recta projectiva $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^2$. Observem que $\vec{v}$ i $\lambda \vec{v}$ generen el mateix raig (si $\lambda \neq 0$), i per tant el mateix punt de $\mathbb{P}(W)$.

En general, les rectes projectives de $\mathbb{P}^2$ són els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ de dimensió (vectorial) 2. Ara ja tenim tots els subespais projectius de $\mathbb{P}^2$:

- de dimensió (projectiva) 2: = tot l'espai
- de dimensió (projectiva) 1: són les rectes projectives
- de dimensió (projectiva) 0: són els punts
- de dimensió (projectiva) -1 : correspon al subespai vectorial trivial $\{\vec{0}\} \leq \mathbb{R}^3$. (No hi ha raigs aquí dins, i per tant l'espai projectiu associat és buit.)

2.6 Interseccions de subespais projectius. La intersecció de dos subespais projectius és de nou un subespai projectiu. De fet és immediat que tenim

$$\mathbb{P}(W_0) \cap \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_0 \cap W_1).$$

Així arribem a un dels característics més importants de la geometria projectiva:

La intersecció de dos subespais projectius (en algun espai projectiu ambient $\mathbb{P}(V)$) sempre té la dimensió esperada.

Per exemple, *la intersecció de dues rectes projectives a $\mathbb{P}^2$ (distintes) sempre és exactament un punt*. En efecte, una recta correspon a un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensió (vectorial) 2. Si en tenim dues, distintes, la fórmula de Grassmann (vectorial) ens diu que la seva intersecció (com a espais vectorials) té dimensió (vectorial) igual a 1. Per tant és un punt de $\mathbb{P}^2$.

2.7 Fórmula de Grassmann. Si H_0 i H_1 són subespais projectius d'un espai projectiu $\mathbb{P}(V)$, (diguem $H_0 = \mathbb{P}(W_0)$ i $H_1 = \mathbb{P}(W_1)$ per a subespais vectorials $W_0 \leq V$ i $W_1 \leq V$), llavors definim $\overline{H_0 H_1} \subset \mathbb{P}(V)$ com el subespai projectiu més petit que contingui H_0 i H_1 . És fàcil veure que

$$\overline{H_0 H_1} = \mathbb{P}(W_0 + W_1),$$

O sigui, el subespai projectiu generat per dos subespais projectius, és l'espai projectiu associat a la suma dels subespais vectorials. Ara obtenim immediatament la fórmula de Grassmann per a subespais projectius:

$$\dim(\overline{H_0 H_1}) = \dim H_0 + \dim H_1 - \dim(H_0 \cap H_1).$$

En particular, mai hi ha punts d'intersecció que “escapen”. En els espais vectorials, en un sentit això és cert també, però té l'explicació banal que tota intersecció conté l'origen. La gràcia de la geometria projectiva és que tenim el comportament ideal d'interseccions, i al mateix temps tenim la flexibilitat de tenir subespais que no tots passen per un mateix punt, una característica necessària per a fer geometria. Per exemple tenim triangles:

2.8 Triangles. Un triangle (diguem a $\mathbb{P}^2$) és per definició la configuració de tres rectes que no són concurrents. És a dir no hi ha cap punt comú de les tres rectes. (Equivalentment, un triangle es pot definir com tres punts que no són colineals.) Hem de veure que tals configuracions realment existeixen al pla projectiu. (Per exemple en els espais vectorials, que és la base dels espais projectius, qualssevol tres rectes s'intercepten a l'origen, per tant els triangles no són possibles!) Recordeu que $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$; una recta de $\mathbb{P}^2$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$. Exhibim tres rectes projectives que no són concurrents: n'hi ha prou agafant els tres plans de coordenades de $\mathbb{R}^3$. És a dir, el primer subespai vectorial serà $x = 0$, el segon $y = 0$, i el tercer $z = 0$. Com que la intersecció d'aquests tres subespais vectorials és l'espai vectorial trivial $\{\vec{0}\}$, la intersecció de les tres rectes projectives associades en $\mathbb{P}^2$ és buida. Clarament, això és la situació normal: si tenim tres plans vectorials de $\mathbb{R}^3$, dos d'ells s'intercepten en una recta vectorial (un raig), i la intersecció d'aquesta recta vectorial amb el tercer pla vectorial típicament és només l'origen. En termes dels subespais projectius: dues rectes sempre s'intercepten en un punt, i típicament una tercera recta no passa per aquest punt.

2.9 “Vectors no nuls llevat escalar no nul.” Emfatitzem que un raig d'un espai vectorial V és el mateix que donar un vector no nul, llevat un escalar no nul. Així l'espai projectiu $\mathbb{P}(V)$ es pot descriure com

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{\vec{0}\}}{\sim}$$

on $\sim$ denota la relació d'equivalència que identifica dos vectors $\vec{v}, \vec{w} \in V$ si un és un múltiple de l'altre per un escalar $\lambda \neq 0$.

2.10 Coordenades projectives. Escollint una base de l'espai vectorial V , podem suposar $V = \mathbb{R}^{n+1}$. Llavors cada vector de V s'escriu com un vector $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. El vector zero no genera cap raig; cadascú d'els altres vectors generen un raig, i dos vectors generen el mateix raig si un és un múltiple de l'altre per un escalar $\lambda \neq 0$. Així podem representar cada punt de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ per un vector $[x_0 : \dots : x_n]$, si convenim que $[x_0 : \dots : x_n]$ i $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ representen el mateix punt de $\mathbb{P}^n$ sempre que $\lambda \neq 0$. La

notació de coordenades projectives amb el símbol “:” com a separador, indica justament que importa la *proporció* entre els nombres, no pas els nombres en sí. Així les coordenades projectives d’un punt no són úniques, només úniques llevat un factor comú $\lambda \neq 0$.

Si per exemple la primera coordenada x_0 és diferent de 0, llavors podem “normalitzar” per a aconseguir coordenades del format $[1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}]$. Però tots els punts de la forma $[0 : x_1 : \dots : x_n]$ no admeten aquesta normalització. Veurem que els punts de $\mathbb{P}^n$ amb $x_0 = 1$ formen exactament un espai afí, i que el complement, els punts de la forma $[0 : x_1 : \dots : x_n]$, formen un espai projectiu de dimensió $n - 1$.

2.11 Morfismes. Una *projectivitat* $\phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ és per definició una aplicació lineal invertible $V \xrightarrow{\sim} V$ llevat multiplicació per un escalar $\lambda \neq 0$. El grup de les projectivitats de $\mathbb{P}(V)$ s’escriu $\text{PGL}(V)$. En coordenades les projectivitats són matrius invertibles $(n+1) \times (n+1)$ llevat un factor $\lambda \neq 0$. Composició de projectivitats és multiplicació de tals matrius.

3 Geometria projectiva i geometria afí

Tenim ara una geometria molt elegant, on les interseccions es comporten com una meravella. Veurem que el preu a pagar és que no tenim ni nocions de distàncies ni angles (les quals nocions ni teníem a la geometria afí), però tampoc nocions de paral·lelisme o de combinació afí. Volem ara relacionar la geometria projectiva amb la geometria afí, per beneficiar les dues: la geometria projectiva ajuda amb conceptes, la geometria afí ajuda amb els càlculs. Una indicació ve de la discussió inicial (la recta $x = 1$) i de la tècnica de les coordenades cartesianes en geometria afí. Recordeu que aquesta tècnica consisteix en escollir un punt $O \in \mathbb{A}$ i una base de l’espai vectorial $T\mathbb{A}$. Si $\dim \mathbb{A} = n$ podem treballar amb l’espai de coordenades $\mathbb{R}^n$. Però, hem vist també que sovint, per exemple si treballem amb afinitats, és més convenient afegir una coordenada x_0 que és sempre igual a 1. Així les afinitats es representen com a matrius ampliades. En altres paraules, un model de coordenades convenient per a $\mathbb{A}$ és l’espai afí

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}.$$

La recta L de la discussió inicial n’és un exemple.

3.1 Una carta afí de $\mathbb{P}^2$. Treballem a l’espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Tenim el pla projectiu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ i tenim també

$$\mathbb{A}^2 := \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_0 = 1\},$$

que és un model del pla afí. Cada punt $P \in \mathbb{A}^2$ és per tant un vector $(1, x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^3$; aquest vector és sempre no-trivial perquè la primera coordenada és 1. Per tant genera un raig de $\mathbb{R}^3$, i per tant un punt de $\mathbb{P}^2$. És fàcil veure que l'aplicació així definida $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ és injectiva, perquè un raig de $\mathbb{R}^3$ intercepta l'hiperplà $\mathbb{A}^2$ en un únic punt (si l'intercepta de tot). Així podem considerar $\mathbb{A}^2$ com un subconjunt de $\mathbb{P}^2$.

Quins són llavors els punts de $\mathbb{P}^2$ que no apareixen així, és a dir el complement de $\mathbb{A}^2$? Són exactament els punts que corresponen a vectors en $\mathbb{R}^3$ amb primera coordenada 0 — perquè els raigs d'aquests punts no intercepten l'hiperplà $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Aquests punts formen un hiperplà projectiva $H \subset \mathbb{P}^3$ i els interpretem com a “punts a l'infinit” del pla afí $\mathbb{A}^2$. Els vectors de $\mathbb{R}^3$ de la forma $(0, x_1, x_2)$ s'identifiquen naturalment amb $T(\mathbb{A}^2)$ (és a dir, són diferències de punts de $\mathbb{A}^2$).

Ara, el vector $(0, 0, 0)$ no genera cap raig, llavors no apareix com a punt de $\mathbb{P}^2$. D'altra banda, si $\lambda \neq 0$, llavors els vectors $(0, x_1, x_2)$ i $(0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ generen el mateix raig, i per tant corresponen al mateix punt de $\mathbb{P}^2$. En conclusió, els punts de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$ són en bijecció amb les direccions paral·leles de rectes de $\mathbb{A}^2$, la qual era bàsicament la descripció a la Desargues dels punts a l'infinit del pla afí.

Ara podem fer més identifications: cada recta afí de $\mathbb{A}^2$ genera un pla vectorial de $\mathbb{R}^3$, i per tant una recta projectiva de $\mathbb{P}^2$. A l'inrevés, una recta de $\mathbb{P}^2$ és un pla vectorial de $\mathbb{R}^3$; i, a excepció del pla paral·lel a $\mathbb{A}^2$, tot pla vectorial de $\mathbb{R}^3$ intercepta $\mathbb{A}^2$ en una recta. Així, totes les rectes projectives de $\mathbb{P}^2$ són també rectes de $\mathbb{A}^2$, excepte una. Aquesta una és exactament la recta que consisteix en tots els punts que no pertanyen a $\mathbb{A}^2$. També és fàcil veure que interseccions de rectes en $\mathbb{A}^2$ corresponen exactament a interseccions de rectes en $\mathbb{P}^2$, amb l'observació adicional que si dues rectes a $\mathbb{A}^2$ són paral·leles, i així no tenen intersecció en $\mathbb{A}^2$, llavors s'intercepten en $\mathbb{P}^2$ en un “punt de l'infinit”, és a dir en un punt del complement de $\mathbb{A}^2$ en $\mathbb{P}^2$.

$$\boxed{\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}(T\mathbb{A}^2)}$$

3.2 El grup general projectiu. De la mateixa manera que el grup de totes les afinitats d'un espai afí de dimensió n es pot identificar amb el subgrup de $GL(n+1)$ de totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & M \end{pmatrix}$$

(les matrius ampliades), el grup de les projectivitats de $\mathbb{P}^n$ es pot identificar amb el grup de matrius invertibles $(n+1) \times (n+1)$ llevat un factor constant. (En els dos casos, la

identificació depen d'un escull de coordenades.)

Si $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ és una carta afí, diguem amb $x_0 = 1$, llavors el subgrup de les afinitats es pot identificar com el subgrup de totes les matrius invertibles $(n+1) \times (n+1)$ A tals que l'entrada a_{00} és diferent de zero, i les altres entrades de la primera fila són 0. Com que $a_{00} \neq 0$ podem rescalear de manera que sigui igual a 1, i recuperem les matrius ampliades com les coneixem de la geometria afí.

Més geomètricament, i sense referència a coordenades, si interpretem $\mathbb{A}^n$ com el complement d'un hiperplà $H \subset \mathbb{P}^n$, llavors el grup afí és el subgrup de les projectivitats que deixa invariant l'hiperplà H .

Aquí dins: les projectivitats que no només deixa H invariant si no també fixa cada punt de H , es pot veure (exercici fàcil) que formen el subgrup del grup afí que consisteix en totes les homotècies i totes les translacions. Més conceptualment: és el grup de totes les afinitats amb Df un múltiple de la identitat. (Finalment, les projectivitats que fixen tot punt de H , i cap altre punt, formen les translacions de l'espai afí $\mathbb{P}(V) \setminus H$.)

Veurem l'argument en el cas del pla projectiu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, amb coordenades projectives $[x_0 : x_1 : x_2]$. Com a hiperplà a l'infinit agafem $H = \{[0 : x_1 : x_2]\}$. Llavors el pla afí té coordenades $(1, x_1, x_2)$. Les projectivitats són les matrius $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ amb $\det \neq 0$ (i amb la identificació per multiplicació per $\lambda \neq 0$). Una tal matriu deixa invariant la recta $[0 : x_1 : x_2]$ si i només si té $a_{01} = a_{02} = 0$, i per tant, per ser invertible ha de tenir $a_{00} \neq 0$ i $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$. Com que $a_{00} \neq 0$ podem rescalear, i arribem a la descripció habitual de les afinitats del pla.

Ara què passa si hem de *fixar* els punts de H ? Això vol dir que per a cada punt $[0 : x_1 : x_2]$ hem de tenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

per algun $\rho \neq 0$ que apareix perquè les $[0 : x_1 : x_2]$ són coordenades projectives, i per tant són determinades només llevat $\rho \neq 0$. Si resollem l'equació trobem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

És a dir exactament que l'afinitat és una homotècia amb raó ρ (o una translació, si $\rho = 1$).

4 Perspectives

Hem vist que un espai projectiu de dimensió n es pot cobrir de $n+1$ cartes afins. Agafem-ne dues cartes. Pensem cada carta com una pantalla on projectem imatges afins de l'espai

projectiu $\mathbb{P}(V)$ (o de l'espai vectorial V). Volem comparar les dues imatges. Cada carta cobreix només una part de l'espai, i ens interessa per tant la part coberta per ambdues cartes. La transformació que consisteix en començar amb un punt P d'una pantalla, l'interpretar primer com un punt de $\mathbb{P}(V)$, agafar el raig que passa per P i retornar el punt d'intersecció del raig amb l'altra pantalla — aquesta transformació es diu una *perspectiva*.

Tornem a l'exemple inicial: la recta projectiva $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, amb coordenades projectives $[x : y]$, i la carta $L \subset \mathbb{R}^2$ definida per $x = 1$, i l'altra carta M definida per $y = 1$. Clarament cobreixen junts tot l'espai projectiu (com que tot raig de $\mathbb{R}^2$ ha d'interceptar o bé L o bé M , i típicament els dos). Cada carta és una recta afí. Podem parametritzar L per $t \mapsto (1, t)$ i podem parametritzar M per $t \mapsto (t, 1)$. Si tenim un punt $[x : y] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, llavors es projecta a la pantalla L com el punt $(1, \frac{y}{x})$ i es projecta sobre la pantalla M com el punt $(\frac{x}{y}, 1)$. La transformació de L a M que consisteix en interpretar $t \in L$ com el punt $[1 : t]$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ i després projectar sobre M , veiem que dóna $\frac{1}{t}$. Clarament, aquesta transformació no és afí: $t \mapsto \frac{1}{t}$ no respecta combinacions afins!

Per comprendre la terminologia “perspectiva”, millor passar a dimensió 3. Suposem que la primera “pantalla” és la terra, en la qual hi ha algunes figures, i que l'altra pantalla és la tela d'un artista, o una pel·lícula fotogràfica que capta l'impressió visual de les figures. En ambdós casos, hi ha un punt P que no pertany a cap de les pantalles, i la perspectiva consisteix en traçar, de cada punt de la primera “pantalla”, la recta (o raig) que passa per P , i registrar el punt on aquesta recta talla l'altra pantalla.

L'observació interessant és que aquesta transformació no preserva rectes paral·leles i que tampoc preserva raons simples o combinacions afins. Per exemple, suposem que tenim la següent figura a terra (pantalla 1):



i que ara veiem la figura que es projecta a la pantalla 2 (la tela del pintor):



És clar que és la mateixa figura *en perspectiva*. Les rectes paral·leles dels costats no són més paral·leles. Les rectes transversal que en la figura original són equidistants, ara

la distància disminueix amb l'alçada. (Fem servir aquí algunes paraules euclidianes per a descriure la figura, però és clar que ni les característiques afins són preservades.)

4.1 Exercici. Agafeu qualsevol fotografia on apareix algun edifici que en la realitat té alguns plans i rectes paral·leles. Analitzeu la perspectiva en la fotografia, observant que en el paper de la fotografia, la representació d'algunes rectes no són paral·leles, etc.

Diem que dos triangles ABC i $A'B'C'$ estan en perspectiva (central) si hi ha un punt P tal que les rectes $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ totes passen per P . Vol dir que el punt P defineix una perspectiva entre els plans generat per cada triangle.

Hi ha també una noció de perspectiva axial de triangles: si en un triangle ABC anomenem a la recta $\overline{BC}$ oposada de A , etc., llavors podem especificar el triangle com abc (tres rectes coplanars). Diem que dos triangles abc i $a'b'c'$ estan en perspectiva axial si les tres interseccions $a \cap a'$, $b \cap b'$ i $c \cap c'$ són punts i que aquests tres punts són colineals.

4.2 Teorema de Desargues. *Dos triangles estan en perspectiva central si i només si estan en perspectiva axial.*

En dimensió 3, la demostració és força fàcil. La idea és la següent: si els triangles estan en perspectiva central, llavors la intersecció dels dos plans dels triangles s'intercepten en una recta que és l'eix de la perspectiva axial. A l'inrevés, si els triangles estan en perspectiva axial, cada parell de rectes (per exemple a , a') defineix un pla; el centre de la perspectiva central serà la intersecció d'aquests tres plans.

Observeu que un cop que tenim toda la configuració de punts i rectes (de qualsevol enunciat de la geometria projectiva), es pot escullir una carta afí que conté tot (més precisament, conté tots els punts, i una part afí de cada recta). Així el teorema de Desargues (o qualsevol teorema de la geometria projectiva) admet també una formulació en la geometria afí. Però tant la formulació com la demostració és molt més elegant en la versió projectiva.

5 Famílies d'objectes geomètriques

Si treballem en geometria afí, moltes vegades tenim famílies d'objectes que són espais projectius i no pas afins, o que naturalment s'extenen a una família projectiva. El cas fonamental és la família de totes les rectes que passen per algun punt P : en coordenades amb origen P podem interpretar la família vectorialment, i és més o menys la definició d'espai projectiu.

5.1 Rectes que passen per un punt. En particular, al pla afí, la família de totes les rectes que passen per algun punt P fixat és una recta projectiva.

5.2 Rectes del pla afí. Què tal la família de *totes* les rectes del pla afí $\mathbb{R}^2$? Una recta és pot descriure per una equació de la forma

$$ax + by + c = 0$$

No admetem el cas $a = b = c = 0$, perquè és sempre zero, i per tant no defineix una recta. (Tampoc admitim el cas $a = b = 0$, $c \neq 0$, perquè mai és zero.) D'altra banda, dues equacions defineixen la mateixa recta quan els coeficients d'una són un múltiple de $\lambda \neq 0$ dels coeficients de l'altre. Per tant, l'espai de les rectes és naturalment un espai projectiu de dimensió 2, i té coordenades projectives $[a : b : c]$. El cas $a = b = 0$ correspon a un sol punt $[0 : 0 : 1]$ (perquè els esculls de $c \neq 0$ són tots múltiples de $c = 1$). Com hem observat, aquest punt correspon al conjunt buit. Però ara podem interpretar aquest cas més aviat com la “recta a l'infinit” del nostre pla afí. En conclusió, la família de les rectes del pla afí és un pla projectiu menys un punt.

Treballem ara en l'espai projectiu de totes les rectes d'un pla afí (inclosa la recta a l'infinit). Sigui P un punt de $\mathbb{A}^2$. En coordenades adequades, podem suposar que és el punt $(0, 0)$. Quines són les rectes que passen per P ? Respecte a les mateixes coordenades, l'espai de les rectes és el pla projectiu amb coordenades projectives $[a : b : c]$. Clarament la família de les rectes que passen per P són exactament les rectes $ax + by + c$ amb $c = 0$. Aquesta equació defineix una recta projectiva de $\mathbb{P}^2$. Així veiem la recta projectiva de les rectes per P com un subespai, o subfamília, de l'espai de totes les rectes.

Ara podem combinar varies famílies. Suposem per exemple que volem trobar totes les rectes que passen per P i Q . (És clar que hi haurà exactament una recta.) En termes de les famílies: les rectes que passen per P formen una recta projectiva en $\mathbb{P}^2$, i les rectes que passen per Q formen una altra recta projectiva en $\mathbb{P}^2$. La solució és per tant la intersecció d'aquestes dues rectes projectives, dins de l'espai $\mathbb{P}^2$ de totes les rectes: és un sol punt de $\mathbb{P}^2$, i per tant la solució del problema original consisteix en una sola recta.

5.3 Còniques que passen per cinc punts. Aviat estudiarem còniques afins. Breument, una cònica és el conjunt de zeros d'una equació de grau 2 (en dues variables, que són les coordenades del pla). Així una cònica és de la forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Formen un espai projectiu $\mathbb{P}^5$ de dimensió 5, amb coordenades projectives

$$[a : b : c : d : e : f].$$

La condició per una cònica de passar per un punt P defineix en $\mathbb{P}^5$ un hiperplà projectiu. Si agafem cinc punts (generals) del pla, $P_1, \dots, P_5$, llavors la condició per una cònica de passar pels cinc es tradueix en l'intersecció dels cinc hiperplans projectius. Aplicacions successives de la fórmula de Grassmann impliquen que l'intersecció consisteix en un sol punt de $\mathbb{P}^5$. Per tant, hi ha exactament una cònica que passa per cinc punts donats. L'utilitat de la geometria projectiva és evident.

Aquest tipus d'aplicació de la geometria projectiva és central en moltes situacions de la geometria moderna, on sovint es tracta famílies d'objectes geomètriques (espais de mòduli) més aviat que objectes aïllats.

Referències

Berger

- [1] M. BERGER. *Geometry (vols. 1–2)*. Springer, New York, 1987. (Translated from the French *Géométrie*, vols. 1–5, CEDIC, Paris, 1977.)

Coxeter

- [2] H. S. M. COXETER. *Introduction to Geometry*. Wiley, New York, 1961.

Reventós:GP

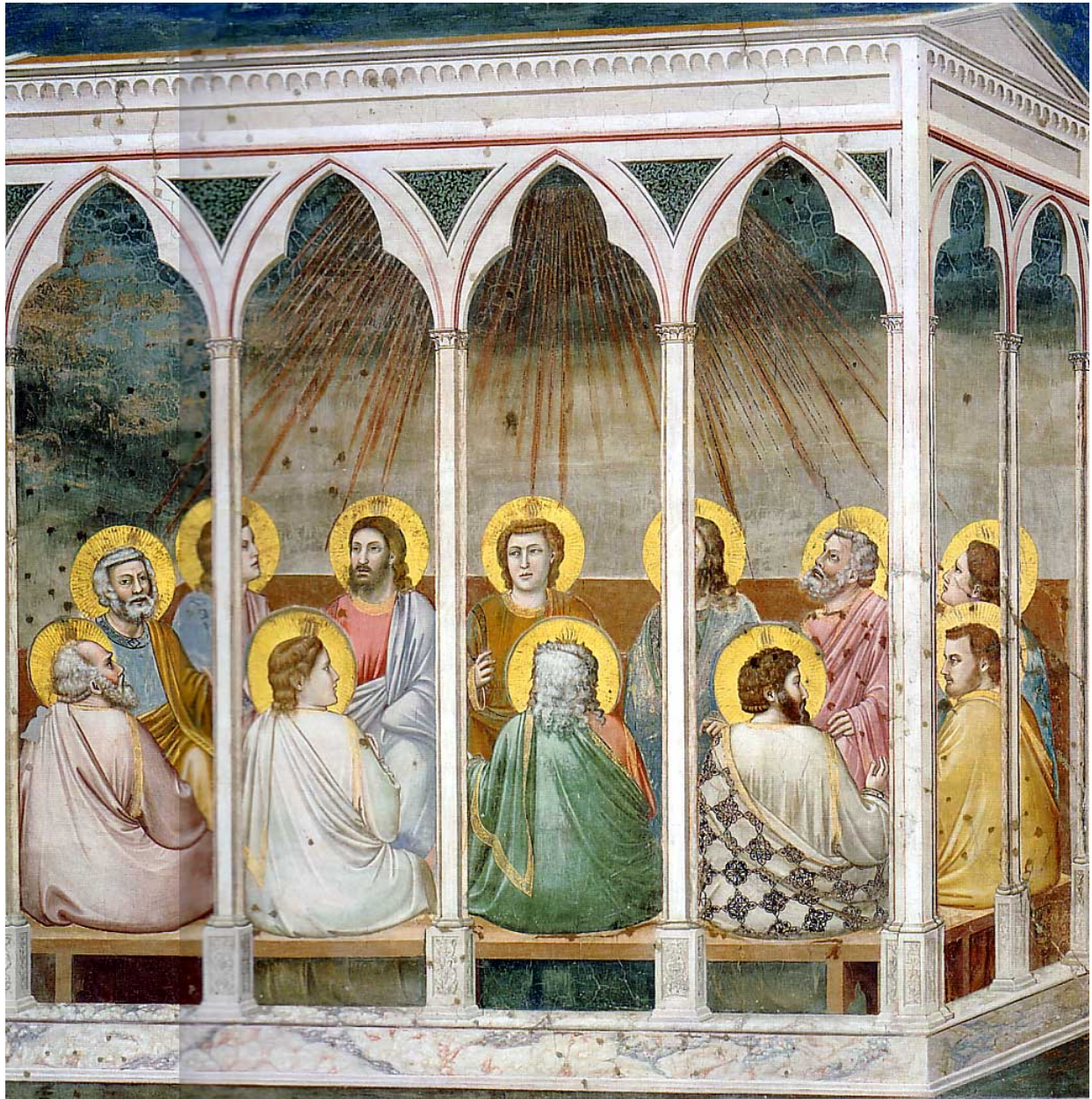
- [3] A. REVENTÓS. *Geometria projectiva*. Materials de la UAB no. 58, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2000.



1 Atelier d'enluminure parisien. Jephthé vainqueur des Ammonites accueilli par sa fille et les compagnes de celle-ci. Psautier de Saint Louis, Vers 1260 – 1270. Paris, Bibliothèque Nationale, lat. 10525, fol. 53 v.



Duccio, 1306



Giotto, 1306



Ambrogio Lorenzetti, 1344

(Teoria geomètrica de la perspectiva: Brunelleschi, anys 1420; Alberti, 1435.)



Carpaccio, 1514